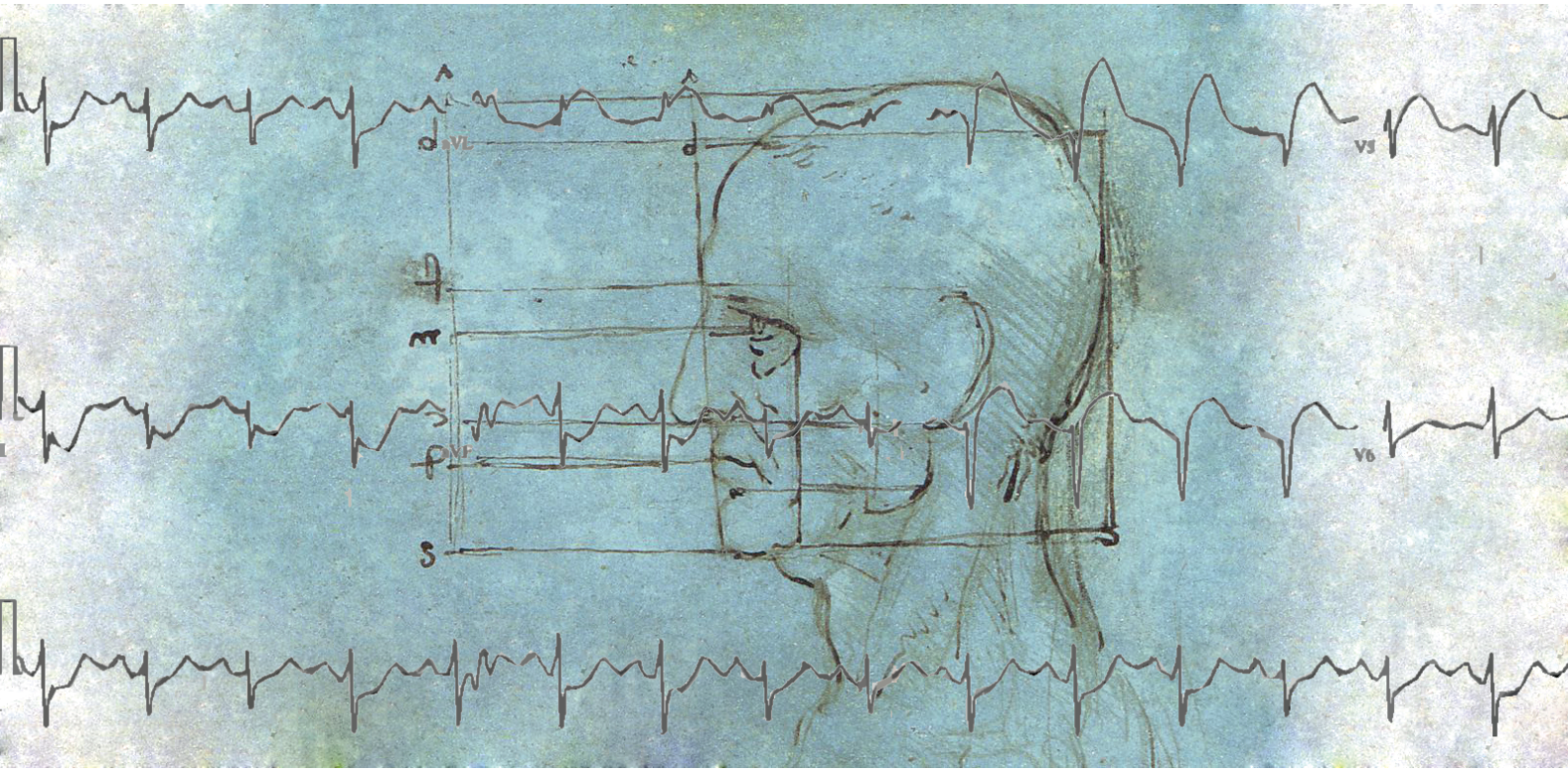


Podstawy fizyki współczesnej – fizyka kwantowa

wykład

Piotr Bojarski, Małgorzata Borowiak

Gdańsk, 2013

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytetu Gdańskiego

Skrypt powstał w ramach projektu „Kształcimy profesjonalistów – kompleksowy program kształcenia skierowany do studentów, absolwentów oraz studentów niepełnosprawnych Uniwersytetu Gdańskiego” współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach środków Europejskiego Funduszu Społecznego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET GDAŃSKI

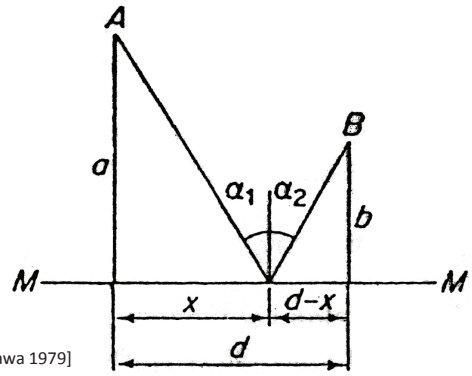
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

ELEMENTY OPTYKI GEOMETRYCZNEJ

1) Zasada Fermata – prawa odbicia i załamania światła

Zasada Fermata orzeka, że promień świetlny biegnie po takiej drodze, by czas potrzebny na jej przebycie był jak najkrótszy.

Zasada Fermata dla odbicia:



[J. R. Meyer-Arendt, Wstęp do optyki, PWN Warszawa 1979]

$$s = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2} \tag{7.01}$$

Z zasady Fermata

$$\frac{ds}{dx} = 0 \tag{7.02}$$

skąd:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} \tag{7.03}$$

Co zgodnie z rysunkiem oznacza, że

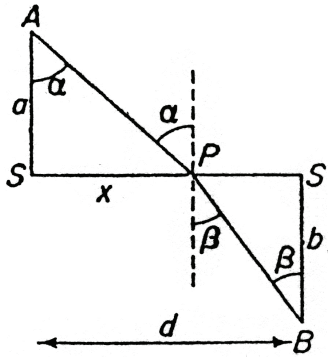
$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 \tag{7.04}$$

czyli

$$\alpha_1 = \alpha_2 \,. \tag{7.05}$$

Jest to pierwsze prawo odbicia: kąt odbicia jest równy kątowi padania.
Drugie prawo odbicia: promień padający, odbity i normalna wystawiona z powierzchni w punkcie padania leżą w tej samej płaszczyźnie prostopadłej do granicy odbijającej.

Zasada Fermata dla załamania:



[J. R. Meyer-Arendt, Wstęp do optyki, PWN Warszawa 1979]

$$L = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2} \tag{7.06}$$

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} = \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2} \tag{7.07}$$

Zgodnie z zasadą Fermata:

$$\frac{dt}{dx} = 0 \tag{7.08}$$

zatem

$$\frac{x}{\nu_1\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{d - x}{\nu_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} = 0 \tag{7.09}$$

czyli zgodnie z rysunkiem:

$$\frac{\sin\alpha}{\nu_1} - \frac{\sin\beta}{\nu_2} = 0 \tag{7.10}$$

lub

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1} \tag{7.11}$$

Jest to prawo załamania Snelliusa.

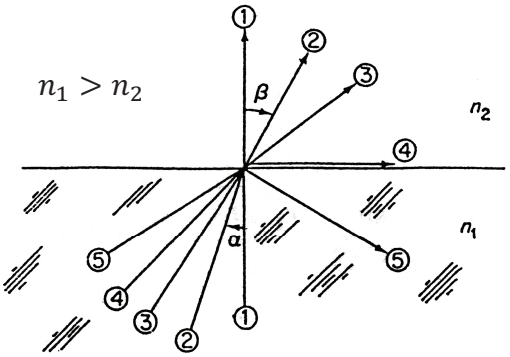
Długość drogi optycznej

Odległość między dwoma punktami niezależnie od środka pomiędzy nimi nazywa się długością drogi geometrycznej. W ośrodku o współczynniku załamania n światło potrzebuje n-krotnie dłuższego czasu do przebycia zadanej drogi geometrycznej niż w próżni. Jeśli ośrodek jest niejednorodny optycznie, to ogólnie długość drogi optycznej:

$$S = \int_A^B ndL \tag{7.13}$$

dL – liniowy element drogi od A do B.

Całkowite wewnętrzne odbicie

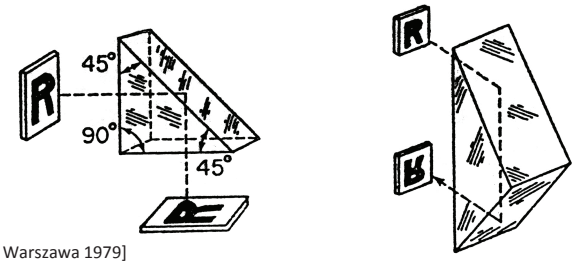


[J. R. Meyer-Arendt, Wstęp do optyki, PWN Warszawa 1979]

$$\frac{\sin\alpha}{90^\circ} = \sin\alpha = \frac{n_2}{n_1} \tag{7.14}$$

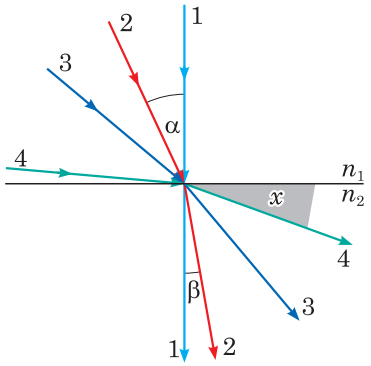
$$\alpha = \arcsin\frac{n_2}{n_1} \tag{7.15}$$

Zastosowanie – pryzmat całkowicie odbijający



[J. R. Meyer-Arendt, Wstęp do optyki, PWN Warszawa 1979]

Kąt graniczny załamania



$$n_1 < n_2$$

$$\text{gdy } \alpha \to 90^{\circ} \tag{7.16}$$

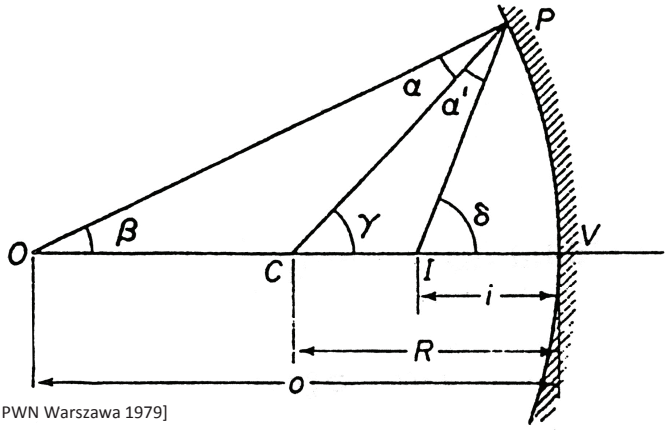
$$\sin\alpha \to 1$$

$$\text{i } \beta = arc\sin\frac{n_1}{n_2} \tag{7.17}$$

Jest to kąt graniczny załamania określający obszar x niedostępny dla światła.

Zwierciadła

Równanie zwierciadła



[J. R. Meyer-Arendt, Wstęp do optyki, PWN Warszawa 1979]

Z konstrukcji na rysunku:

$$\beta + \alpha = \gamma \; oraz \; \beta + 2\alpha = \delta \tag{7.18}$$

stąd

$$\beta + \delta = 2\gamma \tag{7.19}$$

Dla małych kątów:

$$\beta \cong \frac{PV}{OV} = \frac{PV}{o} \tag{7.20}$$

$$\gamma \cong \frac{PV}{CV} = \frac{PV}{R} \tag{7.21}$$

$$\gamma \cong \frac{PV}{IV} = \frac{PV}{i} \tag{7.22}$$

Podstawiając te wyrażenia do (7.19) mamy:

$$\frac{PV}{o} + \frac{PV}{i} = 2\frac{PV}{R} \tag{7.23}$$

Stąd

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f} \tag{7.24}$$

gdzie:
f – ogniskowa, i – odległość obrazowa, o – odległość przedmiotowa, R – promień zwierciadła.

Jest to równanie zwierciadła sferycznego

Reguła znaków

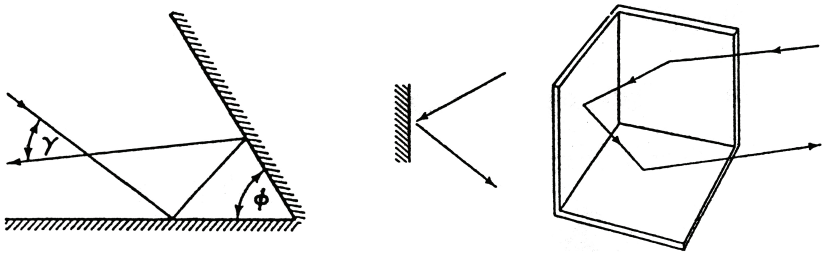
1. Odległość przedmiotową przedmiotu rzeczywistego przyjmujemy jako dodatnią
2. Odległość obrazowa – dodatnia dla obrazu rzeczywistego i ujemna dla obrazu pozornego. Obraz jest rzeczywisty, gdy leży po tej samej stronie co przedmiot i gdy energia świetlna dochodzi do obszaru obrazu.
3. Ogniskowe są dodatnie dla układów skupiających i ujemne dla rozpraszających.
4. Promień krzywizny zwierciadła jest dodatni dla zwierciadła skupiającego (wklęsłego) i ujemny dla zwierciadła rozpraszającego (wypukłego).

Zwierciadła płaskie

Dla zwierciadła płaskiego $R \to \infty$. Wtedy mamy: $o = -i$.
Zwierciadła płaskie tworzą więc obrazy pozorne położone symetrycznie względem zwierciadła.

Zwierciadła wielopłaszczyznowe

Jest to zestawienie co najmniej dwóch zwierciadeł płaskich.



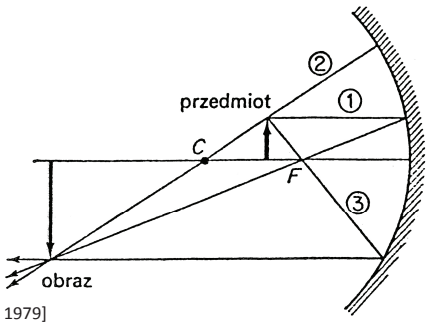
Przykłady: peryskop, reflektor zwrotny.

[J. R. Meyer-Arendt, Wstęp do optyki, PWN Warszawa 1979]

Konstrukcja graficzna obrazu

Rozpatrzmy 4 przypadki:

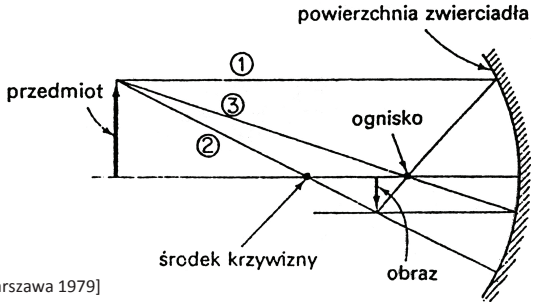
1) Przedmiot za środkiem krzywizny zwierciadła.



[J. R. Meyer-Arendt, Wstęp do optyki, PWN Warszawa 1979]

Obraz jest rzeczywisty, odwrócony i pomniejszony w stosunku do przedmiotu.

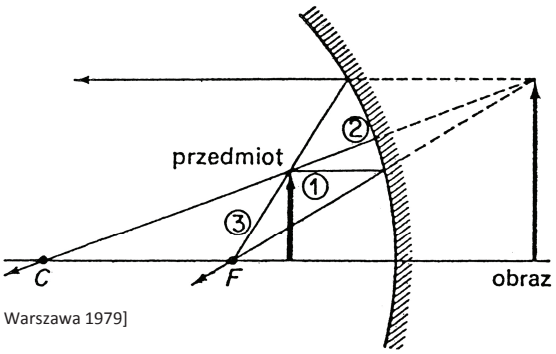
2) Przedmiot pomiędzy środkiem krzywizny a płaszczyzną ogniskową.



[J. R. Meyer-Arendt, Wstęp do optyki, PWN Warszawa 1979]

Obraz jest rzeczywisty, odwrócony i powiększony. Gdy obraz i przedmiot leżą w tej samej płaszczyźnie, to są równej wielkości.

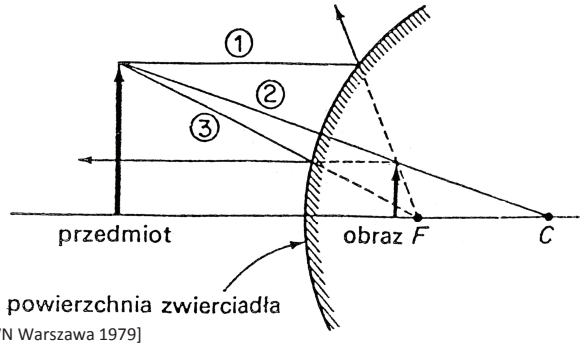
3) Przedmiot pomiędzy ogniskiem a zwierciadłem.



[J. R. Meyer-Arendt, Wstęp do optyki, PWN Warszawa 1979]

Obraz jest pozorny, prosty i powiększony.

4) Przypadek zwierciadła wypukłego.

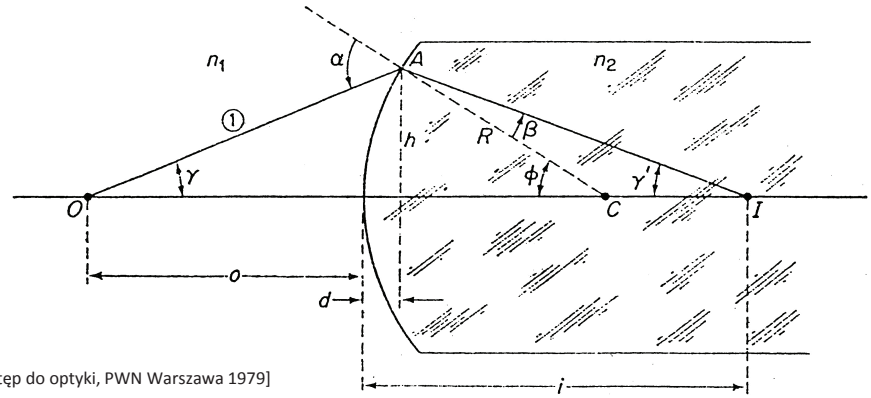


[J. R. Meyer-Arendt, Wstęp do optyki, PWN Warszawa 1979]

Obraz pozorny, prosty i pomniejszony.

Soczewki

Obraz na pojedynczej powierzchni sferycznej



[J. R. Meyer-Arendt, Wstęp do optyki, PWN Warszawa 1979]

$$\alpha = \gamma + \varphi \,, \varphi = \beta + \gamma' \,, \beta = \varphi - \gamma' \tag{7.25}$$

oraz

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{h}{o+d} \,, \mathrm{tg}\gamma' = \frac{h}{i-d} \,, \sin\varphi = \frac{h}{R} \tag{7.26}$$

Dla małych kątów sin i tg można zastąpić przez kąt. Wówczas po zaniedbaniu także d mamy:

$$\sin\alpha \approx \alpha = \gamma + \varphi \approx \frac{h}{o} + \frac{h}{R} \tag{7.27}$$

oraz

$$\sin\beta \approx \beta = \varphi - \gamma' \approx \frac{h}{R} + \frac{h}{i} \tag{7.28}$$

Po skorzystaniu z prawa Snelliusa mamy:

$$\frac{n_1 h}{o} + \frac{n_1 h}{R} = \frac{n_2 h}{R} - \frac{n_2 h}{i} \tag{7.29}$$

Skąd otrzymujemy tzw. wzór Gaussa dla załamania na pojedynczej powierzchni:

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{7.30}$$

Przesuwanie przedmiotu do nieskończoności daje przesunięcie obrazu do płaszczyzny ogniskowej.

Otrzymujemy:

$$f_2 = \frac{n_2 R}{\Delta n} \; oraz \; f_1 = \frac{n_1 R}{\Delta n} \tag{7.31}$$

stąd:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2} \tag{7.32}$$

i wzór Gaussa przyjmuje postać:

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} \tag{7.33}$$

Wprowadza się podobną jak uprzednio konsekwencję znaków:

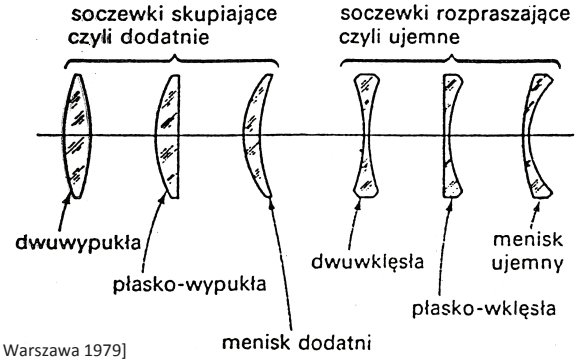
1. Odległość przedmiotową przedmiotu rzeczywistego przyjmujemy za dodatnią
2. Odległość obrazową przyjmujemy za dodatnią dla obrazu rzeczywistego, a za ujemną dla obrazu pozornego.
3. Ogniskowe są dodatnie dla układu skupiającego, zaś ujemne dla układu rozpraszającego.
4. Przyjmuje się, że wszystkie powierzchnie wypukłe patrząc z ośrodka rzadszego w kierunku gęstszego bez względu na kierunek rozchodzenia się światła maja dodatnie promienie krzywizny. Wszystkie powierzchnie wklęsłe mają promienie ujemne.

Moc optyczna (zdolność skupiająca)

$$P = \frac{n}{f} = \frac{\Delta n}{R} \tag{7.34}$$

Jednostka: $1/m$ lub *dioptria.*

Soczewki cienkie



[J. R. Meyer-Arendt, Wstęp do optyki, PWN Warszawa 1979]

Wzór szlifierzy i równanie soczewki

Cienką soczewkę można uważać za sumę dwóch pojedynczych powierzchni załamujących. Ze względu na to, że światło przechodzi przez obie powierzchnie, moce optyczne dodają się:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{\Delta n}{R_1} + \frac{\Delta n}{R_2} \tag{7.35}$$

lub

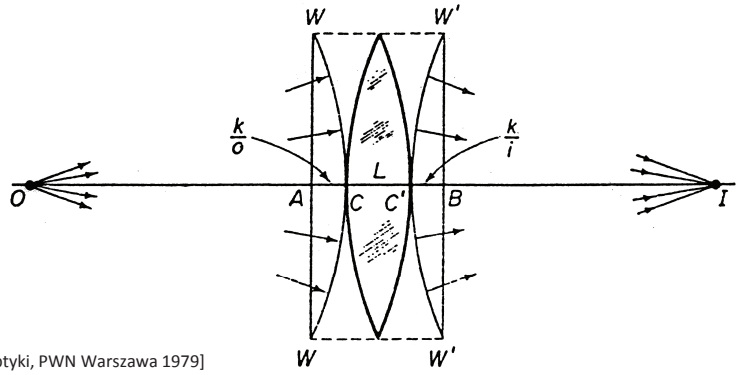
$$P = \Delta n \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tag{7.36}$$

Gdyby soczewkę o współczynniku załamania n_2 umieścić między dwoma różnymi ośrodkami o współczynnikach załamania n_1 i n_3 to otrzymamy:

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_3}{i} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_3 - n_2}{R_2} \tag{7.37}$$

Wprowadzamy teraz wzór soczewkowy słuszny dla soczewek cienkich i promieni przyosiowych.

Ujęcie Gaussa.



[J. R. Meyer-Arendt, Wstęp do optyki, PWN Warszawa 1979]

Niech fala rozbieżna rozchodzi się z leżącego na osi optycznej obiektu punktowego O. Czoło fali w punkcie zetknięcia z soczewką oznaczono jako WW, a po przejściu przez soczewkę $W'W'$. Czoło fali ulega największemu opóźnieniu przy przejściu przez najgrubszą część soczewki.

Drogi optyczne L i WW' są równe. Odcinki AC i $C'B$ są strzałkami. Przyjmując formalnie, że $AC = k/o$ oraz $C'B = k/i$ mamy:

$$WW' = \frac{k}{o} + \frac{k}{i} + L = nL \tag{7.38}$$

Ze względu na to, że nL jest stałe dla danej soczewki:

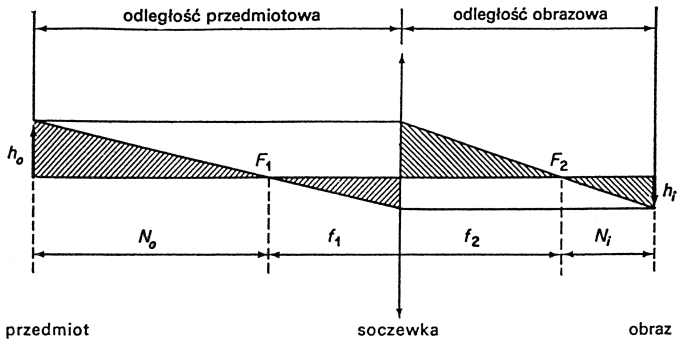
$$\frac{k}{o_1} + \frac{k}{i_1} + L = \frac{k}{o_2} + \frac{k}{i_2} + L \tag{7.39}$$

Gdy $o_2 \to \infty \; to \; i_2 \to f$ i mamy:

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} \tag{7.40}$$

Jest to wzór soczewkowy Gaussa.

Wzór soczewkowy Newtona



[J. R. Meyer-Arendt, Wstęp do optyki, PWN Warszawa 1979]

Z rysunku widać, że

$$\frac{h_o}{N_o} = \frac{h_i}{f_1}, \frac{h_0}{f_2} = \frac{h_i}{N_i} \tag{7.41}$$

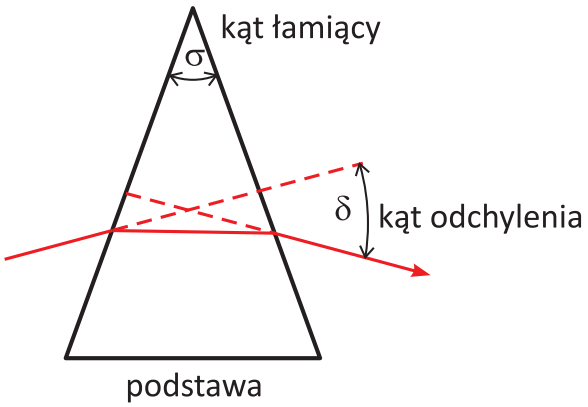
Pomnożenie i proste przekształcenie tych równań daje natychmiast:

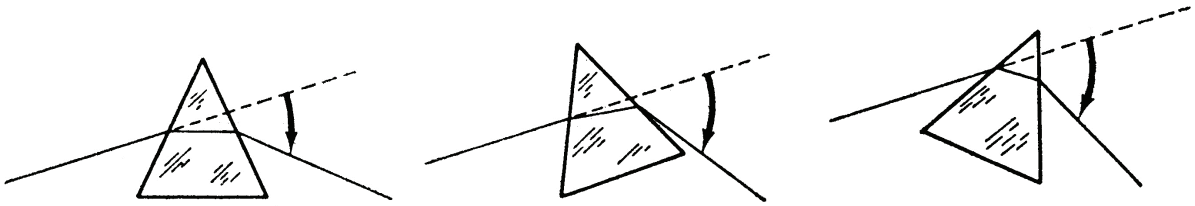
$$N_0 N_i = f_1 f_2 \tag{7.42}$$

Jest to wzór soczewkowy Newtona. Gdy współczynniki załamania po obu stronach soczewki są identyczne, to z uwagi na związek $f_1/f_2 = n_1/n_2$ mamy:

$$f_1 = f_2 \text{ i } N_0 N_i = f^2 \tag{7.43}$$

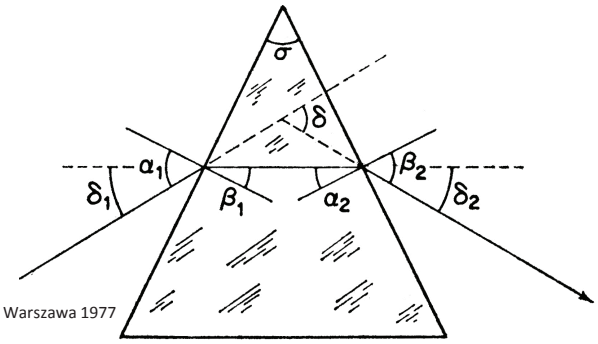
Pryzmaty i dyspersja





J. R. Meyer-Arendt „Wstęp do optyki", PWN Warszawa 1977

Równanie pryzmatu



J. R. Meyer-Arendt „Wstęp do optyki", PWN Warszawa 1977

Z rysunku wynika:

$$\alpha_1 = \beta_2\,, \beta_1 = \alpha_2 = \frac{\sigma}{2} \tag{8.01}$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{\delta}{2} = \beta_2 - \alpha_2 = \beta_2 - \frac{\sigma}{2} \tag{8.02}$$

$$\beta_2 = \frac{\sigma}{2} + \frac{\delta}{2} \tag{8.03}$$

Jeśli n oznacza współczynnik załamania pryzmatu a n_0 współczynnik załamania ośrodka zewnętrznego, to z prawa Snelliusa wynika, że

$$\frac{n}{n_0} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2} \tag{8.04}$$

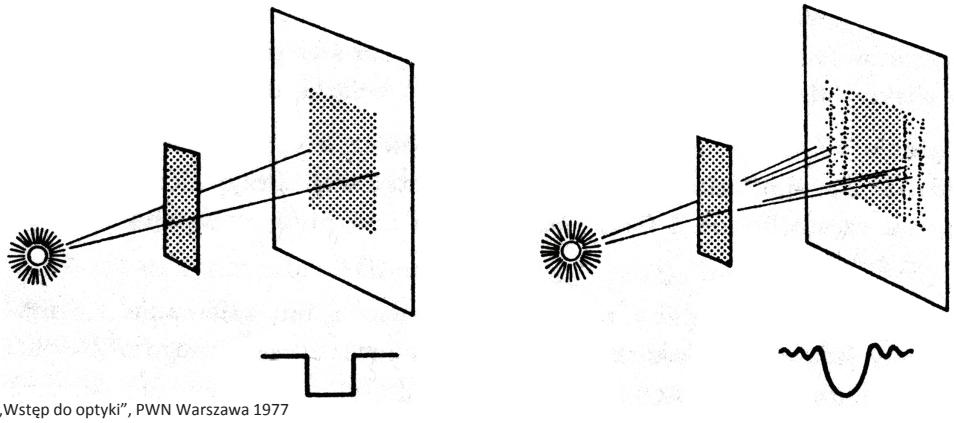
stąd

$$\frac{n}{n_0} = \frac{\sin\frac{\sigma+\delta}{2}}{\sin\frac{\sigma}{2}} \tag{8.05}$$

gdzie σ – kąt łamiący, δ – kąt najmniejszego odchylenia.

Dyfrakcja

Dyfrakcję można zdefiniować jako każde odchylenie od prostoliniowego rozchodzenia się światła, które nie może być objaśnione przez odbicie i załamanie.
Rozważmy zagadnienie cienia.



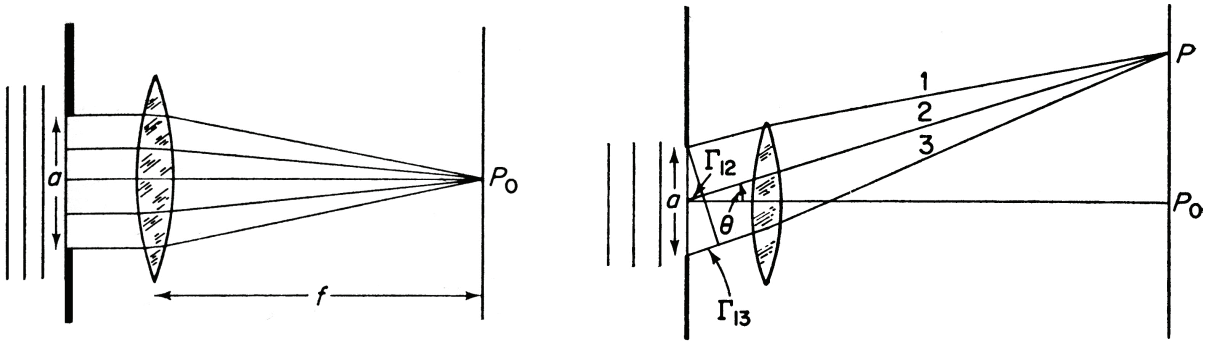
J. R. Meyer-Arendt „Wstęp do optyki", PWN Warszawa 1977

Joseph Fraunhofer (1787 – 1826), *Augustin Jean Fresnel* (1788 – 1827)

Rozróżniamy opisy dyfrakcji w ujęciu ***Fresnela*** i ***Fraunhofera***.

Dyfrakcja *Fresnela* jest bardziej ogólna. Dyfrakcja *Fraunhofera* jest łatwiejsza w objaśnieniu. Dyfrakcja *Fraunhofera* zachodzi wtedy, gdy fala osiągająca i opuszczająca przeszkodę lub otwór jest falą płaską. Oznacza to, że źródło światła i płaszczyzna obserwacji znajdują się w nieskończoności. W przypadku dyfrakcji *Fresnela* źródło i/lub obserwator znajdują się w odległościach skończonych.

Dyfrakcja Fraunhofera na pojedynczej szczelinie



J. R. Meyer-Arendt „Wstęp do optyki", PWN Warszawa 1977

Niech θ ma taką wartość, by różnica dróg optycznych Γ między promieniem 1 i 2 była równa połowie długości fali. Wtedy 1 i 2 są w przeciwnych fazach i w P nie obserwujemy światła. Powiemy, że w P jest minimum pierwszego rzędu. Powstaje ono więc dla:

$$\Gamma_{12} = \frac{1}{2}\lambda \tag{8.06}$$

lub dla:

$$\Gamma_{13} = \lambda\,. \tag{8.07}$$

Ponadto

$$\sin\Theta = \frac{\Gamma_{13}}{a} \tag{8.08}$$

czyli

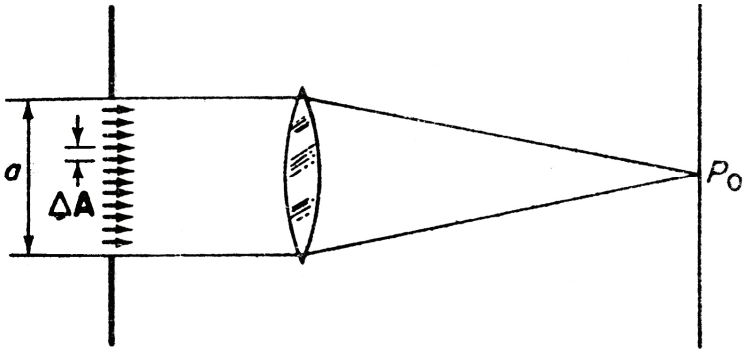
$$a\sin\Theta = \lambda\ . \tag{8.09}$$

Ogólnie na ekranie minima powstają w dyfrakcji Fraunhofera na pojedynczej szczelinie, gdy spełniony jest warunek:

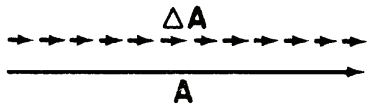
$$a \sin \Theta = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots) . \tag{8.09}$$

Kąt ugięcia wzrasta, gdy szerokość szczeliny maleje. Z ostatniego związku wynika też, że światło o większych długościach fali jest uginane silniej.

Wyznaczenie amplitudy i natężenie światła ugiętego na pojedynczej szczelinie **metodą graficzną**: w tym celu podzielmy szczelinę na 12 stref o równej szerokości Δa. Światło wychodzi z każdego z pasków w postaci wiązek o amplitudzie ΔA.



J. R. Meyer-Arendt „Wstęp do optyki", PWN Warszawa 1977

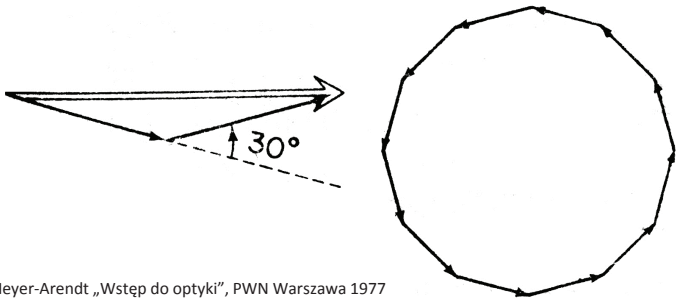


J. R. Meyer-Arendt „Wstęp do optyki", PWN Warszawa 1977

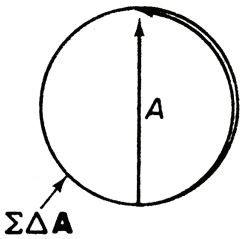
Dla punktu P_0 wszystkie fale elementarne przybywają w zgodnej fazie. Stąd wypadkowa amplituda:

$$A = \sum \Delta A \tag{8.10}$$

We wszystkich innych punktach P ekranu fale pochodzące od różnych stref szczeliny różnią się fazą. Jeśli w P jest pierwsze minimum, to różnica faz między pierwszym i ostatnim wektorem amplitudy wynosi $360°$. Przy podziale szczeliny na 12 stref różnica faz między sąsiednimi wektorami wynosi $30°$. Wszystkie 12 wektorów tworzy zatem pełen okrąg i wypadkowa amplituda jest 0.



J. R. Meyer-Arendt „Wstęp do optyki", PWN Warszawa 1977



J. R. Meyer-Arendt „Wstęp do optyki", PWN Warszawa 1977

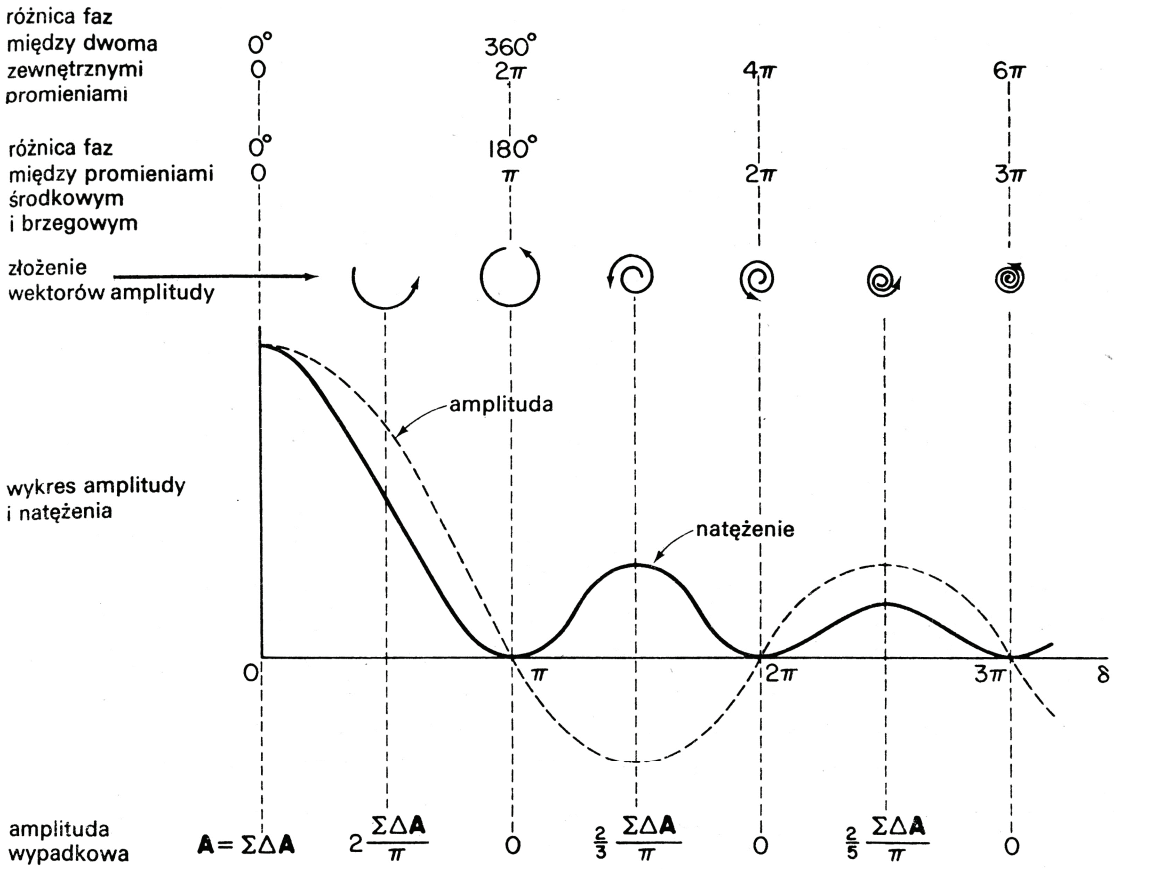
Przyjmijmy teraz, że P znajduje się między położeniem maksimum zerowego rzędu oraz minimum pierwszego rzędu. Wybierzmy ten punkt tak, by różnica faz skrajnych stref była $\delta = 180°$. W takim przypadku dodane wektory utworzą półokrąg. Ponieważ długość łuku jest sumą ΔA to wypadkowa amplituda:

$$A \approx \frac{2}{3}\frac{\sum \Delta A}{\pi} \tag{8.11}$$

Dla maksimum drugiego rzędu:

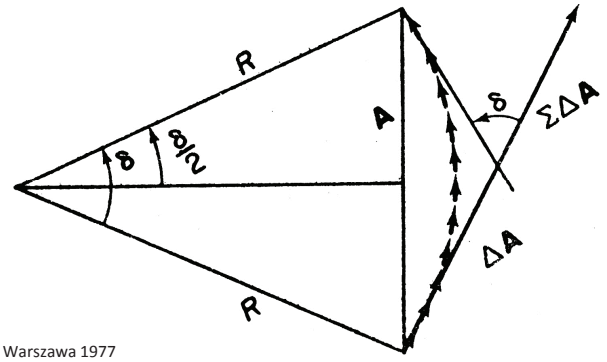
$$A \approx \frac{2}{5}\frac{\sum \Delta A}{\pi} \tag{8.12}$$

Ogólnie wyniki przedstawia rysunek:



J. R. Meyer-Arendt „Wstęp do optyki", PWN Warszawa 1977

Obliczmy natężenie w dyfrakcji *Fraunhofera* na pojedynczej szczelinie. Niech $\Delta\delta$ oznacza różnicę faz między dwiema sąsiednimi falami elementarnymi, zaś δ różnicę faz między falami pochodzącymi ze skrajnych stref szczeliny. δ to jednocześnie kąt jaki tworzą kierunki pierwszego i ostatniego wektora amplitudy.



J. R. Meyer-Arendt „Wstęp do optyki", PWN Warszawa 1977

Amplituda wypadkowa A jest równa długości cięciwy odpowiedniego łuku. Z konstrukcji wynika, że:

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{A}{2R} \tag{8.13}$$

czyli

$$A = 2R\sin\frac{\delta}{2} \tag{8.14}$$

W mierze łukowej:

$$\delta = \frac{\sum \Delta A}{R} \tag{8.15}$$

Stąd:

$$A = 2\frac{\sum \Delta A}{\delta}\sin\frac{\delta}{2} = \Delta A\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}} \tag{8.16}$$

Ponieważ z definicji natężenie to kwadrat amplitudy, więc natężenie I_Θ w punkcie P odległym kątowo o Θ od osi optycznej wynosi:

$$I_\Theta = I_0\left(\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}\right)^2 \tag{8.17}$$

gdzie I_0 natężenie światła padającego.

Minima w obrazie dyfrakcyjnym od pojedynczej szczeliny są równoodległe, po obu stronach maksimum centralnego dla $\delta = \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots, \pm m\pi,\ m = 1, 2, 3, \ldots$. Pozycje maksimów wyznacza się z równania:

$$\frac{d}{dx}I_0\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 0 \tag{8.18}$$

gdzie $x = \delta/2$.

Wartości natężenia w maksimach:

$$I_\Theta = I_0\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2} = I_0\frac{4}{(2m+1)^2\pi^2} \tag{8.19}$$

I_0 - natężenie w maksimum centralnym.

Szerokość połówkową centralnego maksimum wyznacza się ze związku:

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}\right)^2 \tag{8.20}$$

Można pokazać, że ma to miejsce dla $\delta_{1/2} = 1.4\ radiana = 80°$.
Ponieważ tę różnicę faz można też pokazać jako:

$$\delta_{1/2} = \frac{a}{\lambda}\pi\sin\Theta_{1/2} \tag{8.21}$$

to

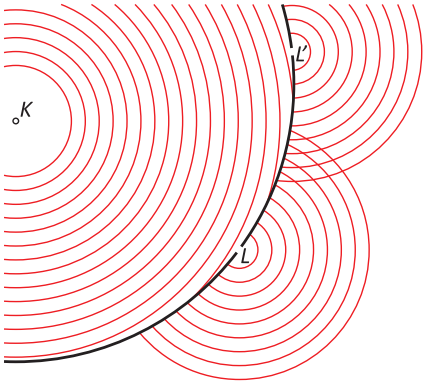
$$2\cdot 1.4\ radiana = \frac{a}{\lambda}\pi\sin\Theta \tag{8.22}$$

czyli

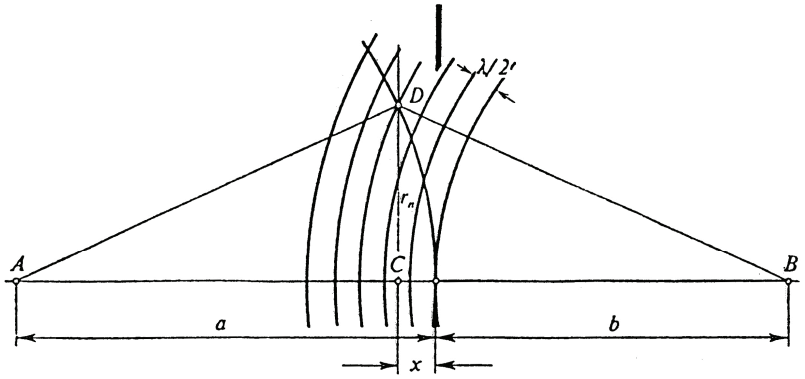
$$\frac{2.8}{\pi} \approx \frac{a}{\lambda}\text{ , czyli } \Theta \approx \frac{\lambda}{a} \tag{8.23}$$

Dyfrakcja w ujęciu Fresnela

Zasada Huygensa



Wyobraźmy sobie punktowe źródło światła K, z którego rozchodzą się fale kuliste.
Jeśli przed źródłem ustawimy przesłonę z małym otworem, to według ***zasady Huygensa*** otwór L uważać możemy za nowe źródło fal. *Fresnel* uzupełnił tę zasadę uwzględniając interferencję fal elementarnych wychodzących z różnych punktów czoła fali. W tym celu wprowadził on tzw. *strefy Fresnela*.



Sz. Szczeniowski „Fizyka doświadczalna IV Optyka", PWN Warszawa 1967

Z trójkąta ACD mamy:

$$r_n{}^2 = a^2 - (a-x)^2 = 2ax - x^2 \approx 2ax \tag{8.24}$$

Z trójkąta BCD:

$$r_n{}^2 = (b + n\lambda/2)^2 - (b+x)^2 = nb\lambda - 2bx \tag{8.25}$$

Z porównania obu związków mamy:

$$2ax = nb\lambda - 2bx \tag{8.26}$$

skąd

$$x = \frac{nb\lambda}{2(a+b)} \tag{8.27}$$

Po podstawieniu do (8.24) mamy:

$$r_n{}^2 = \frac{nab\lambda}{(a+b)} \tag{8.28}$$

i powierzchnia n-tej strefy wynosi:

$$\pi r^2{}_{n+1} - \pi r_n{}^2 = \frac{\pi ab\lambda}{(a+b)} \tag{8.29}$$

Różnica faz fal wychodzących z sąsiednich stref i dochodzących do punktu B wynosi π. Ze względu na interferencję amplitudy sąsiednich stref kolejno wzmacniają się i osłabiają. Wypadkowa amplituda w B:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \cdots \tag{8.30}$$

Zapiszmy to wyrażenie w postaci:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \cdots \tag{8.31}$$

Przyjmijmy, że w przybliżeniu amplituda i-tego wektora świetlnego jest średnią arytmetyczną amplitud od stref sąsiednich:

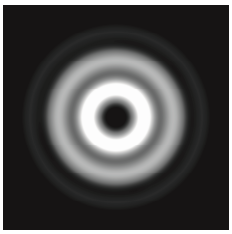
$$A_i \approx \frac{1}{2}(A_{i-1} + A_{i+1}) \tag{8.32}$$

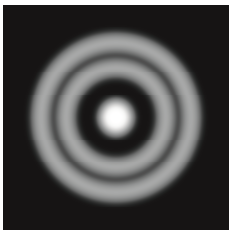
Dla dużej liczby stref otrzymamy wtedy:

$$A \approx \frac{1}{2}A_1 \tag{8.33}$$

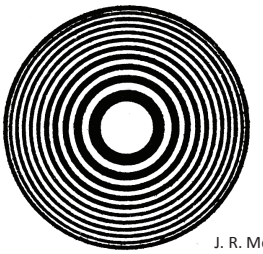
Pomijamy tu działanie ostatniej strefy. Całkowita liczba *stref Fresnela* N znajdujących się na półkuli jest duża. Np. dla $a = b = 10cm$ i $\lambda = 500nm$ N wynosi około 10^6.

Jeśli na drodze fali między A i B ustawimy ekran z otworkiem przepuszczającym tylko pierwszą strefę to w B zaobserwujemy dwukrotnie większą amplitudę czyli A_1 zatem natężenie światła będzie 4 razy większe. Jeśli średnicę otworka zwiększymy tak, by pokryte były dwie pierwsze strefy, to działania tych stref z dobrym przybliżeniem skompensują się i w B będzie ciemna plamka. Dla trzech stref wpływ otworka sprowadzi się do działań połowy pierwszej i trzeciej strefy. Ogólnie obraz ugięcia światła na otworku przy parzystej i nieparzystej liczbie stref przedstawia rysunek:





Z konstrukcji *Fresnela* wynika możliwość znacznego zwiększania natężenia światła w punkcie B. Jeśli odległość przesłony od źródła jest duża to *strefy Fresnela* leżą z dobrym przybliżeniem w płaszczyźnie przesłony. Wtedy na płytce szklanej kreślimy szereg koncentrycznych czarnych pierścieni, takich by pokrywały się z parzystymi *strefami Fresnela*. Taka płytka strefowa przepuszcza tylko fale od nieparzystych stref, które wzmacniają się:



$$A = A_1 + A_3 + \cdots + A_{2n+1} \tag{8.34}$$

Otrzymujemy duże wzmocnienie oświetlenia w punkcie B. (Płytka strefowa – rysunek obok)

J. R. Meyer-Arendt „Wstęp do optyki", PWN Warszawa 1977

Płytkę strefową można traktować jak soczewkę. Dla $n = 1$ mamy dla r_n:

$$r_1{}^2 = \frac{ab\lambda}{(a+b)} \tag{8.35}$$

co można przedstawić w postaci:

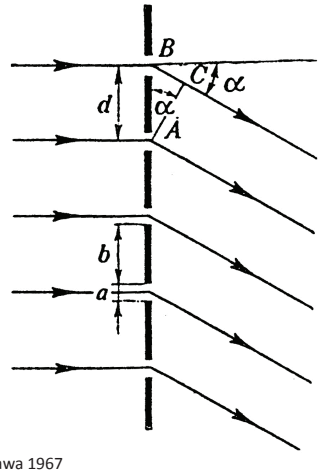
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{\lambda}{r_1{}^2} = \frac{1}{f} \tag{8.36}$$

Siatka dyfrakcyjna

Jest to układ N równoległych do siebie szczelin rozmieszczonych w równych odstępach.
Jeśli a – szerokość szczeliny, b – szerokość odstępu między szczelinami, to wielkość

$$d = a + b \tag{8.37}$$

nazywamy ***stałą siatki dyfrakcyjnej.***



Sz. Szczeniowski „Fizyka doświadczalna IV Optyka", PWN Warszawa 1967

Na siatkę rzucamy wiązkę promieni równoległych i obserwujemy obraz dyfrakcyjny w płaszczyźnie soczewki zbierającej. Różnica dróg promieni wychodzących z dwóch sąsiednich szczelin:

$$\Delta = d \sin \alpha \tag{8.38}$$

gdzie α – kąt ugięcia. Wzmocnienie otrzymujemy dla:

$$d \sin \alpha_m = m\lambda \tag{8.39}$$

m – liczba całkowita. Dla $m = 0$ mamy prążek zerowy nieugięty, a dla $m = 1,2,\ldots$ prążki ugięte pierwszego, drugiego i dalszych rzędów. Położenie maksimów zależy od długości fali. Dla maksimum i-tego rzędu różnica dróg skrajnych promieni:

$$\Delta_{sk} = Nd \sin \alpha_i \tag{8.40}$$

jest proporcjonalna do liczby szczelin N. Położenie pierwszego minimum określa się dzieląc szerokość siatki na dwie równe części i biorąc pod uwagę np. dwa skrajne punkty symetrycznie położone w obu częściach siatki. Ich odległość wynosi $Nd/2$, natomiast różnica dróg promieni:

$$\Delta' = \frac{1}{2} Nd \sin \frac{\alpha}{2} \tag{8.41}$$

Całkowite wygaszenie następuje, gdy:

$$\frac{1}{2} Nd \sin \alpha_i = \frac{1}{2} \lambda \tag{8.42}$$

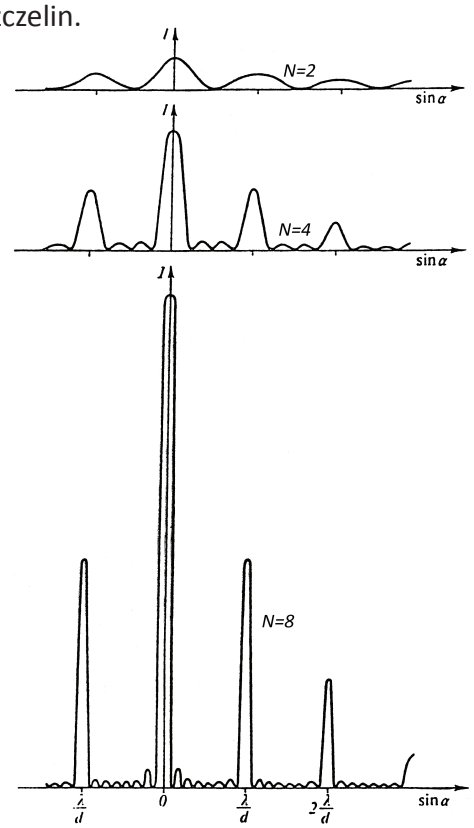
Stąd

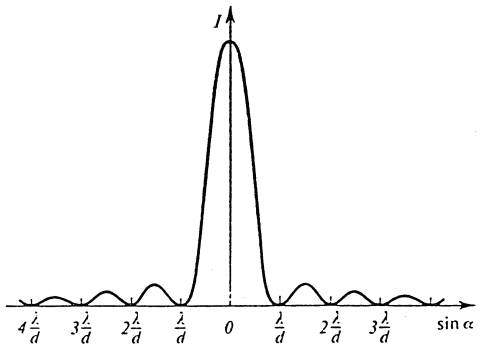
$$\sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{Nd} \tag{8.43}$$

a dla m-tego minimum:

$$\sin \alpha_m = m \frac{\lambda}{Nd} \tag{8.44}$$

Jak widać dla $m = N$ otrzymamy już pierwsze główne maksimum. Oznacza to, że między zerowym a pierwszym maksimum leży $N - 1$ minimów. Pomiędzy tymi minimami leżą słabsze maksima wtórne wywołane wzmacnianiem się promieni pochodzących z mniejszej liczby szczelin.





Sz. Szczeniowski „Fizyka doświadczalna IV Optyka", PWN Warszawa 1967

Gdy wzrasta liczba szczelin w tym samym stosunku rośnie liczba minimów. Maksima wtórne ulegają osłabieniu przy jednoczesnym wzmocnieniu maksimów głównych. Jednocześnie maleje szerokość maksimum głównego. Szerokość ta, to odstęp między środkami maksimum a najbliższego minimum. (rysunek obok)

Sz. Szczeniowski „Fizyka doświadczalna IV Optyka", PWN Warszawa 1967

Położenie maksimum głównego m-tego rzędu:

$$\sin \alpha_m = m\frac{\lambda}{d} \tag{8.45}$$

Najbliższe minimum:

$$\sin \alpha_m = m\frac{\lambda}{d} + \frac{\lambda}{Nd} \tag{8.46}$$

Stąd można określić zdolność rozdzielczą siatki dyfrakcyjnej. Dwie bliskie linie widmowe można rozróżnić, gdy ich obrazy ugięciowe są rozsunięte, tak, że maksimum jednego przypada przynajmniej na minimum drugiego. Załóżmy, że długość fali pierwszej linii jest λ, a drugiej $\lambda + \delta\lambda$. Wtedy musi być spełniony warunek:

$$\frac{m}{d}(\lambda + \delta\lambda) = m\frac{\lambda}{d} + \frac{\lambda}{Nd} \tag{8.47}$$

skąd znajdujemy:

$$Z = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN \tag{8.48}$$

Z nazywa się zdolnością rozdzielczą siatki dyfrakcyjnej. Jest ona proporcjonalna do liczby szczelin i rzędu widma.

Zjawisko wybijania przez światło elektronów z ciał stałych i cieczy zostało nazwane zjawiskiem fotoelektrycznym zewnętrznym. Występowanie prądu fotoelektrycznego w zakresie ujemnych napięć wynika z tego, że fotoelektrony wybite z katody przez kwanty światła mają początkową energię kinetyczną różną od zera, mogą jej kosztem wykonać pracę w hamującym polu elektrycznym i osiągnąć anodę.

$$\frac{mV^2{}_{max}}{2} = eU_0 \tag{1.01}$$

Przy wyjściu z metalu elektron musi wykonać pracę wyjścia A. W wyniku pochłonięcia fotonu elektron osiąga energię hv. Dla $hv > A$ może wykonać pracę wyjścia i opuścić metal.

$$\frac{mV^2{}_{max}}{2} = hv - \mathrm{A} \tag{1.02}$$

$$v_0 = \frac{A}{h} \tag{1.03}$$

Z równania tego można łatwo wyznaczyć częstość graniczną dla zjawiska fotoelektrycznego.

W wyniku doświadczeń ustalono następujące prawa rządzące zjawiskiem fotoelektrycznym:

1) Największa prędkość początkowa fotoelektronów określona jest częstością światła i nie zależy od jego natężenia.
2) Dla każdego materiału istnieje najmniejsza częstość światła, poniżej której efekt fotoelektryczny nie zachodzi.
3) Liczba fotoelektronów n wybijanych z katody w jednostce czasu jest proporcjonalna do natężenia światła.
4) Zjawisko fotoelektryczne nie wykazuje mierzalnej bezwładności.

Wszystkie te prawidłowości nie dają się wytłumaczyć na gruncie fizyki klasycznej.

Ciało nagrzane do odpowiednio wysokiej temperatury ma zdolność świecenia (np. rozgrzane do białości ciecze). Obniżanie temperatury prowadzi do zmiany zarówno natężenia jak i składu widmowego promieniowania (przesunięcie w stronę fal dłuższych). Jeżeli promieniujące ciało znajduje się w równowadze termodynamicznej, to wysyłane przez nie równowagowe promieniowanie nazywamy cieplnym bądź temperaturowym, ponieważ powstaje ono w wyniku chaotycznego ruchu cieplnego cząstek tego ciała.
Widmowy rozkład promieniowania cieplnego charakteryzuje *zdolność emisyjna*:

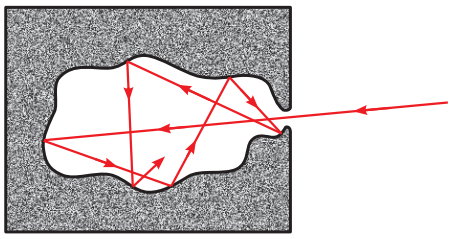
$$E_{v,T} = \frac{dW_e}{dv} \tag{1.04}$$

którą należy rozumieć jako moc promieniowania wysyłanego z jednostki powierzchni ciała w przedziale częstości $(v; v + dv)$. Jednostka: $\mathrm{J/m^2}$. Różne ciała pochłaniają w różnym stopniu energię padających na nie fal elektromagnetycznych. Rozkład widmowy pochłaniania określa *zdolność absorpcyjna*:

$$A_{v,T} = \frac{dW_a}{dW} \tag{1.05}$$

$E_{v,T}$ oraz $A_{v,T}$ zależą od częstości wysyłanych i pochłanianych fal, temperatury ciała, składu chemicznego i powierzchni ciała. Ciało jest doskonale czarne, gdy:

$$A_{v,T}{}^{czarn} = 1 \tag{1.06}$$



Zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego (CDC) zależy tylko od v i temperatury T ciała. W dalszym ciągu zajmiemy się właściwościami promieniowania ciała doskonale czarnego. Niektóre ciała rzeczywiste mają własności zbliżone do CDC. Np. w zakresie widzialnym zdolność absorpcyjna sadzy, czerni platynowej czy czarnego aksamitu jest bliska 1. Najbliższym ideału CDC jest niewielki otwór w nieprzezroczystej ściance zamkniętego naczynia.

Przykład ten wyjaśnia dlaczego wąskie wejście do pieczary czy otwarte okna domu wydają się z zewnątrz czarne, choć wewnątrz jest jasno dzięki światłu odbitemu od ścian.
Badania promieniowania ciała doskonale czarnego rozpoczął w 1859 roku *Robert Kirchoff*, poprzednik *Plancka* jako profesor fizyki w Berlinie. Do roku 1890 kilku fizyków zarówno eksperymentatorów, jak i teoretyków badało rozkład widmowy promieniowania.
Okazuje się, że istnieje uniwersalny związek między zdolnością emisyjną i absorpcyjną dowolnego ciała nieprzezroczystego, Nosi on nazwę *prawa Kirchoffa* w formie różniczkowej i dany jest zależnością:

$$\mathcal{E}_{\upsilon,T} = \frac{E_{\upsilon,T}}{A_{\upsilon,T}} \tag{1.07}$$

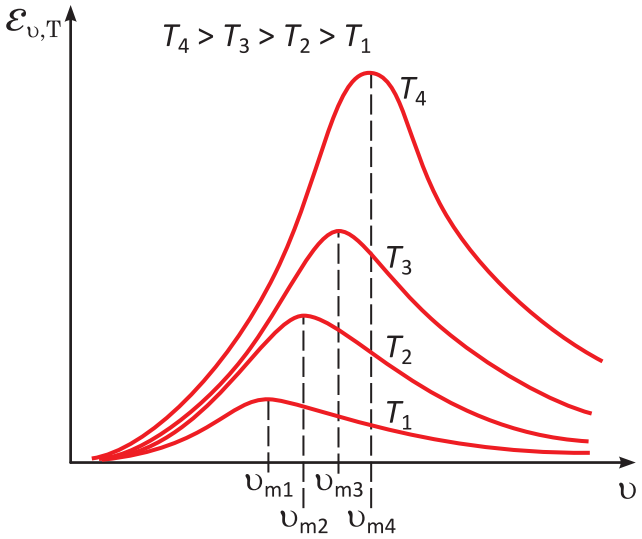
i wyraża fakt, że stosunek zdolności emisyjnej do absorpcyjnej nie zależy od materiału ciała, jest równy zdolności emisyjnej CDC i jest funkcją wyłącznie temperatury i częstości. $\mathcal{E}_{\upsilon,T}$ nazywa się *funkcją Kirchoffa*. W wielu wypadkach konieczna jest znajomość całkowitej mocy promieniowania cieplnego wysyłanej z powierzchni ciała. Tę wielkość nazywamy świetlnością energetyczną lub całkowitą zdolnością emisyjną ciała doskonale czarnego:

$$E_T = \int_0^\infty \mathcal{E}_{\upsilon,T}\, d\nu \tag{1.08}$$

Z *prawa Kirchoffa* wynika, że znajomość *funkcji Kirchoffa* jest bardzo ważna. Początkowo, w roku 1884 *Boltzmann* wykazał, że całkowita zdolność emisyjna CDC jest proporcjonalna do T^4.

$$E_T = \sigma T^4 \tag{1.09}$$

Jest to *prawo Stefana-Boltzmana*. σ jest współczynnikiem, którego wartość wyznaczono doświadczalnie. $\sigma = 5{,}67\ 10^{-8}\ W/m^2 deg^4$. Znacznie trudniejsze okazało się znalezienie funkcji Kirchoffa, czyli rozkładu widmowego promieniowania ciała doskonale czarnego.



Rozwiązanie tego problemu wymagało zastosowania metod wykraczających poza teorię promieniowania cieplnego i odegrało dużą rolę w dalszym rozwoju fizyki. Stało się to możliwe dopiero przy założeniu kwantowego charakteru promieniowania i pochłaniania energii przez atomy i cząsteczki.
Szereg uczonych prowadziło pierwotnie poszukiwana jawnej postaci *funkcji Kirchoffa* na drodze klasycznej. Należeli do nich m.in. *Michelson* (1887), *Wien* (1893) oraz *Rayleigh* i *Jeans*. Doświadczenia wykazały, że zależność $\mathcal{E}_{\upsilon,T}(\upsilon)$ ma postać jak na rysunku obok.

Dla małych częstości:

$$\mathcal{E}_{\upsilon,T} \sim \upsilon^2 T \tag{1.10}$$

Dla dużych częstości *Wien* odkrył, że zdolność emisyjna ma następującą postać:

$$\mathcal{E}_{\upsilon,T} \sim \upsilon^3 \cdot e^{-\frac{\alpha\upsilon}{T}} \tag{1.11}$$

W toku dalszych badań na drodze klasycznej otrzymał on następującą postać *funkcji Kirchoffa*:

$$\mathcal{E}_{\upsilon,T} \sim \upsilon^3 f\left(\frac{\upsilon}{T}\right) \tag{1.12}$$

Mimo, że podanie jawnej postaci funkcji $f\left(\frac{\upsilon}{T}\right)$ okazało się niemożliwe, z ostatniego związku otrzymano szereg ciekawych wniosków. Wynika stąd między innymi prawo Stefana-Boltzmana:

$$E_T = \int_0^\infty \upsilon^3 f\left(\frac{\upsilon}{T}\right) d\upsilon = T^4 \int_0^\infty \left(\frac{\upsilon}{T}\right)^3 f\left(\frac{\upsilon}{T}\right) d\left(\frac{\upsilon}{T}\right) = \sigma T^4 \tag{1.13}$$

A także tzw. prawo przesunięć Wiena opisujące położenie maximum $\mathcal{E}_{\upsilon,T}$ w funkcji T. W tym celu:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\upsilon,T}}{\partial \upsilon} = 3\upsilon^2 f\left(\frac{\upsilon}{T}\right) + \frac{\upsilon^3}{T} f'\left(\frac{\upsilon}{T}\right) = 0 \tag{1.14}$$

co zachodzi gdy:

$$3f\left(\frac{\upsilon}{T}\right) = \frac{\upsilon}{T} f'\left(\frac{\upsilon}{T}\right) \tag{1.15}$$

to zaś, gdy spełniony jest związek:

$$\frac{\upsilon_{\max}}{T} = b \tag{1.16}$$

gdzie b jest pierwiastkiem równania 1.15 zależnym od $\mathrm{f}\left(\frac{\upsilon}{T}\right)$. Ostatni związek – *prawo przesunięć Wiena*. Można je też zapisać w zależności od długości fali odpowiadającej maksymalnej wartości zdolności emisyjnej. W tym celu rozpatrzmy wyrażenie:

$$\mathcal{E}_{\lambda,T} = \frac{dW_{prom}}{d\lambda} \tag{1.17}$$

I zauważmy, że

$$\mathcal{E}_{\lambda,T} = \mathcal{E}_{\nu,T} \left|\frac{d\upsilon}{d\lambda}\right| \tag{1.18}$$

Ponieważ

$$\upsilon = \frac{c}{\lambda}, \qquad \frac{d\upsilon}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \tag{1.19}$$

To

$$\mathcal{E}_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda^2} \mathcal{E}_{\upsilon,T} \tag{1.20}$$

Podstawienie do równania x daje:

$$\mathcal{E}_{\lambda,T} = \frac{c^4}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right) \tag{1.21}$$

Z warunku max. obliczymy λ_{max} odpowiadające maksymalnej zdolności emisyjnej jak poprzednio i mamy:

$$\lambda_{max} = \frac{b_\lambda}{T} \tag{1.22}$$

Jest to druga postać *prawa przesunięć Wiena*. Z doświadczenia wynika $b_\lambda = 0{,}002898\ \mathrm{mK}$.
Z prawa tego wynika, że przy obniżaniu T ciała doskonale czarnego maksimum jego energii promieniowania przesuwa się ku falom dłuższym.
Szczególnie istotne w zakresie dalszych badań metodami fizyki klasycznej były *prawa Rayleigha* i *Jeansa*. Oparli się oni na wniosku wynikającym z równań Maxwella, że promieniowanie czarne w zamkniętym naczyniu można traktować jako równoważne nieskończonej liczbie oscylatorów harmonicznych nieoddziałujących ze sobą. Rozpatrując stany równowagi takich promieniujących oscylatorów otrzymali oni metodą fizyki statystycznej wyrażenie na *funkcję Kirchoffa*:

$$\mathcal{E}_{\upsilon,T} = \frac{2\pi\upsilon^2}{c^2} \cdot \langle \mathcal{E}_\upsilon \rangle \tag{1.23}$$

gdzie $\langle \mathcal{E}_\upsilon \rangle$ średnia w czasie wartość energii $\mathcal{E}_\upsilon$ oscylatora o częstości własnej υ w temperaturze T. $\langle \mathcal{E}_\upsilon \rangle$ można łatwo znaleźć posługując się zasadą ekwipartycji energii. Stąd:

$$\mathcal{E}_T = \int_0^\infty \mathcal{E}_{\upsilon,T}\, d\upsilon = \frac{2\pi kT}{c^2} \int_0^\infty \upsilon^2\, d\upsilon = \infty \tag{1.24}$$

Tymczasem z *prawa Stefana-Boltzmana* wynika, że E_T w danej temperaturze ma wartość skończoną. Otrzymany wniosek z wyniku *Rayleigha* i *Jeansa* nazywa się dlatego katastrofą w nadfiolecie (w zakresie dużych częstości promieniowania). Prace Rayleigha i Jeansa jednoznacznie wskazały, że stosowanie metod fizyki klasycznej w badaniu rozkładu widmowego ciała doskonale czarnego daje wyniki sprzeczne z zasadą zachowania energii.

Hipoteza i wzór Plancka

Wyjaśnienie tych sprzeczności i katastrofy w nadfiolecie podał w 1900 roku *Planck*. W hipotezie Plancka energia oscylatora może przybierać tylko określone nieciągłe wartości, równe całkowitej liczbie elementarnych porcji energii, zwanych kwantami energii $\mathcal{E}_\nu = n\mathcal{E}_0$. W związku z tym promieniowanie i pochłanianie energii przez atomy i cząsteczki zachodzi także kwantowo. Przy tym założeniu Planck otrzymał następujące wyrażenie na średnią wartość energii oscylatora, a następnie na wartość emisyjną ciała doskonale czarnego:

$$\langle \mathcal{E}_\nu \rangle = \frac{\mathcal{E}_0}{e^{\frac{\mathcal{E}_0}{kT}} - 1} \tag{1.25}$$

Po podstawieniu do 1.23 mamy:

$$\mathcal{E}_{\nu,T} = 2\pi \frac{\nu^2}{c^2} \frac{\mathcal{E}_0}{e^{\frac{\mathcal{E}_0}{kT}} - 1} \tag{1.26}$$

gdzie $\mathcal{E}_0 = h\nu$ określa wielkość kwantu energii. Zależność ta jest zgodna z wynikami pomiaru rozkładu energii w widmach promieniowania ciała doskonale czarnego w różnych temperaturach. Ze wzoru Plancka łatwo jest wyprowadzić zarówno wzory RJ, prawo Stefana-Boltzmana, jak i prawo przesunięć Wiena.

Wyprowadzenie wzoru Rayleigha-Jeansa

W tym celu należy rozwinąć w szereg poniższe wyrażenie:

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \frac{h\nu}{kT} + \frac{1}{2!}\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^3 + \cdots \tag{1.27}$$

Przy warunku

$$h\nu \ll kT \tag{1.28}$$

Mamy:

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \approx \frac{h\nu}{kT} \tag{1.29}$$

i otrzymujemy wzór Rayleigha-Jeansa:

$$\mathcal{E}_{\nu,T} = 2\pi \frac{\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} = 2\pi \frac{\nu^2}{c^2} \mathrm{kT} \tag{1.30}$$

Natomiast w obszarze dużych częstości, gdy:

$$h\nu \gg kT \tag{1.31}$$

można pominąć jedynkę w mianowniku wzoru Plancka i otrzymujemy *wyrażenie Wiena:*

$$\mathcal{E}_{\nu,T} \approx 2\pi \frac{h}{c^2} \nu^3 \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}} \tag{1.32}$$

Prawo Stefana-Boltzmana:

Wystarczy obliczyć:

$$\mathcal{E}_T = \int_0^\infty 2\pi \frac{\nu^2}{c^2} \frac{\mathcal{E}_0}{e^{\frac{\mathcal{E}_0}{kT}} - 1} d\nu \tag{1.33}$$

Wprowadzając dla uproszczenia nową zmienną x:

$$x = \frac{h\nu}{kT}\text{, mamy dx} = \frac{h}{kT}d\nu \text{ czyli } d\nu = \frac{kT}{h}dx \tag{1.34}$$

Stąd:

$$\mathcal{E}_T = 2\pi\frac{k^4}{c^2h^3}T^4\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} = \sigma T^4 \tag{1.35}$$

Ponieważ:

$$\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15} \tag{1.36}$$

Można było w ten sposób wyznaczyć po raz pierwszy wartość stałej Plancka:

$$h = 6{,}625\cdot 10^{-34}J\cdot s \tag{1.37}$$

Prawo przesunięć Wiena:
Wynika po obliczeniu pochodnej z wyrażenia na zdolność emisyjną i przyrównaniu do 0.
Zapiszmy zdolność emisyjną jako:

$$\mathcal{E}_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda^2}\mathcal{E}_{\nu,T} = \frac{2\pi c^2h}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1} \tag{1.38}$$

Stąd:

$$\frac{\partial\mathcal{E}_{\lambda,T}}{\partial\lambda} = \frac{2\pi c^2h}{\lambda^6 e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1}\left[\frac{hc}{kT\lambda}\frac{e^{\frac{hc}{kT\lambda}}}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1}-5\right] \tag{1.39}$$

Przy wprowadzeniu zmiennej:

$$x = \frac{hc}{kT\lambda} \tag{1.40}$$

Na maksimum mamy warunek:

$$xe^x - 5e^x + 5 = 0 \tag{1.41}$$

To równanie posiada jeden pierwiastek $x = 4{,}965$. Zatem otrzymujemy prawo przesunięć Wiena w postaci:

$$\lambda_{max}T = \frac{hc}{4{,}965k} \tag{1.42}$$

Zastosowania i ciekawostki:
Pirometria optyczna – zbiór metod pomiarów wysokich temperatur opartych na obserwowaniu zależności zdolności emisyjnej badanego ciała od temperatury, np. dla rozżarzonych ciał czy gwiazd.

Konstrukcja źródeł światła (np. lampy łukowe: lampy żarowe z włókien wolframowych) Źródła światła charakteryzują skład widmowy promieniowania oraz sprawność świetlna (strumień światła / moc pobieraną ze źródła, jednostka lm/W).

Promieniowanie reliktowe – promieniowanie szczątkowe (promieniowanie tła), promieniowanie elektromagnetyczne o rozkładzie widmowym ciała doskonale czarnego o temperaturze 2,732 K wypełniające Wszechświat, a nie pochodzące od gwiazd, galaktyk i materii rozproszonej; prawdopodobnie pozostałość po wczesnych etapach ewolucji Wszechświata; odkryte w 1965 przez *A. A. Penziasa* i *R. W. Wilsona*; badane przez satelitę *COBE*.

Ciało nazywamy szarym, gdy:

$$A^{szar}{}_{\nu,T} = A_T \tag{1.43}$$

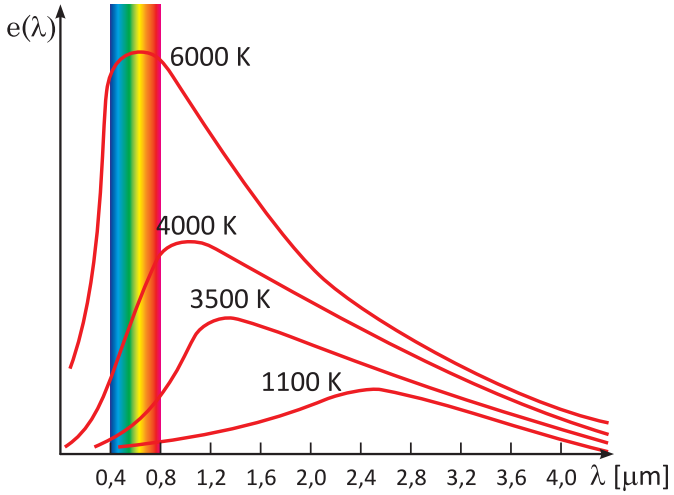
Całkowita zdolność emisyjna ciała szarego:

$$E_T = \alpha \varepsilon_T \tag{1.44}$$

gdzie:

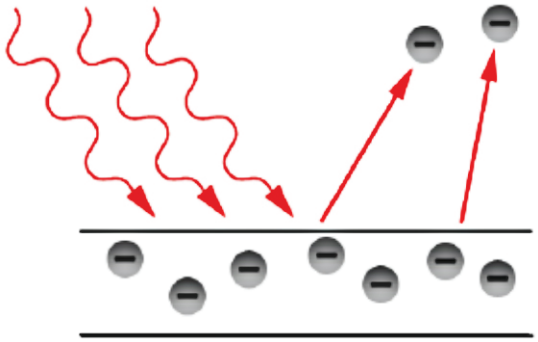
$$\alpha = \frac{\int_0^\infty A_{\nu,T}\varepsilon_{\nu,T}d\nu}{\int_0^\infty \varepsilon_{\nu,T}d\nu} \tag{1.45}$$

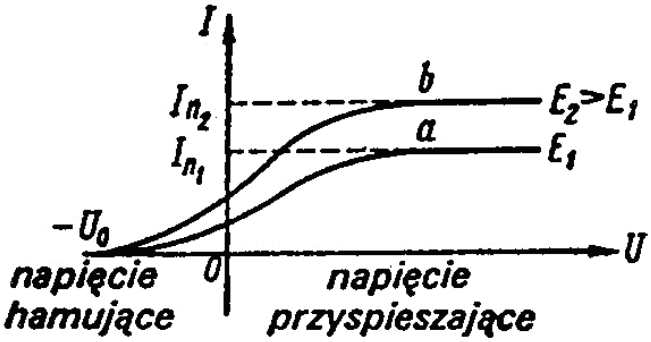
Jest stopniem czarności ciała zależnym od T, stanu chemicznego i powierzchni ciała. Dla ciała doskonale czarnego $\alpha = 1$, dla ciał przezroczystych nie pochłaniających i nie promieniujących fal elektromagnetycznych $\alpha = 0$.



Zjawisko wybijania przez światło elektronów z ciał stałych i cieczy zostało nazwane zjawiskiem fotoelektrycznym zewnętrznym. Występowanie prądu fotoelektrycznego w zakresie ujemnych napięć wynika z tego, że fotoelektrony wybite z katody przez kwanty światła mają początkową energię kinetyczną różną od zera, mogą jej kosztem wykonać pracę w hamującym polu elektrycznym i osiągnąć anodę.

$$\frac{mV^2{}_{max}}{2} = eU_0 \tag{2.01}$$



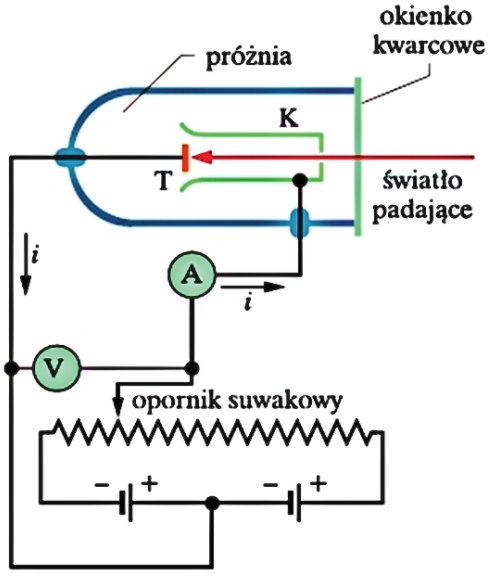


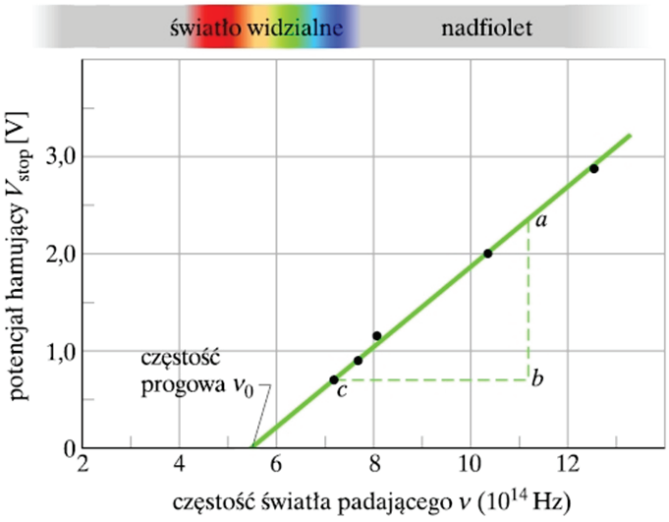
Przy wyjściu z metalu elektron musi wykonać pracę wyjścia A. W wyniku pochłonięcia fotonu elektron osiąga energię hv. Dla $hv > A$ może wykonać pracę wyjścia i opuścić metal.

$$\frac{mV^2{}_{max}}{2} = hv - \mathrm{A} \tag{2.02}$$

$$v_0 = \frac{A}{h} \tag{2.03}$$

Z równania tego można łatwo wyznaczyć częstość graniczną dla zjawiska fotoelektrycznego.



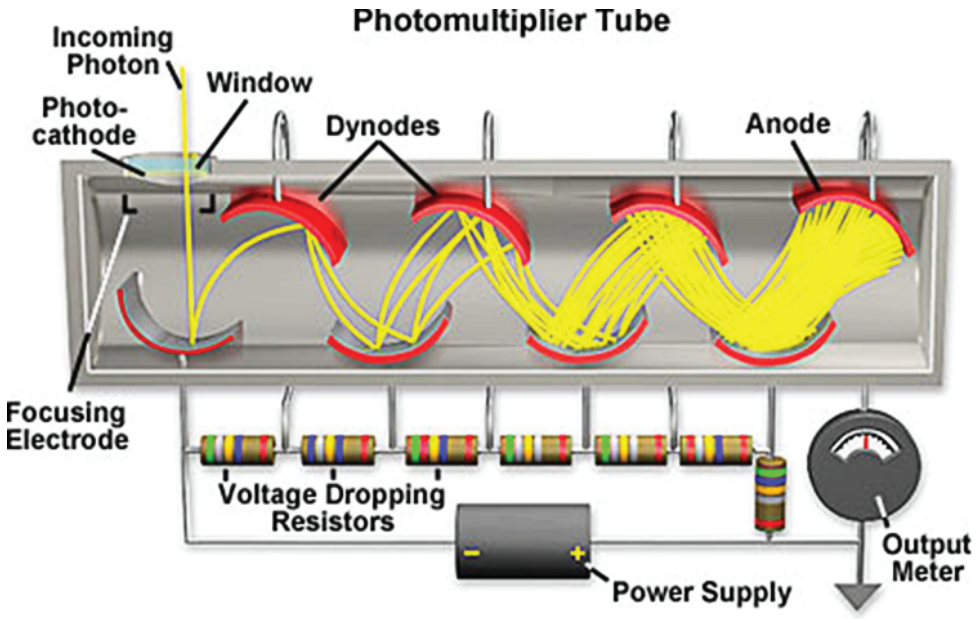


W wyniku doświadczeń ustalono następujące prawa rządzące zjawiskiem fotoelektrycznym:

1) Największa prędkość początkowa fotoelektronów określona jest częstością światła i nie zależy od jego natężenia.
2) Dla każdego materiału istnieje najmniejsza częstość światła, poniżej której efekt fotoelektryczny nie zachodzi.
3) Liczba fotoelektronów n wybijanych z katody w jednostce czasu jest proporcjonalna do natężenia światła.
4) Zjawisko fotoelektryczne nie wykazuje mierzalnej bezwładności.

Wszystkie te prawidłowości nie dają się wytłumaczyć na gruncie fizyki klasycznej.

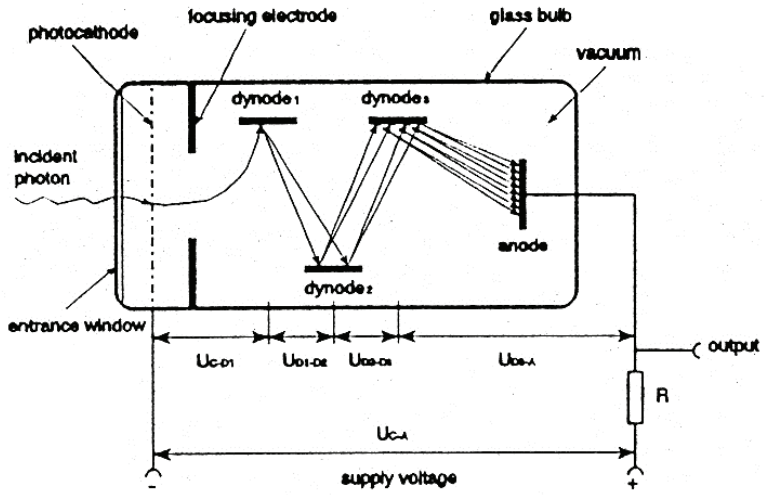
Zastosowanie: fotopowielacz

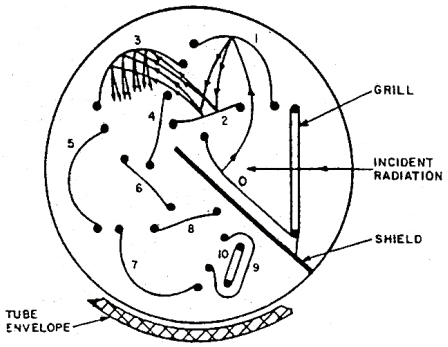


Budowa i zasada działania fotopowielacza

Zastosowanie: fotopowielacz

Typu: head-on (czołowy)

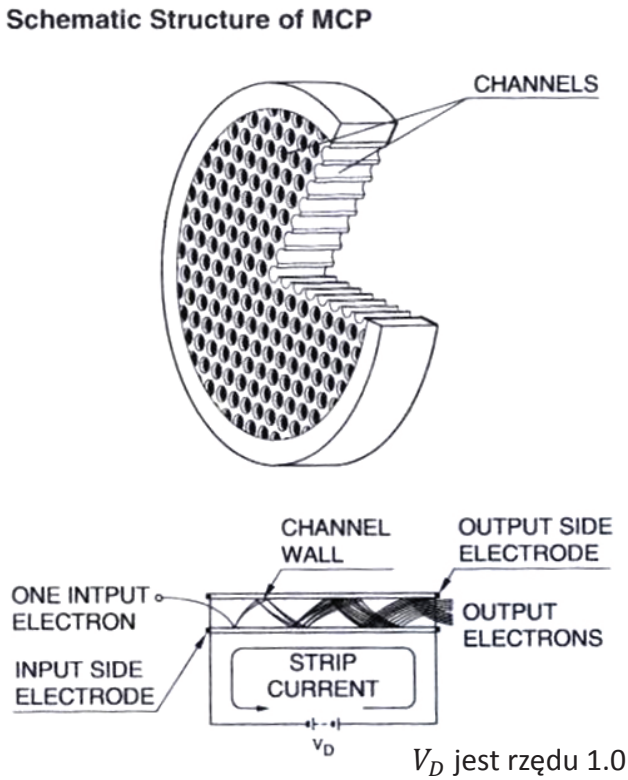




Typu: side-on (boczny)

Budowa i zasada działania fotopowielacza

Zastosowanie: fotopowielacz



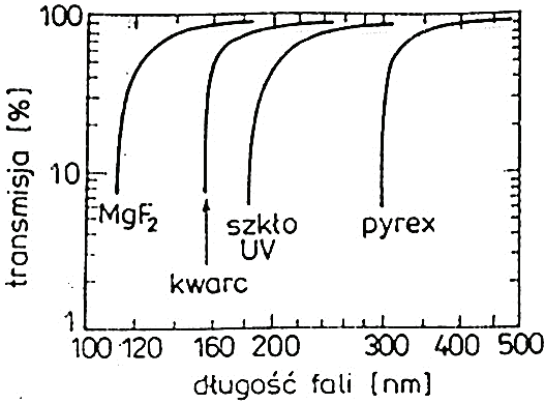
V_D jest rzędu 1.0 do 1.5 kV

Budowa i zasada działania fotopowielacza typu MCP (MicroChannel Plate)

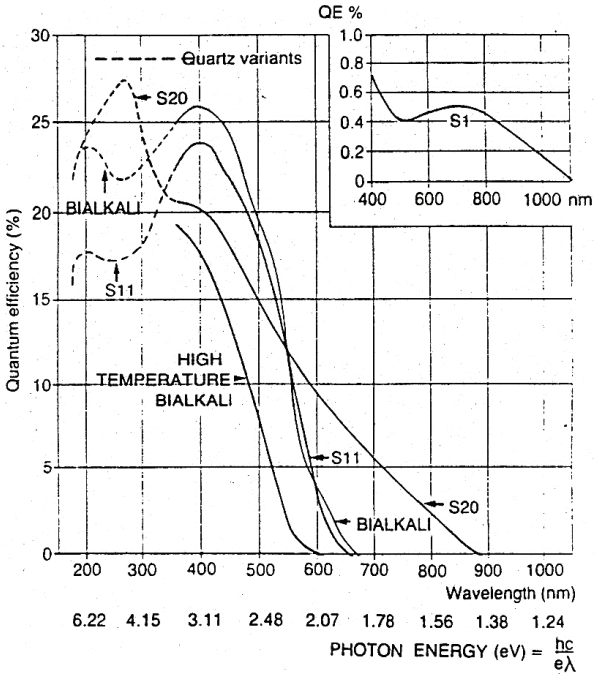
Zastosowanie: fotopowielacz

Elementy składowe fotopowielacza (każdego typu)

Okienko wlotowe – ma zasadniczy wpływ na czułość spektralną fotopowielacza, ponieważ decyduje o przepuszczalności fotonów do fotokatody (obszar w którym detektor „widzi" padające nań fotony)



Fotokatoda – ma również zasadniczy wpływ na czułość spektralną (obszar w którym padające nań fotony zostaną zamienione na fotoelektrony)

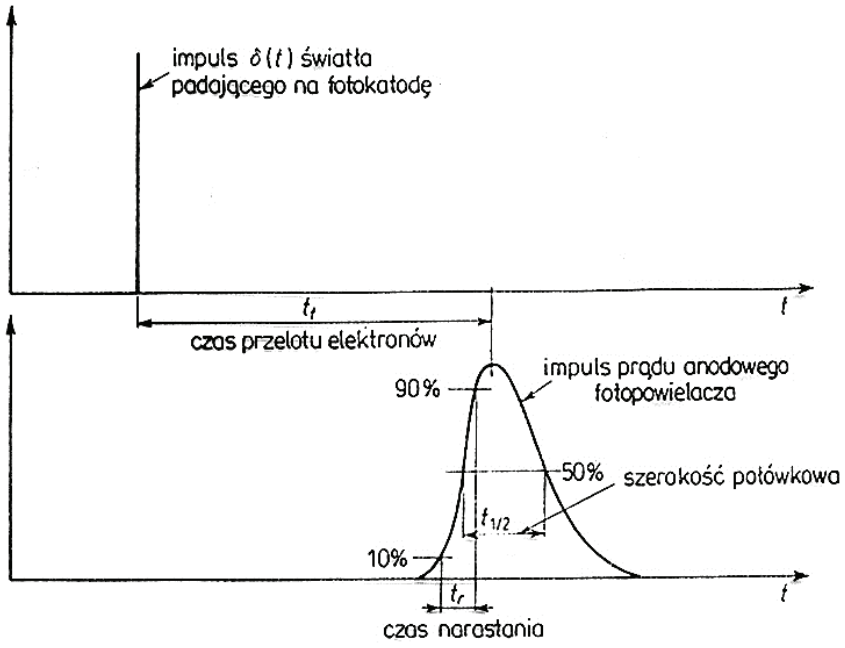


Zastosowanie: fotopowielacz

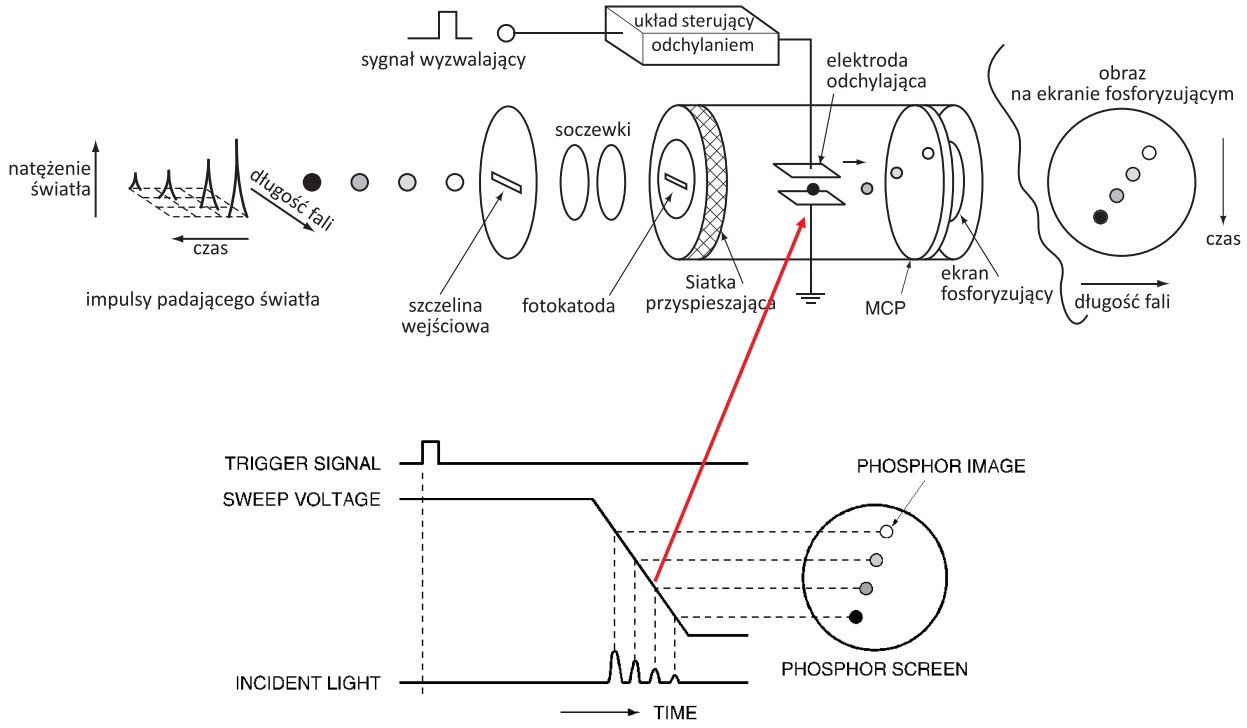
Parametry czasowe fotopowielacza

- *Czas przelotu fotoelektronów*
- *Czas narastania impulsu*
- *Szerokość połówkowa*

Układ dynod (powielacza elektronowego) – ma zasadniczy wpływ na parametry czasowe

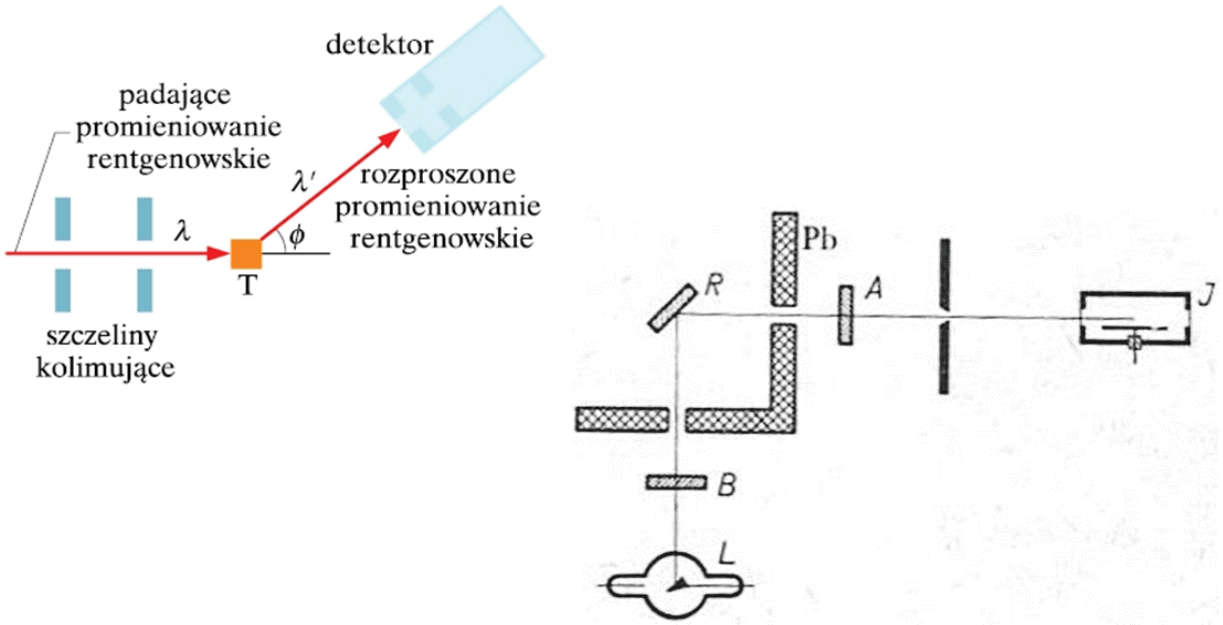


Zastosowanie: kamera smugowa (streak-camera)



Efekt Comptona

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$



Schemat aparatury Comptona (rysunek z prawej strony). Wiązka promieniowania rentgenowskiego o długości fali $\lambda = 1{,}71\ pm$ pada na grafitową tarczę T. Rozproszone promieniowanie rentgenowskie jest obserwowane pod różnymi kątami względem wiązki padającej. Natężenie wiązki rozproszonej oraz jej długość fali mierzone są przez detektor.

Obserwowane prawidłowości promieniowania Comptona są niezrozumiałe w ramach falowego obrazu promieni Rentgena. W obrazie kwantowym

$$E = h\nu \tag{2.04}$$

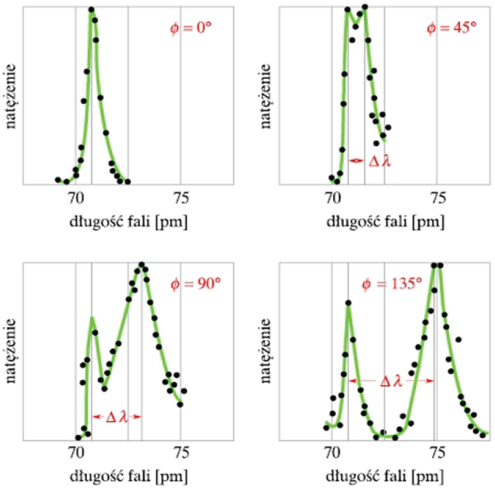
Zgodnie z teorią względności fotonowi można przypisać masę

$$m = \frac{h\nu}{c^2} \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \qquad \beta = \frac{v}{c} \tag{2.05}$$

Pęd fotonu:

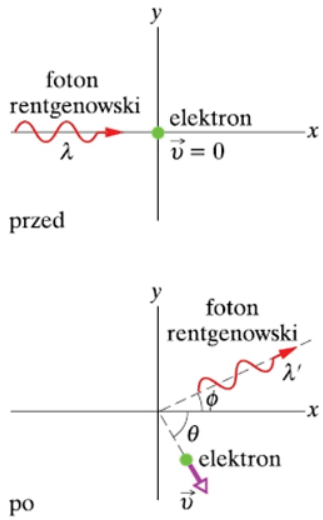
$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \mathrm{h}\tilde{\nu} \tag{2.06}$$

Wyniki doświadczenia Comptona dla czterech wartości kąta rozpraszania ϕ. Zauważ, że przesunięcie comptonowskie $\Delta\lambda$ zwiększa się wraz z kątem rozpraszania.



Prędkość fotonu w próżni wynosi c, czyli foton nie ma masy spoczynkowej.

Zjawisko Comptona można traktować jako efekt zderzenia sprężystego fotonu i elektronu wewnątrzatomowego. Dla atomów pierwiastków lekkich energie wiązania są wyraźnie mniejsze od energii fotonów promieniowania rentgenowskiego. Stąd w pierwszym przybliżeniu można zaniedbać energię wiązania elektronów i traktować je jako swobodne o początkowej energii = 0.



Foton promieniowania rentgenowskiego o długości fali λ oddziałuje z nieruchomym elektronem. Zostaje on rozproszony pod kątem ϕ i jego długość fali λ' się zwiększyła. Elektron porusza się po zderzeniu z prędkością v pod kątem θ.

Zasada zachowania energii i pędu w zjawisku Comptona.

$$h\nu = h\nu' + E_k \tag{2.07}$$

$$E_k = mc^2(\gamma - 1) \tag{2.08}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{2.09}$$

$$h\nu = h\nu' + mc^2(\gamma - 1) \tag{2.10}$$

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} + mc(\gamma - 1) \tag{2.11}$$

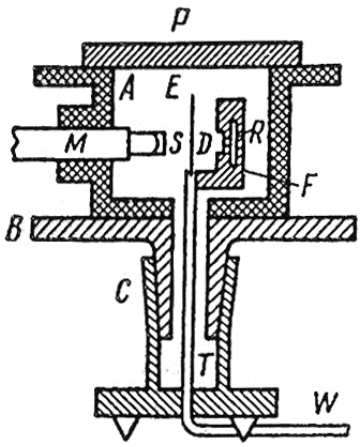
$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\phi + \gamma mv\cos\theta \qquad (oś\ x) \tag{2.12}$$

$$0 = \frac{h}{\lambda'}\sin\phi + \gamma mv\sin\theta \qquad (oś\ y) \tag{2.13}$$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi) \ \text{ przesunięcie comptonowskie} \tag{2.14}$$

Doświadczenie Rutherforda

Rutherford badał w 1911 roku rozpraszanie cząstek α przechodzących przez cienkie folie metalowe.



Sz. Szczeniowski „Fizyka doświadczalna V Fizyka atomu", PWN Warszawa 1976

Doświadczenia Rutherforda wykazały, że oprócz cząstek α nieznacznie odchylonych od ich pierwotnego kierunku obserwuje się wyraźnie mniejszą liczbę cząstek odchylonych o znaczne kąty (130-150 stopni). Tak duże odchylenia nie mogły być wynikiem nałożenia się kilku małych kolejnych odchyleń. Potwierdziło to hipotezę, że cały dodatni ładunek jest w jego jądrze i zajmuje bardzo małą objętość w porównaniu do objętości atomu.

Z doświadczenia Rutherforda można było oszacować górną granicę r_0 rozmiaru jądra.
Jeśli zderzenie cząstki α i jądra jest centralne i następuje rozproszenie pod kątem 180 stopni to z prawa zachowania energii:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(2e)(Ze^2)}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \tag{3.01}$$

r_0 – minimalna odległość między cząstką α a jądrem.

Podstawiając dane doświadczalne:

$1{,}9 \cdot 10^7\ m/s$, Z = 79 (złoto), $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 6{,}5 \cdot 10^{-27} kg$

dostajemy: $r_0 = 3{,}1 \cdot 10^{-14} m$.

Widmo atomu wodoru

Współczesne metody oceny rozmiarów jąder dają rząd 10^{-15}m. Na podstawie swoich doświadczeń *Rutherford* zaproponował tzw. *jądrowy model atomu*.

Liniowe widmo atomu wodoru

Świecące gazy wysyłają liniowe widma emisyjne. Podobnie liniowe są widma absorpcyjne gazów. Balmer badając widmo atomów wodoru podał wzór na liczby falowe (albo długości fal) kolejnych linii tego pasma:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{3.02}$$

gdzie $R' = 10967758\ 1/m$ nazywa się stałą Rydberga, zaś n liczba naturalna > 2. Wzór *Balmera* odegrał istotną rolę w kształtowaniu poglądów na budowę atomu. Z (3.02) wynika, że wszystkie linie dla różnych n tworzą grupę linii nazywaną serią *Balmera*. Dla $n \to \infty$ otrzymujemy granicę serii n *Balmera*.
Rydberg odkrył występowanie serii widmowych dla innych pierwiastków. Stwierdził, że częstości wszystkich linii danej serii spełniają zależność:

$$\nu = T(n_2) - T(n_1) \tag{3.03}$$

gdzie n_1, n_2 - pewne liczby całkowite. $T(n_1)$, $T(n_2)$ – termy widmowe. Dla określonej serii n_2 jest stałe. Zmiana $n_1$daje wszystkie linie tej serii.

Zasada kombinacji Ritza

Częstości linii widmowych dowolnego atomu mogą być przedstawiane w postaci różnicy dwóch termów; zestawiając różne kombinacje termów można znaleźć wszystkie możliwe częstości linii widma tego atomu.
Z tej zasady wynika, że w widmie atomu wodoru oprócz serii *Balmera* powinny wystąpić inne serie.

Istotnie wkrótce odkryto:
– serię *Paschena* (podczerwień)

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{3.04}$$

– serię *Lymana*

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{3.05}$$

– serię *Bracketta* (daleka podczerwień)

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{3.06}$$

– serię *Pfunda*

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{3.07}$$

oraz serię *Humpreysa*

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{3.08}$$

Wszystkie te wzory można zestawić w jedną formułę

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{3.09}$$

gdzie dla danej serii $n = m + 1, m + 2, m + 3$ itd. Przy $n \to \infty$ częstości graniczne $\to R/m^2$.
Liczby m i n są liczbami kwantowymi opisującymi poziomy energetyczne atomu wodoru.

Teoria Bohra układów wodoropodobnych
Teoria ta miała tłumaczyć wyniki doświadczalne otrzymane dla widm liniowych atomu wodoru, uwzględniać zalety *modelu Rutherforda* oraz aktualną wiedzę o procesach pochłaniania i emisji światła.

Założenia *Bohra*:
1) Istnieją stany stacjonarne atomu, w których nie wypromieniowuje on energii (warunek stanów stacjonarnych)
2) Moment pędu elektronu atomu znajdującego się w stanie stacjonarnym jest całkowitą wielokrotnością $h/2\pi$ (zasada kwantowania orbit)

$$L_n = mvr = \frac{nh}{2\pi} \tag{3.10}$$

3) Przy przechodzeniu atomu z jednego stanu stacjonarnego do innego stanu stacjonarnego zostaje wyemitowany lub pochłonięty kwant energii

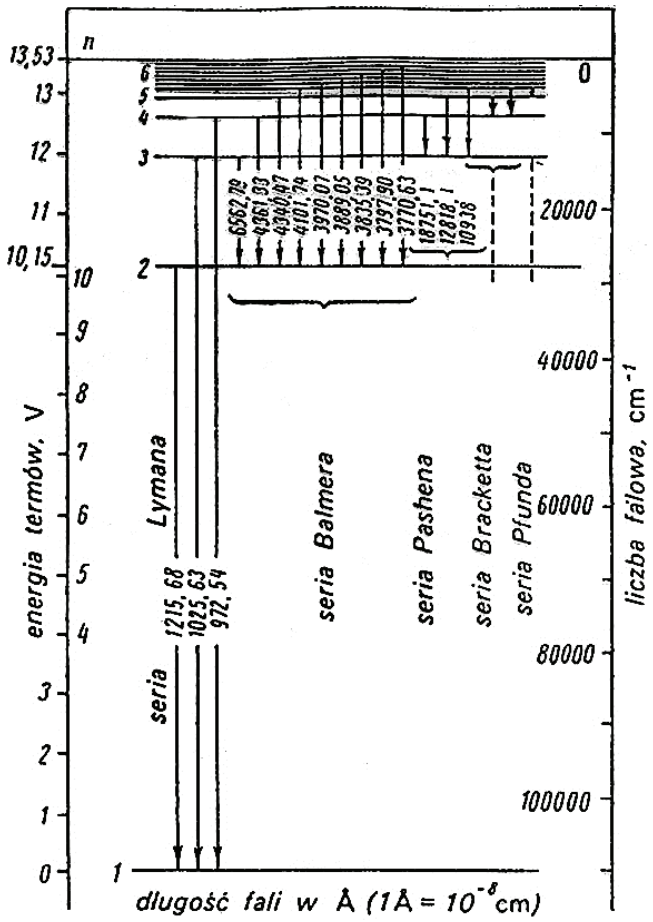
$$W_n - W_m = h\nu_{nm} \tag{3.11}$$

W_n, W_m – energie atomu w dwóch stanach stacjonarnych. Gdy $W_n < W_m$ mamy absorpcję, zaś gdy $W_n > W_m$ – emisję kwantu promieniowania.
Wartość energii atomu W_n w stanie stacjonarnym ma postać:

$$W_n = -\frac{Rh}{n^2} \tag{3.12}$$

zaś term widmowy:

$$T_n = \frac{|W_n|}{h} = \frac{Rh}{n^2} \tag{3.13}$$



G. K. Woodgate „Struktura atomu", PWN Warszawa 1974

Liczby całkowite n (n,m) występujące w (3.12) czy (3.09) określają skwantowane wartości energii atomu (poziomy energetyczne atomu wodoru). n nazywa się główną liczbą kwantową.

Z (3.12) wynika, że stany energetyczne atomu wodoru tworzą ciąg kolejnych poziomów energetycznych odpowiadających różnym wartościom n. Dla $n = 1$ mamy stan podstawowy. Dla $n \to \infty$ energia $W_\infty \to 0$, co odpowiada jonizacji atomu. Energia jonizacji z danego poziomu energetycznego W_n równa się energii wiązania elektronu na tym poziomie co do wartości bezwzględnej. Energia jonizacji $W_{jon} = e\varphi$ (φ – potencjał jonizacji). Stąd

$$\varphi = \frac{W_{jon}}{e} = \frac{Rh}{en^2} \qquad (3.14)$$

Dla stanu podstawowego atomu wodoru na potencjał jonizacji otrzymamy

$$\varphi = 13.53 \text{ eV}. \qquad (3.15)$$

Schemat poziomów energetycznych atomu wodoru przedstawia rysunek obok.

Drugi warunek kwantowy *Bohra* łącznie z (3.11) umożliwił obliczenie długości fal widma atomu wodoru oraz innych układów jednoelektronowych, a także wartości *stałej Rydberga*. Obliczenia te są zgodne z wynikami doświadczeń.

Bohr założył, że ruch elektronu odbywa się po orbicie kołowej wokół jądra o promieniu r dzięki działaniu siły kolumbowskiej przyciągania. Spełnia ona oczywiście rolę siły dośrodkowej:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (3.16)$$

co z uwagi na $v = \omega r$ można zapisać jako:

$$r^3 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m\omega^2} \qquad (3.17)$$

Korzystając z postulatu *Bohra* (3.10) i z (3.17) dostajemy:

$$r_n = n^2 \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m Z e^2} \qquad (3.18)$$

Dla atomu wodoru $Z = 1, n = 1$ i dostajemy $r_1 = a_0 \approx 0.53\text{Å}$.

Jest to promień pierwszej orbity elektronowej w atomie wodoru *Bohra*. Całkowita energia elektronu w atomie wodoropodobnym:

$$W = W_k + W_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (3.19)$$

Wstawiając (3.18) do (3.19) dostajemy:

$$W_n = \frac{1}{n^2}\frac{Z^2 m e^4}{8h^2 {\varepsilon_0}^2} \tag{3.20}$$

Porównując (3.12) i (3.20) uzyskujemy wartość *stałej Rydberga* dla atomu wodoru:

$$R_H = \frac{me^2}{8h^3 {\varepsilon_0}^2} \tag{3.21}$$

Dokładniejsze obliczenia uwzględniające ruch jądra prowadzą do zastąpienia w (3.21) masy elektronu m masą zredukowaną μ:

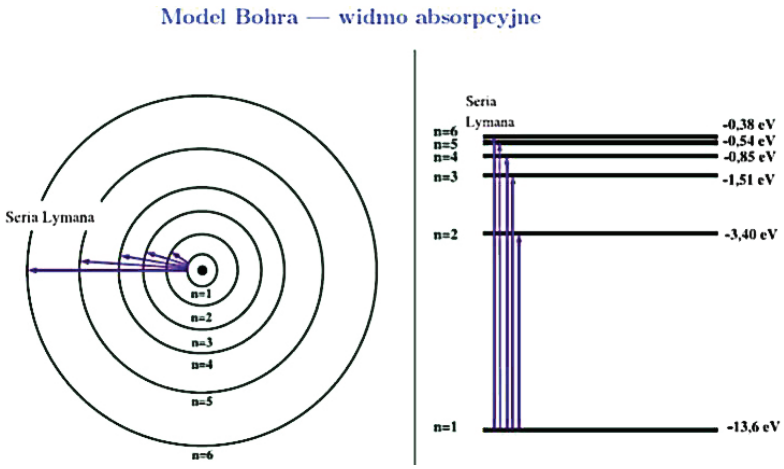
$$\mu = \frac{mM}{m+M} \tag{3.22}$$

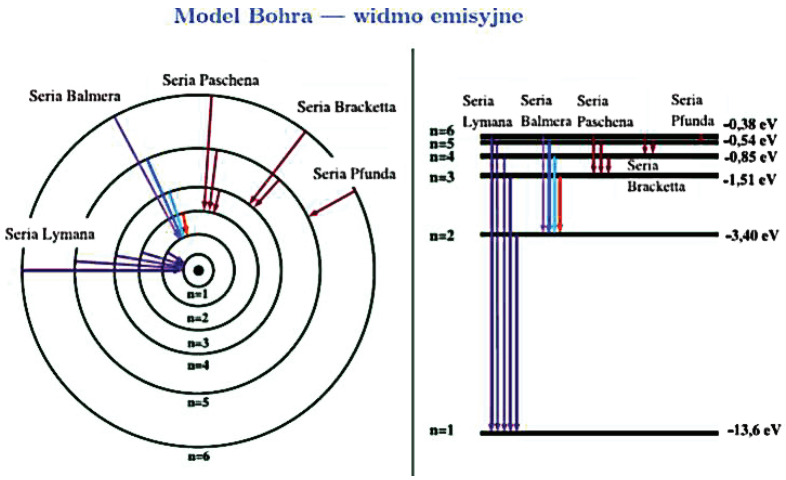
Dla atomu wodoru otrzymamy ostatecznie $R_H = 3{,}28805\ 10^{15}$ 1/s co zgadza się z wynikami badań spektroskopowych. Dla układów wodoropodobnych:

$$R_Z = Z^2 R_H = \frac{Z^2 m e^4}{8h^3 {\varepsilon_0}^2} \tag{3.23}$$

Zaś poziomy energetyczne układu wodoropodobnego określa formuła:

$$W_n = \frac{Z^2 Rh}{n^2} \tag{3.24}$$





Osiągnięcia i braki teorii Bohra:

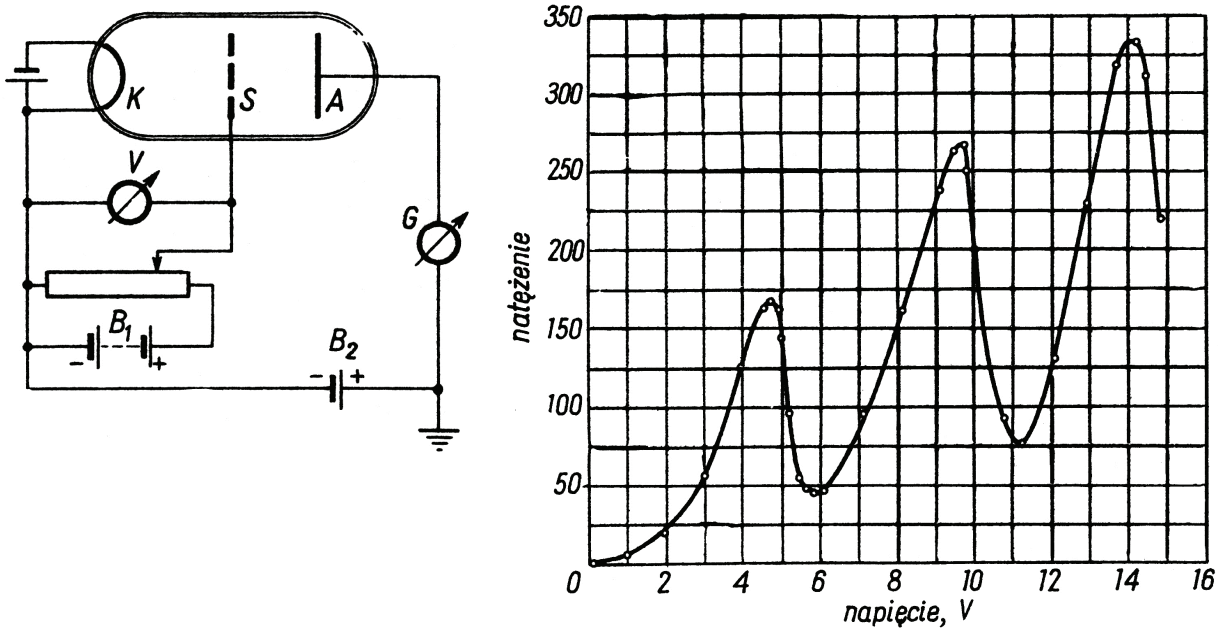
+ obliczenie *stałej Rydberga* dla układów wodoropodobnych
+ objaśnienie liniowej struktury widm atomów wodoropodobnych
+ wyznaczenie stosunku e/m i m_H/m
+ objaśnienie natury rentgenowskich widm charakterystycznych
+ objaśnienie normalnego zjawiska *Zeemana* (rozszczepienie linii w silnych polach magnetycznych

– Stan elektronu w układzie wodoropodobnym o większej liczbie stopni swobody nie mógł być opisany jedną liczbą kwantową. Liczb kwantowych powinno być tyle ile stopni swobody ma układ. W prostym przypadku orbity eliptycznej powinny być określone dwie liczby kwantowe.
– Teoria *Bohra* oparta była na mechanice klasycznej z dodatkiem warunków kwantowych i nie mogła wytłumaczyć i opisać szeregu obserwacji, np. natężeń linii widmowych, brak możliwości stworzenia modelu atomu helu (2 elektrony).

Następnym krokiem rozwoju fizyki stała się mechanika kwantowa.

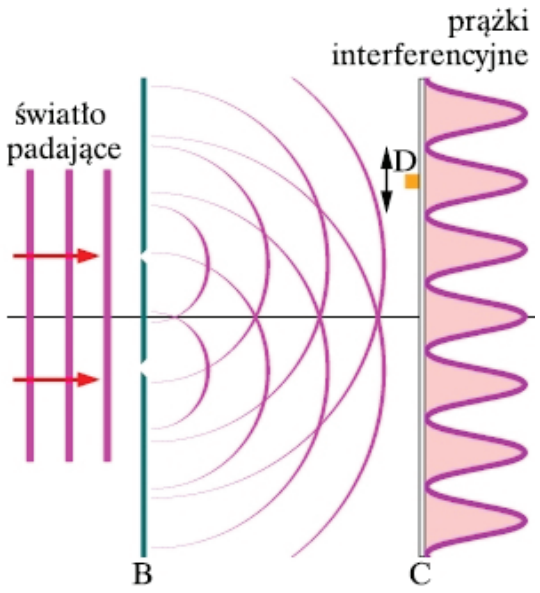
Doświadczenie Francka i Hertza

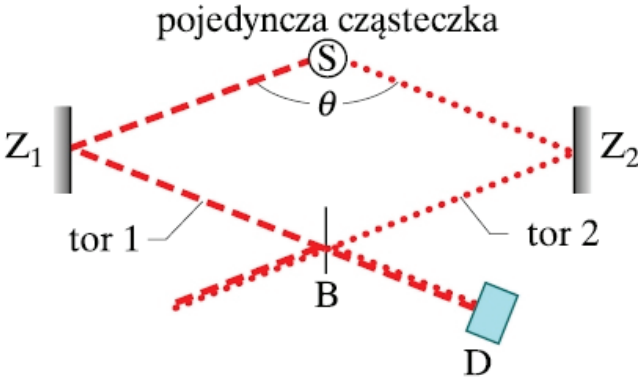
Istnienie stanów stacjonarnych atomów i trzeci warunek *Bohra* zostały potwierdzone w doświadczeniach *Francka* i *Hertza*, w których badano zderzenia elektronów z atomami gazów metodą potencjałów hamujących. Strumień elektronów przyspieszonych w polu elektrycznym przechodzi przez gaz i doznaje zderzeń z jego atomami.



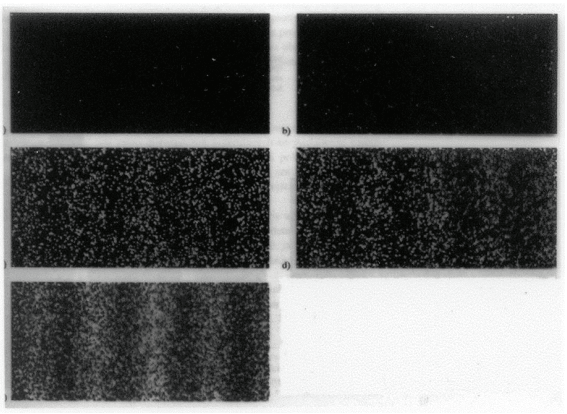
Sz. Szczeniowski „Fizyka doświadczalna V Fizyka atomu", PWN Warszawa 1976

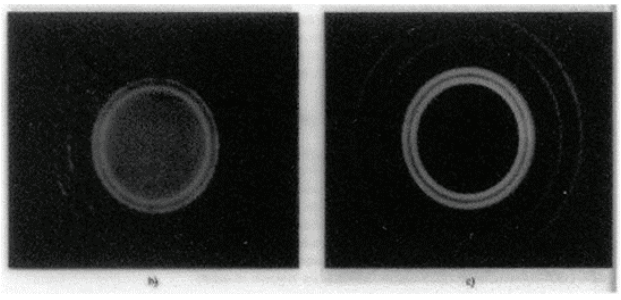
Dualizm korpuskularno-falowy

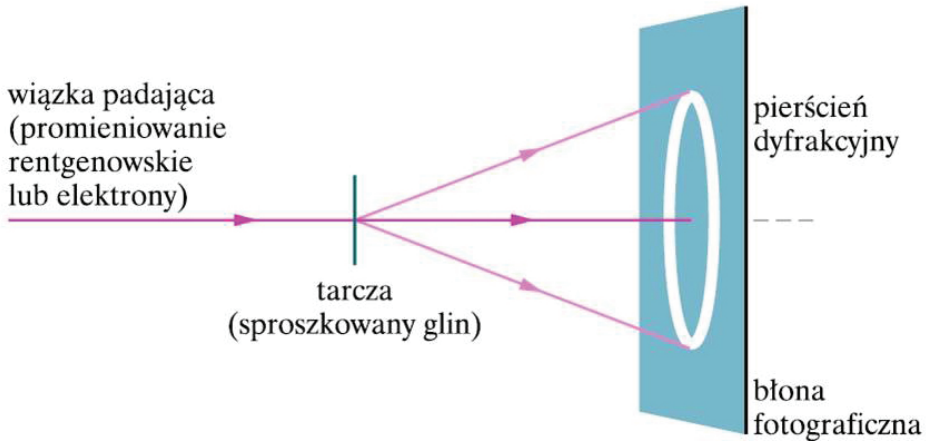




Fale materii (fale de Broglie'a)







Fale de Broglie'a

De Broglie uznał, że dualna korpuskularno-falowa natura jest właściwa nie tylko dla światła, ale i dla cząstek.

De Broglie uogólnił wyrażenie na pęd fotonu dla dowolnych cząsteczek:

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{3.25}$$

Dla cząstki o masie m poruszającej się z prędkością $v \ll c$ mamy:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{(2mW)^{1/2}} \tag{3.26}$$

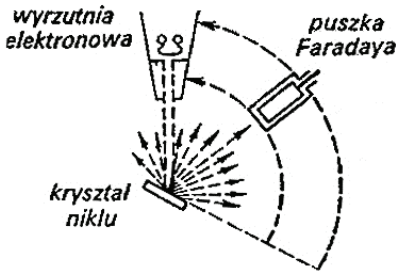
gdzie W – energia kinetyczna cząstki.

Dla elektronu przyspieszanego w polu elektrycznym o różnicy potencjałów $\Delta\varphi$ mamy:

$$W = \frac{mv^2}{2} = e\Delta\varphi \tag{3.27}$$

Korzystając z dwóch ostatnich wzorów i podstawiając wartości stałych uniwersalnych otrzymujemy wzór stosowany w obliczeniach praktycznych:

$$\lambda = \frac{12.25}{\sqrt{\Delta\varphi}}\text{Å} \tag{3.28}$$



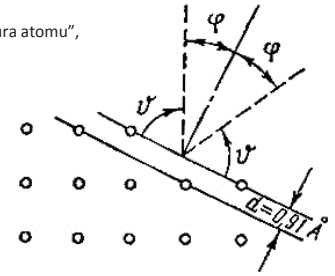
G. K. Woodgate „Struktura atomu", PWN Warszawa 1974

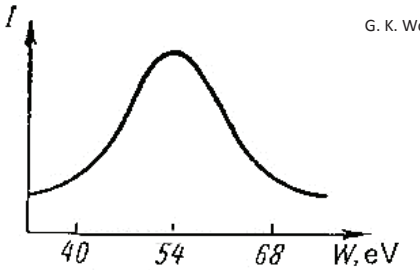
Hipoteza de Broglie'a została potwierdzona doświadczalnie przez *Davissona* i *Germera*, którzy badali rozpraszanie elektronów na monokryształe niklu.

Z punktu widzenia teorii klasycznej elektrony o dowolnej energii kinetycznej powinny być rozpraszane pod dowolnymi kątami zgodnie z prawami optyki geometrycznej. Jednak otrzymana w doświadczeniu zależność liczby rozproszonych elektronów pod kątem $\Theta = 65$ stopni od ich energii kinetycznej przedstawia rysunek poniżej po prawej stronie:

Wyniki tego doświadczenia wskazują, że rozpraszanie elektronów na monokryształe niklu przypomina odbijanie przez taki kryształ promieni rentgenowskich. *Wulf* i *Bragg* stwierdzili, że dyfrakcję promieni rentgenowskich w kryształach można rozpatrywać jako wynik ich odbicia od układu równoległych płaszczyzn krystalograficznych (płaszczyzna, w której znajdują się węzły siatki krystalicznej).

G. K. Woodgate „Struktura atomu", PWN Warszawa 1974





G. K. Woodgate „Struktura atomu", PWN Warszawa 1974

Różnica dróg optycznych δ między promieniami 1' i 2':

$$\delta = DE + DF = 2d\sin\vartheta \tag{3.29}$$

gdzie d – odległość między płaszczyznami sieciowymi, ϑ – kąt odbłysku.

Jeśli długość fali promieni rentgenowskich wynosi λ, to maksima dyfrakcyjne w promieniach odbitych spełniają warunek *Wulfa-Bragga*:

$$n\lambda = 2d\sin\vartheta \tag{3.30}$$

Na rysunku poniżej przedstawiono doświadczalne przebiegi natężenia wiązki elektronów rozproszonych odpowiadające określonym wartościom ich energii kinetycznej. Występowanie odbić elektronów dla określonych energii wiąże się z ich własnościami falowymi. λ wyznaczone z (3.28) oraz z (3.30) dla $n = 1$ są niemal identyczne. Zgodność ta ma miejsce także dla innych wartości energii i kątów rozpraszania.

Własności falowe elektronów zostały też potwierdzone m.in. przez *Thomsona* w doświadczeniach nad przepuszczaniem wiązek elektronów przez cienkie płytki polikrystaliczne. Z otrzymanych obrazów dyfrakcyjnych wykazano słuszność wzoru *de Broglie'a* i wyznaczono okres sieci krystalicznej metalu, przez który przechodziły elektrony.
Własności falowe można przypisać dowolnym cząstkom o masie m i prędkości v. Badając wiązki atomowe i cząsteczkowe *Stern* pokazał słuszność dla nich wzoru *de Broglie'a*. Niech prędkość cząsteczek w wiązce (prędkość najbardziej prawdopodobna w temperaturze T):

$$u_w = \sqrt{2\frac{RT}{\mu}} \tag{3.31}$$

μ – ciężar cząsteczkowy. Wtedy z (3.26):

$$\lambda = \frac{hN_A}{\sqrt{2RT\mu}} \tag{3.32}$$

gdyż $m = \mu/N_A$ Np. dla wodoru w $T = 360\text{K}, \lambda = 1{,}3\text{Å}$ a dla helu $\lambda = 0{,}9\text{Å}$.

Są to wartości porównywalne z długościami okresów sieci krystalicznej ciał stałych. W doświadczeniu *Sterna* mierzono natężenie wiązki atomów helu i cząsteczek wodoru rozproszonych pod różnymi kątami na powierzchniach kryształów halogenków metali alkalicznych.

Obserwowano wiązki padające i rozproszone w określonej płaszczyźnie. Oprócz cząstek rozproszonych pod kątem równym kątowi padania wystąpiły maksima liczby cząstek rozproszonych także pod innymi kątami, które można było obliczyć z teorii dwuwymiarowej sieci dyfrakcyjnej. Przyjmując z drugiej strony długości fal z (3.32) dla poruszających się atomów uzyskano zgodność z teorią dwuwymiarowej sieci dyfrakcyjnej.
Słuszność hipotezy *de Broglie'a* potwierdziły też doświadczenia z dyfrakcją neutronów na kryształach.

Niektóre własności fal *de Broglie'a*.

Rozpatrzmy falę elektronową o długości:

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{3.33}$$

Wprowadźmy wektor falowy $\vec{k}$:

$$\vec{p} = \frac{h}{2\pi}\vec{k} \tag{3.34}$$

Określamy prędkość fazową i grupową fal *de Broglie'a*. Prędkość fazowa:

$$v_{faz} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{W}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v} = \frac{c^2}{h}m\lambda \tag{3.35}$$

Z uwagi na $c > v$ prędkość fazowa fal *de Broglie'a* jest większa od prędkości światła w próżni. Z powyższej zależności widać, że fale *de Broglie'a* muszą doznawać znacznej dyspersji. Prędkość grupową fal *de Broglie'a* można wyznaczyć ze wzoru:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dW}{dp} \tag{3.36}$$

Łatwo pokazać, że $\frac{dW}{dp} = v$, gdzie v – prędkość cząstki. Istotnie, ponieważ energia potencjalna dowolnej cząstki swobodnej $W_p = 0$, to

$$\frac{dW}{dp} = \frac{dW_k}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{2p}{2m} = v \tag{3.37}$$

Zatem:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dW}{dp} = v \tag{3.38}$$

Z ostatniego wzoru wynika:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dv}{d(1/\lambda)} = \frac{dv}{d(mv/h)} = \frac{h}{m}\frac{dv}{dv} = v \tag{3.39}$$

Skąd całkując znajdujemy:

$$v = \frac{m}{h} = \int v dv = \frac{1}{h}\frac{mv^2}{2} = \frac{W}{h} \tag{3.40}$$

Jest to podstawowy związek między energią swobodnej cząstki a częstością odpowiadającej jej fali *de Broglie'a*. Własności korpuskularne i falowe cząstek swobodnych przedstawia tabelka:

Własności korpuskularne	***Własności falowe***
Prędkość v, pęd $= mv$,	Długość fali de Broglie'a $\lambda = \frac{1}{mv} = \frac{h}{p}$ (3.41)
Energia $= \frac{1}{2} mv^2$	Częstość fali de Broglie'a $v = \frac{1}{h}W = \frac{1}{h}\frac{mv^2}{2}$ (3.42)
	Prędkość grupowa fali de Broglie'a $u = v$ (3.43)
	Prędkość fazowa fali de Broglie'a $v_{faz} = \frac{c^2}{v}$ (3.44)

Statyczny charakter fal de Broglie'a

W celu zrozumienia fizycznego charakteru fal *de Broglie'a* należy odpowiedzieć na pytanie o fizyczny charakter amplitudy bądź natężenia tych fal. W doświadczeniach nad dyfrakcją elektronu stwierdzono wyraźną kierunkową zależność liczby rozpraszanych elektronów.

Kierunki, w których rejestrowano najwięcej elektronów, są kierunkami o największym natężeniu fal *de Broglie'a*. Prowadzi to do następującej statystycznej interpretacji fal *de Broglie'a*:

Kwadrat modułu amplitudy fali *de Broglie'a* w danym punkcie jest miarą prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w tym punkcie. Wprowadźmy funkcję $\Psi(x, y, z, t)$ opisującą rozkład prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danej chwili t w określonym punkcie $P(x, y, z)$.

Prawdopodobieństwo $d\omega$, że cząstka znajduje się w elemencie o objętości dV:

$$d\omega = |\Psi|^2 dV \tag{3.45}$$

Funkcję Ψ nazywa się funkcją falową. Znaczenie fizyczne ma nie sama funkcja, a kwadrat jej modułu równy $\Psi\Psi^*$. Określa on prawdopodobieństwo znajdowania się cząstki w danym punkcie przestrzeni. Jest to więc natężenie fali *de Broglie'a*. Z definicji Ψ wynika, że musi na spełniać warunek normalizacyjny:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1 \tag{3.46}$$

Ψ jest podstawowym parametrem charakteryzującym stany cząstek elementarnych, atomów i cząsteczek. Przy jej pomocy w mechanice kwantowej oblicza się średnie wartości wielkości fizycznych charakteryzujących dany obiekt będący w stanie opisanym funkcją falową Ψ.

Zasada nieoznaczoności Heisenberga

Występowanie przestrzennej rozciągłości Δx pewnego ciągu fal związanie jest z faktem, że ciąg taki musi zawierać fale o liczbach falowych z przedziału Δk. Wykazano przy tym słuszność związku:

$$\Delta x \Delta k \geq 1 \tag{3.48}$$

Dla fali *de Broglie'a* cząstki poruszającej się wzdłuż osi *x* z pędem p_x:

$$\Delta k = \frac{\Delta p_x}{\hbar} \tag{3.49}$$

Stąd (3.48) można zapisać w postaci:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar \tag{3.50}$$

Jeśli ruch ma miejsce wzdłuż osi y lub z to analogicznie:

$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar \tag{3.51}$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \hbar \tag{3.52}$$

Wzory te zwane zasadą nieoznaczoności Heisenberga, pokazują, że nie można jednocześnie dokładnie określić położenia i pędu cząstki. Tak więc klasyczne pojęcia współrzędnych położenia i pędu mogą opisywać mikrocząstki tylko w granicach dokładności określonych zasadą nieoznaczoności Heisenberga.

Równanie Schrödingera

Jest to podstawowe równanie nierelatywistycznej mechaniki kwantowej zapostulowane przez Schrödingera w 1926 roku. Wnioski z niego wynikające są zgodne z wynikami wielu doświadczeń fizyki atomu, cząsteczki i jądra atomowego. Ma ono postać:

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x,y,z,t)\Psi \tag{4.01}$$

gdzie m – masa cząstki, U – energia potencjalna cząstki w danym polu sił, w którym cząstka się porusza, Δ - operator Laplace'a: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, i oznacza jednostkę urojoną. (4.02)

Uzupełnieniem tego równania są warunki narzucone na funkcję Ψ:

1) Ψ musi być skończona, ciągła i jednoznaczna,
2) Jej pochodne cząstkowe po x, y, z, t powinny być ciągłe,
3) Kwadrat modułu Ψ powinien być całkowalny.

Przytoczone równanie Schrödingera jest tak zwanym równaniem zależnym od czasu (z czasem). Jednak do opisu wielu problemów fizycznych (np. ruch elektronu w atomie) należy znać rozwiązania stacjonarne równania Schrödingera. Do rozwiązania takich problemów należy znaleźć postać stacjonarną równania Schrödingera. Ta postać opisuje zjawiska, w których $U = U(x,y,z)$, czyli nie zależy od czasu. Rozważmy zatem:

$$\Psi(x,y,z,t) = \Psi(x,y,z)\varphi(t) \tag{4.03}$$

Podstawiając ostatni związek do równania Schrödingera i różniczkując mamy:

$$-\frac{\hbar}{i}\Psi\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x,y,z)\Psi\varphi \tag{4.04}$$

Dzieląc obustronnie przez $\Psi\varphi$ mamy:

$$\frac{\hbar}{i}\frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\Psi}\Delta\Psi - U(x,y,z) \tag{4.05}$$

Ponieważ lewa strona tego równania jest funkcją tylko czasu, a prawa tylko współrzędnych, to aby równanie miało rozwiązania obie strony muszą być równe pewnej stałej, którą oznaczymy jako – W:

$$\frac{\hbar}{i}\frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -W \tag{4.06}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\Psi}\Delta\Psi - U(x,y,z) = -W \tag{4.07}$$

Ostatnie równanie zapisane w postaci:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(W-U)\Psi = 0 \tag{4.08}$$

Nazywa się stacjonarnym równaniem Schrödingera. Funkcję Ψ spełniające równanie Schrödingera przy zadanym U nazywa się funkcjami własnymi zaś wartości W dla których istnieją rozwiązania (4.08) Z wartościami własnymi. Bezpośrednie scałkowanie (4.06) daje:

$$\ln\varphi = -\frac{i}{\hbar}Wt + \ln\varphi_0 \tag{4.09}$$

czyli

$$\varphi = \varphi_0 exp\left(-\frac{i}{\hbar}Wt\right) \tag{4.10}$$

Dla wyjaśnienia sensu fizycznego W porównać można (4.08) z równaniem falowym:

$$\Delta S - \frac{1}{{v_{faz}}^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0 \tag{4.11}$$

gdzie v_{faz} - prędkość fazowa fali.

Dla fali sinusoidalnej o postaci:

$$S = A(r)exp\left(2i\pi\nu\left(t - r/v_{faz}\right)\right) \tag{4.12}$$

Można pokazać dwukrotnie różniczkując 77 po t, że:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -4\pi^2 \upsilon^2 S \tag{4.13}$$

czyli równanie falowe przyjmie postać:

$$\Delta S + \frac{4\pi^2 \upsilon^2}{{v_{faz}}^2} S = 0 \tag{4.14}$$

Schrödinger przyporządkował falom de Broglie'a równanie falowe w postaci (4.14). Ze wzoru deBroglie'a mamy:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{v_{faz}} = \frac{mv}{h} \tag{4.15}$$

Podstawiając $\frac{\upsilon}{v_{faz}}$ do (4.14) dostajemy:

$$\Delta\Psi + \frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2}\Psi = 0 \tag{4.16}$$

Współczynnik przy Ψ można zapisać jako:

$$\frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2} = \frac{8\pi^2 m}{h^2}\frac{mv^2}{2} = \frac{2m}{\hbar^2}(W - U) \tag{4.17}$$

czyli

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(W - U)\Psi = 0 \tag{4.18}$$

Otrzymaliśmy więc równanie identyczne ze stacjonarnym równaniem Schrödingera.

Ruch cząstki swobodnej

W tym przypadku $\vec{v} = const$, zaś U możemy przyjąć za równe 0. Skierujmy oś x układu współrzędnych wzdłuż $\vec{v}$. Wtedy:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\mathrm{W}\Psi = 0 \tag{4.19}$$

Równanie to ma następujące rozwiązanie:

$$\Psi = Aexp\left(i\sqrt{2mW}\, W/\hbar\right) + Bexp\left(-i\sqrt{2mW}\, W/\hbar\right) \tag{4.20}$$

Gdzie A i B – stałe.

Rozwiązanie pełnego równania Schrödingera:

$$\begin{aligned}\Psi(x,y,z,t) = Aexp\left(-i\left(\frac{W}{\hbar}t - \sqrt{2mW}\frac{x}{\hbar}\right)\right) + \\ +Bexp\left(-i\left(\frac{W}{\hbar}t + \sqrt{2mW}\frac{x}{\hbar}\right)\right)exp\left(-i\sqrt{2mW}\, x/\hbar\right)\end{aligned} \tag{4.21}$$

Rozwiązanie to jest superpozycją dwóch płaskich fal monochromatycznych o częstości $W/\hbar$. Porównując (4.23) z poniższym wyrażeniem na płaską falę monochromatyczną:

$$s = Aexp\left(-i(\omega t - kx)\right) \tag{4.22}$$

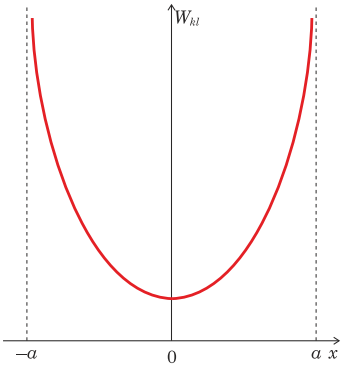
Otrzymamy:

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mW} \tag{4.23}$$

Liniowy oscylator harmoniczny

$$F = -kx\,, k = m{\omega_0}^2 \tag{4.24}$$

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} \tag{4.25}$$



Klasyczny oscylator harmoniczny – zależność prawdopodobieństwa od wychylenia – przedstawia rysunek obok.

Prawdopodobieństwo tego, że oscylator klasyczny znajduje się na odcinku $(x, x + dx)$:

$$w_{klas}(x)dx = \frac{\omega_0}{2\pi}dt = \frac{dt}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}\frac{dx}{v} \tag{4.26}$$

gdzie v – prędkość cząstki drgającej harmonicznie (czyli np. $x = Asin\omega_0 t$).

Zatem:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos\omega_0 t = A\omega_0\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)^{1/2} \tag{4.27}$$

Stąd:

$$w_{klas}(x)dx = \frac{1}{2\pi A}\frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)^{1/2}} \tag{4.28}$$

Z analizy tego wzoru wynika, że przy $x \to \pm A$, gęstość prawdopodobieństwa (4.28) rośnie nieograniczenie. W mechanice kwantowej problem oscylatora rozwiązuje się za pomocą równania Schrödingera:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar}\left(W - \frac{m{\omega_0}^2}{2}\right)\Psi = 0 \tag{4.29}$$

Przy oznaczeniach:

$$\alpha = m\frac{\omega_0}{\hbar}\,, \beta = \frac{2mW}{\hbar^2} \tag{4.30}$$

Równanie (4.29) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + (\beta - \alpha^2 x^2)\Psi = 0 \tag{4.31}$$

Wprowadzając zmienną:

$$z = \sqrt{\alpha}x \tag{4.32}$$

96 można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - z^2\right)\Psi = 0 \tag{4.33}$$

Okazuje si, że równanie to ma rozwiązania, gdy:

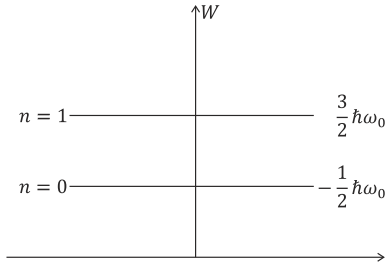
$$\frac{\beta}{\alpha} = 2n + 1 \tag{4.34}$$

gdzie $n = 0, 1, 2$ ...

Podstawiając (4.30) do (4.34) uzyskujemy:

$$\frac{2W}{\hbar\omega_0} = 2n + 1 \tag{4.35}$$

Stąd otrzymujemy wartości własne energii oscylatora harmonicznego:

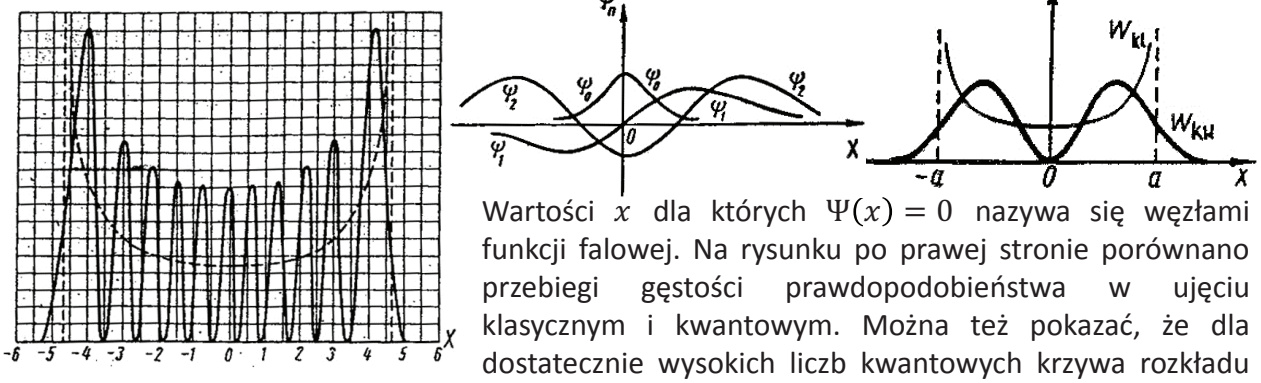


$$W_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \tag{4.36}$$

Najmniejsza energia jaką może mieć oscylator harmoniczny (energia drgań zerowych):

$$W_{min} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \tag{4.37}$$

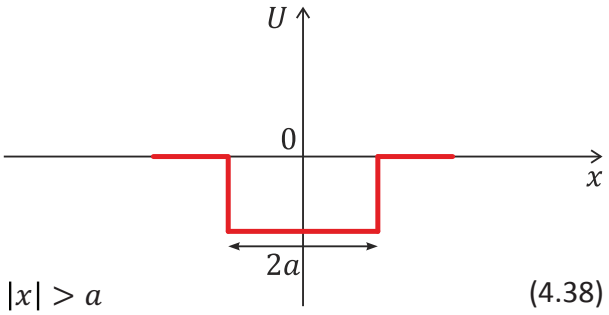
Istnienie drgań zerowych potwierdzono w eksperymentach z rozpraszaniem światła przez kryształy w temperaturze bardzo bliskiej zera bezwzględnego. Przykładowe wykresy funkcji falowych liniowego oscylatora harmonicznego przedstawiono poniżej.



Wartości x dla których $\Psi(x) = 0$ nazywa się węzłami funkcji falowej. Na rysunku po prawej stronie porównano przebiegi gęstości prawdopodobieństwa w ujęciu klasycznym i kwantowym. Można też pokazać, że dla dostatecznie wysokich liczb kwantowych krzywa rozkładu prawdopodobieństwa zacznie upodabniać się do krzywej klasycznej.

Elektron w jamie potencjału

Niech elektron porusza się w polu potencjału o kształcie jak na rysunku obok:



Energia potencjalna na zewnątrz i wewnątrz jamy potencjału ma następujące wartości:

$$U = 0 \; dla \; |x| > a \tag{4.38}$$

$$U = U_0 \; dla \; |x| < a \tag{4.39}$$

Przykład: ruch elektronów kolektywnych wewnątrz metalu.

W celu analizy ruchu elektronu w takim polu rozważymy odpowiednią postać równania Schrodingera (dla uproszczenia zagadnienie jednowymiarowe):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} = W\Psi \tag{4.40}$$

W jamie:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} - U_0\Psi = W\Psi \tag{4.41}$$

Równanie te wygodnie zapisać w postaci:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} - |W|\frac{2m}{\hbar^2}\Psi = 0 \text{ dla } |x| > a \tag{4.42}$$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - |W|)\Psi = 0 \text{ dla } |x| < a \tag{4.43}$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$z^2 = |W|\frac{2m}{\hbar^2} > 0 \tag{4.44}$$

Wtedy (4.42) przyjmuje postać:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} - z^2\Psi = 0 \text{ dla } |x| > a \tag{4.45}$$

Rozwiązaniem tego równania jest:

$$\Psi(x) = Cexp(zx) + Dexp(-zx) \text{ dla } |x| > a \tag{4.46}$$

Ponieważ Ψ musi być skończona, więc otrzymane rozwiązanie spełnia ten warunek w $\pm\infty$ tylko wtedy, gdy $C = D = 0$. Tak więc

$$\Psi(x) = 0, |\Psi|^2 = 0 \text{ dla } |x| > a \tag{4.47}$$

Tak więc prawdopodobieństwo znalezienia elektronu na zewnątrz jamy jest zerowe.
Okazuje się, że do tego wyniku wprowadzić należało istotną poprawkę.
Tymczasem zajmijmy się obszarem wewnątrz jamy. Wprowadźmy oznaczenie:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - |W|) > 0 \tag{4.48}$$

gdzie k jest liczbą falową fali de Broglie'a elektronu znajdującego się wewnątrz jamy potencjału.
Odpowiednie równanie (4.43) przyjmuje postać:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2\Psi = 0 \text{ dla } |x| < a \tag{4.49}$$

Równanie to ma następujące rozwiązanie:

$$\Psi(x) = A\cos kx + B\sin kx \text{ dla } |x| < a \tag{4.50}$$

A i B oznaczają stałe. Wykorzystamy warunek ciągłości funkcji Ψ.
Dla $x = \pm a$ rozwiązania (4.42) i (4.43) muszą być sobie równe, co prowadzi do:

$$A\cos ka + B\sin ka = 0 \tag{4.51}$$
$$A\cos ka - B\sin ka = 0 \tag{4.52}$$

Rozwiązując powyższe równania mamy:

$$\sin ka = 0 \text{ dla B} \neq 0 \; oraz \; A = 0 \tag{4.53}$$

albo

$$\cos ka = 0 \text{ dla B} = 0 \; oraz \; A \neq 0 \tag{4.54}$$

Warunek $\sin ka = 0$ powoduje, iż k przyjmować może jedynie wartości dyskretne:

$$k_n a = n\pi, gdzie \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.55}$$

Stąd:

$$k_n = \frac{n\pi}{\lambda_n} \tag{4.56}$$

Warunek ten ma zatem następujący sens fizyczny: ponieważ

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \tag{4.57}$$

gdzie λn długość fali de Broglie'a dla elektronu znajdującego się w obszarze jamy:

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{a} \; lub \; \lambda_n = \frac{2a}{n} \tag{4.58}$$

czyli w jamie potencjału powinna mieścić się całkowita liczba fal de Broglie'a. Warunek (4.56) prowadzi do bardzo ważnego wniosku:

$$\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - |W|) = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \; lub \; |W| = U_0 - \frac{n^2\pi^2}{a^2}\frac{\hbar^2}{2m} \tag{4.59}$$

W przypadku jamy potencjału o wymiarach rzędu 10Å wartości własne energii elektronu tworzą ciąg poziomów energetycznych, między którymi $\Delta W = W_{n+1} - W_n = 5.4 \cdot 10^{-20}J \cdot (2n+1)V$ Natomiast, gdy jama ma wymiar makroskopowy $a = 0.01m$, to $\Delta W = (2n+1) \cdot 5.4 \cdot 10^{-20}J$. W tym przypadku poziomy są tak blisko siebie, że można je uznać za kwaziciągłe.

Rozważmy teraz drugi warunek narzucony na rozwiązania równania Schrödingera o postaci $\cos ka = 0$. Wynika z niego, że:

$$k_n a = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\pi \tag{4.60}$$

czyli

$$k_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a} \tag{4.61}$$

Oznacza to, że:

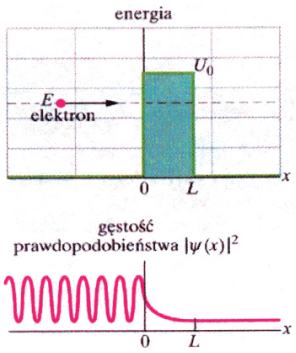
$$\lambda_n = \frac{2a}{n + \frac{1}{2}} \tag{4.62}$$

Tzn. że w jamie potencjału może zmieścić się całkowita liczba połówek fal de Broglie'a. Poziomy energetyczne elektronu odpowiadające temu warunkowi:

$$W_n = -U_0 + \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{a^2}\frac{\hbar}{2m} \tag{4.63}$$

Przechodzenie cząstek przez barierę potencjału

Przy otrzymywaniu rozwiązania zakładano, że na granicy jamy potencjału wartość funkcji falowej wynosi 0. Jednak na granicy obu obszarów można by oczekiwać, że *fala de Broglie'a* powinna zachowywać się analogicznie jak fala elektromagnetyczna na granicy dwóch ośrodków (możliwość częściowego przenikania do drugiego ośrodka). Jeśli tak nie jest to istnieje niezerowe prawdopodobieństwo znalezienia elektronu poza obszarem jamy. Byłby to wynik odmienny od przewidywań fizyki klasycznej, zgodnie z którą cząstka może opuścić jamę tylko wtedy, gdy $|W| > U_0$. Mechanika kwantowa dopuszcza zasadniczo inną możliwość przechodzenia cząstki przez barierę potencjału. Taki efekt nazywa się zjawiskiem tunelowym, zachodzi w rzeczywistości i stanowi podstawę działania diody tunelowej i skaningowego mikroskopu tunelowego. W opisie zjawiska tunelowego wprowadza się pojęcie przezroczystości bariery $D = I/I_0$, gdzie I i I_0 oznaczają odpowiednio natężenia fali przechodzącej oraz padającej. Wielkość tą należy traktować jako prawdopodobieństwo przeniknięcia cząstki opisanej falą de Broglie'a przez barierę. Można pokazać, że na przykład dla bariery prostokątnej:



D. Halliday, R. Resnick, J. Walker
„Podstawy fizyki 5", PWN Warszawa 2003

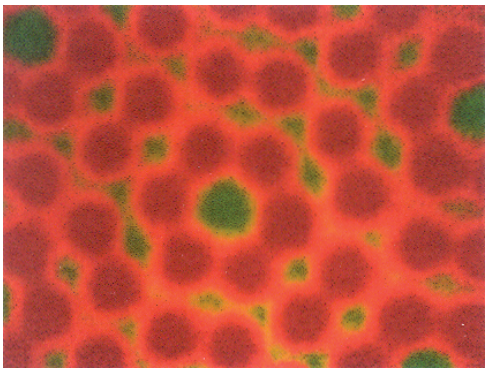
$$D \sim exp\left(-2\sqrt{2m(U_0 - W)}\, L/\hbar\right)$$

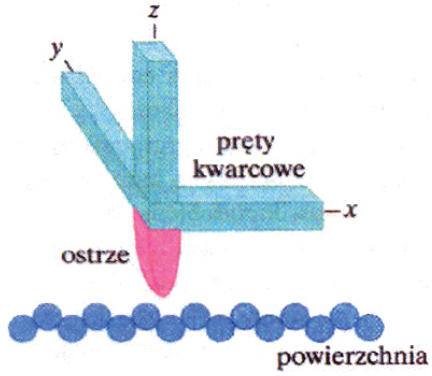
gdzie L – szerokość bariery, W – energia cząstki, m – masa cząstki, U_0 – wysokość bariery. Zjawisko tunelowe ma znaczenie, gdy przezroczystość bariery nie jest zbyt mała. Ma to miejsce w przypadku bariery prostokątnej gdy:

$$a = \frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - W)}L \approx 1 \qquad (5.01)$$

Warunek ten zachodzi, gdy bariera ma wymiary porównywalne z wymiarami atomu.

W diodzie tunelowe przepływ elektronów tunelujących przez barierę potencjału jest gwałtownie włączany i wyłączany przez zmianę wysokości bariery (w czasie ok. 5ps) Jest to więc bardzo szybki przełącznik (Nagroda Nobla – 1973). Skaningowy mikroskop tunelowy (Nagroda Nobla – 1986) umożliwia otrzymywanie szczegółowych map powierzchni ze szczegółami w skali atomowej.



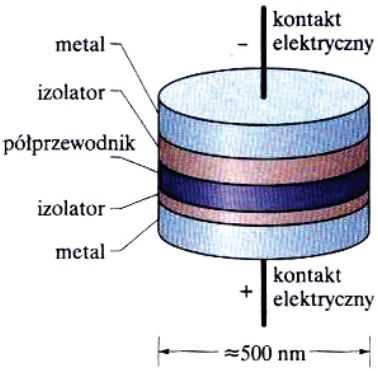


D. Halliday, R. Resnick, J. Walker
„Podstawy fizyki 5", PWN Warszawa 2003

Załączony obok rysunek – mapa przedstawia przykładowy obraz sieci atomów krzemu.

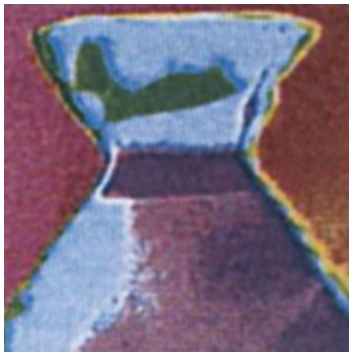
Schemat przyrządu obrazuje kolejny rysunek, na którym trzy kwarcowe pręty przesuwają przewodzące ostrze nad badaną próbką utrzymując ją w stałej odległości nad nią. Pomiędzy ostrzem a powierzchnią przykłada się małą różnicę potencjału (ok. 10 mV). Ponieważ kwarc jest piezoelektrykiem, długość prętów kwarcowych można nieznacznie zmieniać w ciągły sposób, w efekcie czego można dokładnie kierować ruchem ostrza. Przestrzeń pomiędzy ostrzem a powierzchnią odrywa rolę bariery potencjału. Gdy ostrze jest dostatecznie blisko, elektrony z próbki mogą tunelować do ostrza dając wkład do prądu tunelowego. Elektroniczny układ sprzężenia zwrotnego dopasowuje pionowe położenie ostrza tak, aby prąd tunelowy pozostawał stały podczas ruchu ostrza. Odległość między ostrzem a powierzchnią pozostaje więc stała. Na wyjściu urządzenia pojawia się odpowiedni obraz odwzorowujący położenie ostrza, czyli kontur powierzchni.

Kropka kwantowa, czyli „sztuczny atom”



D. Halliday, R. Resnick, J. Walker
„Podstawy fizyki 5”, PWN Warszawa 2003

Środkowa warstwa materiału półprzewodnikowego stanowi studnię energii potencjalnej, w której lokalizowane są elektrony. Izolująca warstwa poniżej jest na tyle cienka, że umożliwia tunelowanie elektronów. Dzięki temu przez odpowiednie dobranie napięcia przyłożonego do kontaktów można do środkowej studni dodawać lub zabierać z niej elektrony.



Zdjęcie rzeczywistej kropki kwantowej. Elektrony lokalizowane są w fioletowym obszarze, w środku urządzenia.

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker *„Podstawy fizyki 5”*, PWN Warszawa 2003

Atom wodoropodobny w mechanice kwantowej

Wyniki teorii Bohra można otrzymać w mechanice kwantowej nie odwołując się do warunków Bohra. Rozpatrzmy ruch elektronu w polu jądra o ładunku Ze. Wtedy $U(r) = -Ze^2/4\pi\varepsilon_0 r$. Stan elektronu opisany jest funkcją falową spełniającą stacjonarne równanie Schrödingera. Kulistosymetryczny charakter pola sił skłania do posłużenia się sferycznym układem współrzędnych do rozwiązania równania Schrödingera w tym przypadku. Rozwiązanie tego równania we współrzędnych sferycznych prowadzi do ważnych wniosków. Okazuje się, że moment pędu elektronu w atomie przyjmuje skwantowane wartości zgodnie ze wzorem:

$$L_l = \sqrt{l(l+1)}\hbar \tag{5.02}$$

gdzie $l = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ nazywa się orbitalną liczbą kwantową. Wartości całkowitej energii W są skwantowane i dane przez:

$$W = -\frac{Z^2 m e^4}{8h^2\varepsilon^2(n_r + l + 1)^2} \tag{5.03}$$

gdzie n nazywa się niekiedy radialna liczbą kwantową. Oznaczając:

$$\mathrm{n} = n_r + l + 1 \tag{5.04}$$

dostajemy wyrażenie Bohra:

$$W_n = -\frac{Z^2 m e^4}{8h^2\varepsilon^2 n^2} \tag{5.05}$$

Liczba kwantowa n odpowiada głównej liczbie kwantowej n znanej z teorii Bohra.

Z równania (5.04) wynika, że I_{max} dla danego n uzyskamy, gdy $n_r = 0$, czyli $I_{max} = n - 1$.

Stan podstawowy atomu wodoru

Stan elektronów w zależności od wartości l oznacza się jak następuje:

$$l = 0 - \ stan\ s$$
$$l = 1 - \ stan\ p$$
$$l = 2 - \ stan\ d$$
$$l = 3 - \ stan\ f$$

itd., zgodnie z sekwencją liter alfabetu.

Rozpatrzmy stan s $(n = 1)$. Jest to oczywiście stan podstawowy. Funkcja falowa dla tego stanu zależy tylko od r. Jest to więc stan o symetrii kulistej. Równanie Schrödingera ma dla tego stanu postać:

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Psi}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(W_1 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\Psi = 0 \tag{5.06}$$

Poszukujemy rozwiązania w postaci:

$$\Psi = cexp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) \tag{5.07}$$

Po zróżniczkowaniu i podstawieniu do (5.06) oraz obustronnym podzieleniu przez prawą stronę (5.06) otrzymamy:

$$W_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{ra_0}\right) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{5.08}$$

Równanie to jest spełnione (dla dowolnych r), gdy:

$$W_1 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\ , \frac{2\hbar^2}{2mra_0} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{5.09}$$

Stąd z relacji po prawej stronie można znaleźć pierwszy promień Bohra:

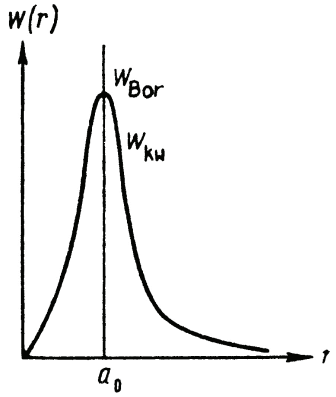
$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} \tag{5.10}$$

Podstawienie do wyrażenia W_1 daje:

$$W_1 = -\frac{me^4}{8h^2\varepsilon^2} \tag{5.11}$$

Jest to wartość energii stanu podstawowego atomu wodoru. Obliczmy jeszcze prawdopodobieństwo znalezienia elektronu ze stanu podstawowego w przedziale od r do $r + dr$. Objętość odpowiedniej warstwy kulistej: $dV = 4\pi r^2 dr$. Prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w tej objętości:

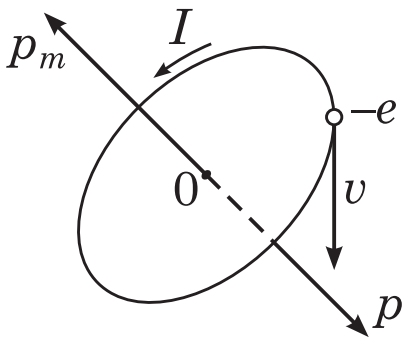
$$dw = |\Psi|^2 dV = |\Psi|^2 4\pi r^2 dr = c^2 exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)4\pi r^2 dr \tag{5.12}$$



Maksymalne prawdopodobieństwo znalezienia elektronu określić można łatwo z warunku maksimum (pierwsza pochodna = 0). Zachodzi to dla $r_{max} = a_0$. Ogólnie rzecz biorąc można sformułować zasadę, że elektronowe orbity Bohra są miejscami geometrycznymi punktów, w których prawdopodobieństwo znalezienia elektronu jest największe.

B. Jaworski, A. Dietłaf *„Kurs fizyki t.3. Procesy falowe. Optyka. Fizyka atomowa i jądrowa"*, PWN Warszawa 1973

Przypomnienie wiadomości o momentach magnetycznych elektronów i atomów



Rozpatrzmy atom nie podlegający działaniu zewnętrznego pola magnetycznego. Załóżmy dla uproszczenia, że elektrony obiegają jądra po kołowych orbitach. Taki ruch elektronu po orbicie zamkniętej jest równoważny zamkniętemu obwodowi prądowemu. Moment magnetyczny $\vec{p}_m$ prądu elektrycznego uwarunkowanego ruchem elektronu po orbicie nazywa się orbitalnym momentem magnetycznym elektronu.

Orbitalny moment magnetyczny elektronu:

$$\vec{p}_m = IS \tag{5.13}$$

S – powierzchnia orbity elektronu. Niech częstość obiegu elektronu po orbicie wynosi ν. Wtedy $I = e\nu$. Ale $\nu = v/2\pi r$. Stąd:

$$p_m = \frac{evr}{2} \tag{5.14}$$

Ponieważ moment pędu ogólnie

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \tag{5.15}$$

a jego wartość (gdy $\vec{r}$ i $\vec{v}$ prostopadłe): $L = mrv$, to:

$$\frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m} \tag{5.16}$$

Tak więc stosunek wartości liczbowej orbitalnego momentu magnetycznego elektronu do wartości liczbowej jego momentu pędu nie zależy ani od prędkości elektronu na orbicie ani od promienia orbity.

Ponieważ wektory $\vec{p}_m$ i $\vec{L}$ są skierowane przeciwnie, to:

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m}\vec{L} = g\vec{L} \tag{5.17}$$

Więc g nazywa się współczynnikiem giromagnetycznym.

Wektorem orbitalnego momentu magnetycznego atomu jest:

$$\vec{P}_m = \sum_{i=1}^{Z} \vec{p}_{mi} \tag{5.18}$$

gdzie $\vec{p}_{mi}$ orbitalny moment magnetyczny i-tego elektronu.

Podobnie moment pędu atomu:

$$\vec{L}_{at} = \sum_{i=1}^{Z} \vec{L}_i \tag{5.19}$$

Stąd dla momentów $\vec{P}_m$ i $\vec{L}_{at}$ zachodzi:

$$\vec{P}_m = -\frac{e}{2m}\vec{L}_{at} = g\vec{L}_{at} \tag{5.20}$$

Obliczenia te nie uwzględniają momentów magnetycznych jąder atomowych.

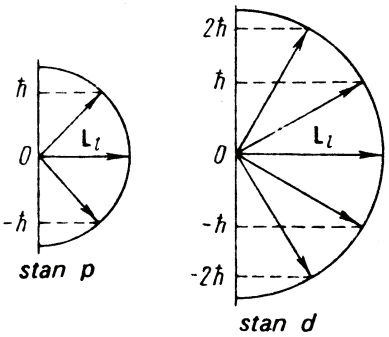
Kwantowanie przestrzenne. Spin elektronu

W mechanice kwantowej nie można określić kierunku wektorów $\vec{p}_m$ oraz $\vec{L}_l$ w stosunku do płaszczyzny orbity elektronu. W związku z tym jako kierunek odniesienia przyjmuje się kierunek zewnętrznego pola magnetycznego lub wypadkowego pola magnetycznego pozostałych elektronów i jądra atomu. W ramach teorii Bohra dowolny kierunek wektora $\vec{L}_l$ oznacza dowolne położenie płaszczyzny orbity elektronu względem zewnętrznego pola magnetycznego. To założenie okazało się błędne. Odkryto natomiast, że: wektor momentu pędu elektronu może przyjmować w przestrzeni jedynie takie kierunki, dla których rzuty $\vec{L}_l$ na kierunek Z zewnętrznego pola magnetycznego L_{lz} mają wartości będące wielokrotnościami $\hbar$.

Jest to zasada kwantowania przestrzennego. Można ją krótko zapiać jako:

$$L_{lz} = m\hbar \tag{5.21}$$

gdzie m – magnetyczna liczba kwantowa przybierająca wartości : $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l$, zaś l jest orbitalną liczbą kwantową. Wynika z tego, że $\vec{L}_l$ może być skierowany w $(2l+1)$ kierunkach przestrzeni. Na poniższych rysunkach podano przykładowo możliwe kierunki wektorów $\vec{L}_l$ elektronów w stanach p i d.



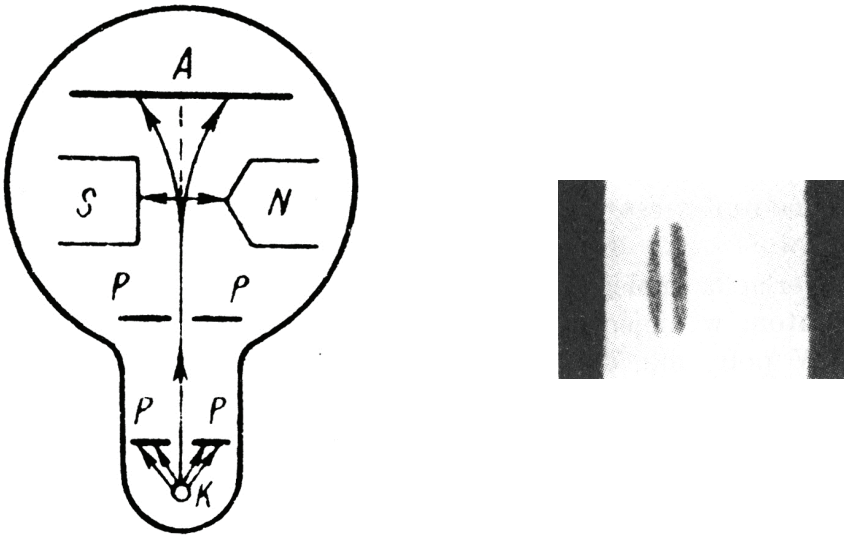
B. Jaworski, A. Dietłaf *„Kurs fizyki t.3. Procesy falowe. Optyka. Fizyka atomowa i jądrowa”*, PWN Warszawa 1973

Doświadczenie Sterna-Gerlacha

Celem doświadczenia był pomiar momentów magnetycznych atomów różnych pierwiastków. Wybrano atomy pierwiastków pierwszej grupy układu okresowego (1 elektron walencyjny). Mierzono siłę działającą na atom w silnie niejednorodnym polu magnetycznym

$$F = p_{mz}\frac{dB}{dz} \tag{5.22}$$

B – indukcja pola magnetycznego skierowana wzdłuż osi z, przy czym pole magnetyczne wykazuje niejednorodność tylko wzdłuż tej osi. Schemat doświadczenia pokazano na rysunku.



B. Jaworski, A. Dietłaf *„Kurs fizyki t.3. Procesy falowe. Optyka. Fizyka atomowa i jądrowa”*, PWN Warszawa 1973

Doświadczenia Sterna-Gerlacha wykazały błędność klasycznego poglądu, że moment magnetyczny $\vec{p}_m$ i moment pędu $\vec{L}_m$ atomu mogą być skierowane dowolnie w stosunku do kierunku zewnętrznego pola magnetycznego. Doświadczenia te potwierdziły słuszność zasady kwantowania przestrzennego.
Korzystając z (5.02) można zapisać zależność $p_m(L_l)$ w postaci:

$$p_m = -\frac{e\hbar}{2m}\sqrt{l(l+1)} = \mu_B\sqrt{l(l+1)} \tag{5.23}$$

gdzie $\mu_B = 0.927 \cdot 10^{27}$ J/Gauss nazywa się magnetonem Bohra.
Aby wytłumaczyć wyniki doświadczenia Sterna-Gerlacha należało założyć istnienie dodatkowego, własnego momentu mechanicznego pędu elektronu zwanego spinem $\vec{L}_s$ i związanego z nim momentu magnetycznego p_{ms}. Spin kwantuje się według prawa:

$$L_s = \sqrt{s(s+1)}\hbar \tag{5.24}$$

gdzie s – spinowa liczba kwantowa. $\vec{L}_s$ może przybierać $(2s+1)$ różnych położeń w polu magnetycznym. Z doświadczeń SG wynikało, że spin elektronu może mieć dwa położenia, zatem $2s+1=2$, czyli $s=1/2$. Do tej pory wprowadzone liczby kwantowe n, l, m są liczbami całkowitymi. Liczba s nie jest całkowita, a wartość tę można określić ze wzoru (5.24):

$$L_s = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{1/2\,(1/2+1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \tag{5.25}$$

Także rzut $\vec{L}_s$ na kierunek zewnętrznego pola magnetycznego jest skwantowany:

$$L_{sz} = m_s\hbar = \pm\frac{1}{2}\hbar \tag{5.26}$$

gdzie $m_s = \pm\frac{1}{2}$.

Doświadczenia SG wykazały, że rzut p_{msz} własnego momentu magnetycznego na kierunek pola jest równy magnetonowi Bohra:

$$p_{msz} = \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \tag{5.27}$$

Z ostatnich dwóch wzorów:

$$\frac{p_{msz}}{L_{sz}} = \frac{e}{m} = g_s \tag{5.28}$$

Podobnie:

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = \frac{e}{m} = g_s \tag{5.29}$$

a w zapisie wektorowym:

$$\vec{p}_{ms} = -g_s\vec{L}_s \tag{5.30}$$

g_s nazywa się spinowym stosunkiem magnetycznym.

Zasada Pauliego (zasada wykluczania)

W najprostszej formie mówi ona, że w dowolnym atomie nie mogą znajdować się dwa elektrony o identycznych stanach stacjonarnych tzn. mające jednakowe wszystkie cztery liczby kwantowe. W mechanice kwantowej zasada ta wiąże się z założeniem o nierozróżnialności identycznych cząstek.

Przypomnienie

Elektrony i inne cząstki dla których $L_{sz} = \pm\hbar/2$ nazywamy fermionami. Układ takich identycznych fermionów opisuje pełna antysymetryczna funkcja falowa. Układ taki podlega kwantowej statystyce *Fermiego-Diraca*.

W tym ujęciu zasada *Pauliego* mówi, że w danym układzie identycznych fermionów żadne dwa z nich nie mogą być jednocześnie w tym samym stanie.

Dla układu elektronów w atomie *zasadę Pauliego* można wyrazić jako:

$$Z_1(n, l, m, ms\ ) = 0\ lub\ 1 \tag{5.31}$$

gdzie Z_1 – liczba elektronów znajdujących się w stanie opisanym liczbami kwantowymi n, l, m, m_s. Z zasady *Pauliego* można wyznaczyć maksymalną liczbę elektronów o ustalonych trzech (n, l, m), dwóch (n, l) lub jednej (n) liczbie kwantowej.

$$Z_2(n, l, m,) = 2 \tag{5.32}$$

$$Z_3(n, l) = 2(2l + 1) \tag{5.33}$$

$$Z(n) = \sum_{l=0}^{l=n-1} 2(2l + 1) = 2n^2 \tag{5.34}$$

Wartość orbitalnej liczby kwantowej l	0	1	2	3	4
Symbol stanu określonego liczbą l	s	p	d	f	g
Maksymalna liczba elektronów $Z_3(n, l)$	2	6	10	14	18

Nazwy liczb kwantowych	n, m, l, m_s	n, l, m	n, l	n
Maksymalna liczba elektronów	1	2	$2(2l + 1)$	$2n^2$

n	Ilość elektronów w stanie					Maksymalna liczba elektronów
	$s(l = 0)$	$p(l = 1)$	$d(l = 2)$	$f(l = 3)$	$g(l = 4)$	
1	2	—	—	—	—	2
2	2	6	—	—	—	8
3	2	6	10	—	—	18
4	2	6	10	14	—	32
5	2	6	10	14	18	50

Uwagi o normalnym zjawisku Zeemana

Dla wodoru czy też zjonizowanego helu obserwujemy w silnym polu magnetycznym tzw. *normalne zjawisko Zeemana*. Przy obserwacji w kierunku poprzecznym zamiast pojedynczych linii widmowych pojawiają się przy włączonym polu magnetycznym trzy linie: linia środkowa ma położenie jak w przypadku włączonego pola, zaś dwie boczne linie są przesunięte częstotliwościowo o wartość:

$$\pm\Delta\nu = \frac{e}{4\pi m}B \tag{5.35}$$

gdzie B – indukcja magnetyczna pola.

Przy obserwacji w kierunku linii pola magnetycznego linia środkowa znika i obserwuje się dwie przesunięte identyczne linie. Obserwacja pod dowolnym kątem pokazuje trzy linie, z tym, że środkowa ma mniejsze natężenie niż linie boczne. Cechą charakterystyczną *zjawiska Zeemana* jest fakt, że składowe na które rozszczepia się linia pierwotna są spolaryzowane. Jakościowo zjawisko Zeemana można wytłumaczyć już w oparciu o *model Bohra*.

$$p_m = \sqrt{l(l+1)\mu_B} \tag{5.36}$$

Moment magnetyczny elektronu tworzy kąt α z kierunkiem pola magnetycznego, przy czym

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}} \tag{5.37}$$

Elektron uzyskuje więc dodatkową energię w polu:

$$\Delta E = -m\mu_B \tag{5.38}$$

Każdy poziom energetyczny zostaje więc rozszczepiony na $2l+1$ podpoziomów odległych wzajemnie o $\mu_B B$. W związku z tym każda linia w nieobecności pola:

$$\nu_0 = \frac{E_2 - E_1}{h} \tag{5.39}$$

W polu magnetycznym wartości energii elektronu na obu poziomach ulegają zmianie i wypromieniowany foton ma energię:

$$\nu + \Delta\nu = \frac{E_2 + \Delta E_2}{h} - \frac{E_1 + \Delta E_1}{h} = \nu_0 + \frac{\Delta E_2 - \Delta E_1}{h} \tag{5.40}$$

Ale

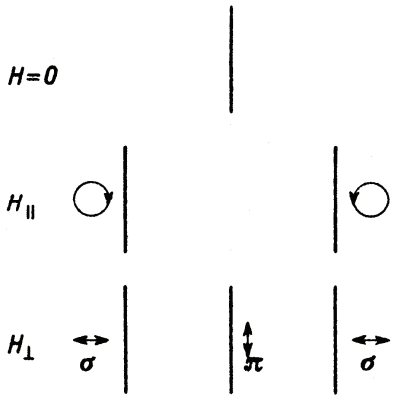
$$\Delta E_1 = -m_1\mu_B B \tag{5.41}$$

$$\Delta E_2 = -m_2\mu_B B \tag{5.42}$$

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m}B \tag{5.43}$$

Stąd:

$$\Delta\nu = \Delta m\frac{e}{4\pi m}B \tag{5.44}$$



Okazuje się, że dla magnetycznej liczby kwantowej m istnieje reguła wyboru, w myśl której możliwe są tylko takie przeskoki elektronowe, dla których:

$$\Delta m = 0, \pm 1 \tag{5.45}$$

W zastosowaniu do *zjawiska Zeemana* mamy zatem:

$$\Delta\nu = 0 \; lub \; \Delta\nu = \pm\frac{e}{4\pi m}B \tag{5.46}$$

Model Bohra nie pozwala wytłumaczyć polaryzacji składowych.

Sz. Szczeniowski *„Fizyka doświadczalna. Część V. Fizyka atomu."*, PWN Warszawa 1976

Uwagi o zjawisku Starka

Zjawisko rozszczepienia poziomów energetycznych i linii widmowych w wyniku działania zewnętrznego pola elektrycznego nazywa się *zjawiskiem Starka*. Oddziaływanie pola elektrycznego na atom zależy od wielkości trwałego elektrycznego momentu dipolowego atomu. Atom traktowany jako taki trwały dipol elektryczny w polu zyskuje dodatkową energię:

$$\Delta W = -\vec{p}_e \cdot \vec{E} \tag{5.47}$$

Ta dodatkowa energia jest odpowiedzialna za występowanie *liniowego efektu Starka*.

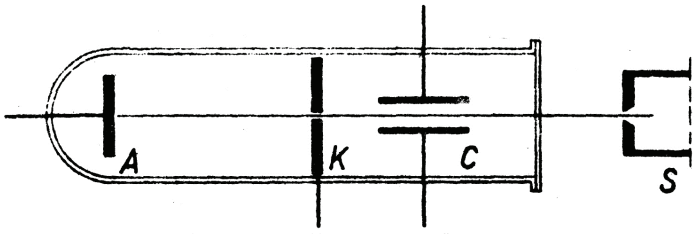
Jeśli $p_e = 0$, w nieobecności pola, to można zaobserwować kwadratowy efekt Starka. Rozszczepienie linii widmowych jest wówczas proporcjonalne do E^2. W zjawisku tym rolę odgrywa polaryzacja atomów pod wpływem pola elektrycznego. Dla małych pól zaindukowany moment:

$$\vec{p}_e = \varepsilon_0 \alpha \vec{E} \tag{5.48}$$

Zaś dodatkowa energia, którą uzyskuje atom od pola elektrycznego wynosi:

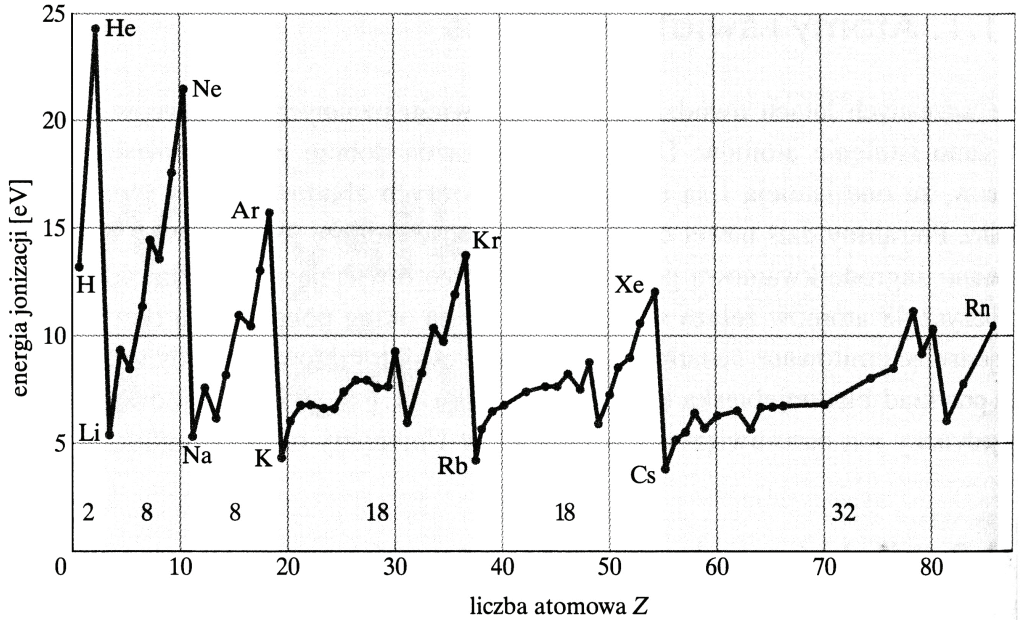
$$\Delta W = \frac{\varepsilon_0 \alpha E^2}{2} \tag{5.49}$$

Rozszczepienie to jest znacznie mniejsze niż w przypadku liniowego *efektu Starka*.



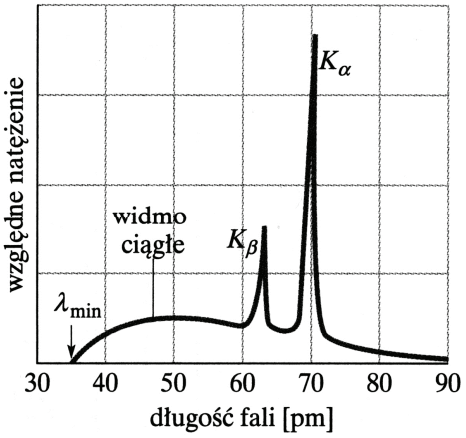
Sz. Szczeniowski *„Fizyka doświadczalna. Część V. Fizyka atomu."*, PWN Warszawa 1976

Schemat doświadczenia *Starka*:
A – anoda,
K – katoda,
C – kondensator,
S – szczelina spektrografu.



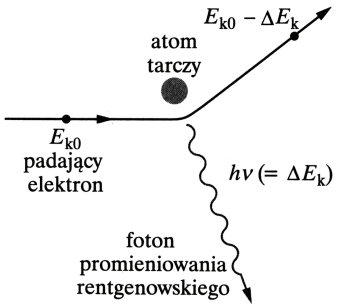
D. Halliday, R. Resnick, J. Walker *„Podstawy fizyki 5"*, PWN Warszawa 2003

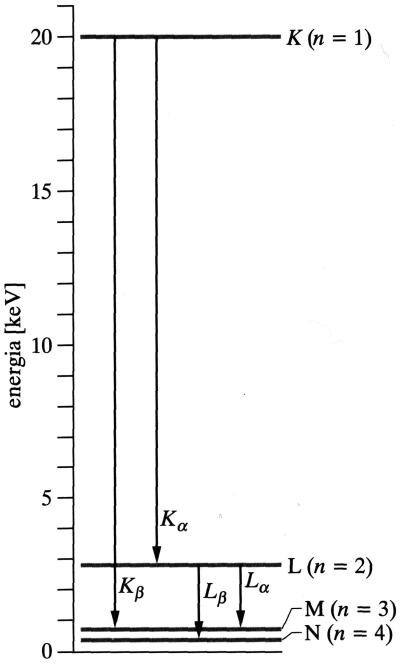
Wykres zależności energii jonizacji pierwiastków od ich liczby atomowej, ujawniający okresowa powtarzalność tej właściwości dla sześciu okresów układu okresowego.

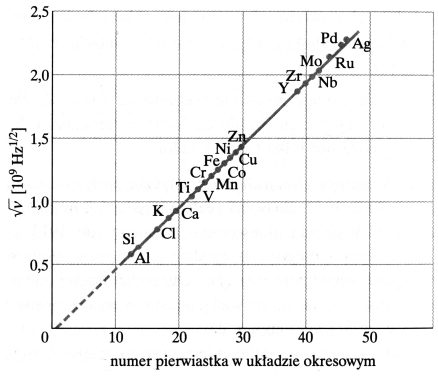


Widmo promieniowania rentgenowskiego wytwarzanego w wyniku bombardowania tarczy wykonanej z molibdenu elektronami o energii 35 keV.

Różne mechanizmy powstawania widma ciągłego i ostrych linii widmowych (rysunki poniżej):

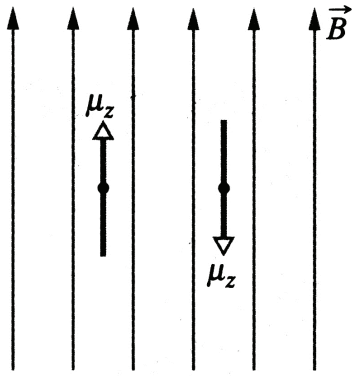




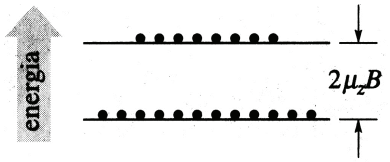


Po lewej:
Wykres Moseleya dla linii K_α widma charakterystycznego 21 pierwiastków.

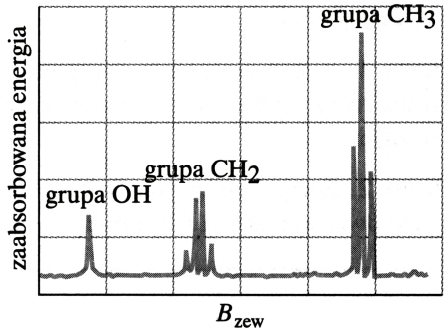
D. Halliday, R. Resnick, J. Walker *„Podstawy fizyki 5”*, PWN Warszawa 2003



Składowa spinu protonu (p – kropka) w kierunku przyłożonego pola magnetycznego, o wartości $\frac{1}{2}\hbar$.
Może być w zewnętrznym polu magnetycznym równoległa lub antyrównoległa do $\vec{B}$.



Zwykle w niższym stanie energetycznym znajduje się więcej protonów niż w wyższym stanie energetycznym.



Widmo jądrowego rezonansu magnetycznego dla etanolu.

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker *„Podstawy fizyki 5”*, PWN Warszawa 2003

Współczynniki Einsteina na absorpcję, emisję spontaniczną i wymuszoną

Weźmy pod uwagę promieniowanie o częstotliwości ν_{nm} odpowiadające przejściu z poziomu n na m $(n > m)$. Niech liczba atomów w stanie n wynosi N_n. Według Einsteina istnieje określone prawdopodobieństwo, że w czasie dt atom znajdujący się w stanie n przejdzie do stanu m:

$$dP = A_{nm}dt \tag{5.50}$$

gdzie A_{nm} oznacza stałą charakterystyczna dla danego atomu. W czasie dt z poziomu n ubędzie następująca liczba atomów:

$$dN_n = -N_n A_{nm}dt \tag{5.51}$$

Prawo to ma oczywiście charakter statystyczny. Każdemu przejściu odpowiada emisja fotonu. Energia emitowana przez atomy w czasie dt:

$$W_{nm}dt = N_n A_{nm}\mathrm{h}\nu_{nm}dt \tag{5.52}$$

czyli moc emitowana

$$W_{nm} = N_n A_{nm}\mathrm{h}\nu_{nm} \tag{5.53}$$

Rozdzielając zmienne w (5.52)

$$\frac{dN_n}{N_n} = -A_{nm}dt \tag{5.54}$$

Scałkowanie daje

$$\ln N_n(t) = -A_{nm}t + const \tag{5.55}$$

Dla $t = 0$:

$$N_n = N_n(0) \tag{5.56}$$

czyli

$$\mathrm{const} = \ln N_n(0) \tag{5.57}$$

Stąd ostatecznie:

$$N_n(t) = N_n(0)\exp(-A_{nm}t) \tag{5.58}$$

Znając analityczną postać $N_n(t)$ można łatwo wyznaczyć średni czas życia atomu w stanie n:

$$\tau_{nm} = \frac{\int_0^\infty tN_n(t)dt}{\int_0^\infty N_n(t)dt} = \frac{1}{A_{nm}} \tag{5.59}$$

Gdy możliwe są przejścia na więcej niż jeden poziom (m poziomów) to:

$$\tau_n = \frac{1}{\sum_m A_{nm}} \tag{5.60}$$

W układach rzeczywistych mamy do czynienia z termicznym pobudzaniem atomów (mechanizm zderzeniowy). Wtedy po ustaleniu równowagi termicznej zgodnie ze wzorem Boltzmanna mamy:

$$N_n = N_0 exp\left(-\frac{E_n - E_0}{kT}\right) \tag{5.61}$$

gdzie N_0 – liczba atomów niewzbudzonych, $E_n - E_0$ różnica energii stanu wzbudzonego n i stanu podstawowego. Stany te mogą być zdegenerowane. Jeśli g_n oraz g_0 oznaczają krotność takiej degeneracji (liczba możliwych stanów o zadanej głównej liczbie kwantowej), to:

$$N_n = N_0 \frac{g_n}{g_0} exp\left(-\frac{E_n - E_0}{kT}\right) \tag{5.62}$$

g_n nazywa się także wagą statystyczna n-tego stanu.

Obok zjawiska emisji promieniowanie o odpowiednich częstotliwościach będzie też pochłaniane przez atomy, które przejdą do stanów o wyższych energiach. W wyniku emisji i absorpcji promieniowania przez atomy w przestrzeni ustala się pewien rozkład natężeń promieniowania. Ponieważ jest to promieniowanie równowagowe, to rozkład natężeń w tym promieniowaniu opisuje *prawo Plancka*:

$$E(\nu,T)\Delta\nu = 2h\frac{\nu^3}{c^2}\frac{\Delta\nu}{exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1} \tag{5.63}$$

Prawdopodobieństwo absorpcji w czasie dt:

$$dP_a = N_m B_{mn} E(\nu_{nm},T)dt \tag{5.64}$$

B_{mn} – współczynnik charakterystyczny dla danego typu atomów. W stanie równowagi liczba aktów absorpcji z poziomu E_m na poziom E_n w czasie dt powinna być równa liczbie emisji w tym czasie z poziomu E_n. Gdybyśmy więc brali pod uwagę wyłącznie procesy emisji spontanicznej i absorpcji, to:

$$N_n A_{nm} dt = N_m B_{mn} E(\nu_{nm},T)dt \tag{5.65}$$

Korzystając ze wzoru Plancka oraz rozkładu Boltzmanna opisującego stan równowagi termicznej mamy:

$$\frac{N_n}{N_m} = exp\left(-\frac{E_n - E_m}{kT}\right) \tag{5.66}$$

Stąd na A_{nm} znajdujemy:

$$A_{nm} = B_{mn}E(\nu_{nm},T)exp\left(\frac{h\nu_{nm}}{kT}\right) \tag{5.67}$$

Wzór ten nie może być prawdziwy, gdyż A_{nm} i B_{mn} musiałyby zależeć od T. Wobec tego Einstein założył występowanie istnienie trzeciego procesu tzw. emisji wymuszonej. Prawdopodobieństwo tego przejścia:

$$dP_c = B_{nm}E(\nu_{nm},T)dt \tag{5.68}$$

gdzie B_{nm} oznacza ponownie współczynnik zależny od rodzaju atomu oraz częstotliwości przejścia.

Przy uwzględnieniu tego procesu warunek równowagi przybiera postać:

$$N_m B_{mn} E(\nu_{nm},T)dt = N_n(A_{nm} + B_{nm}E(\nu_{nm},T))dt \tag{5.69}$$

Skąd

$$E(\nu_{nm},T) = \frac{A_{nm}}{B_{mn}exp\left(\frac{h\nu_{nm}}{kT}\right) - B_{nm}} \tag{5.70}$$

Z porównania ze wzorem *Plancka* wynika:

$$B_{mn} = B_{nm} \tag{5.71}$$

oraz

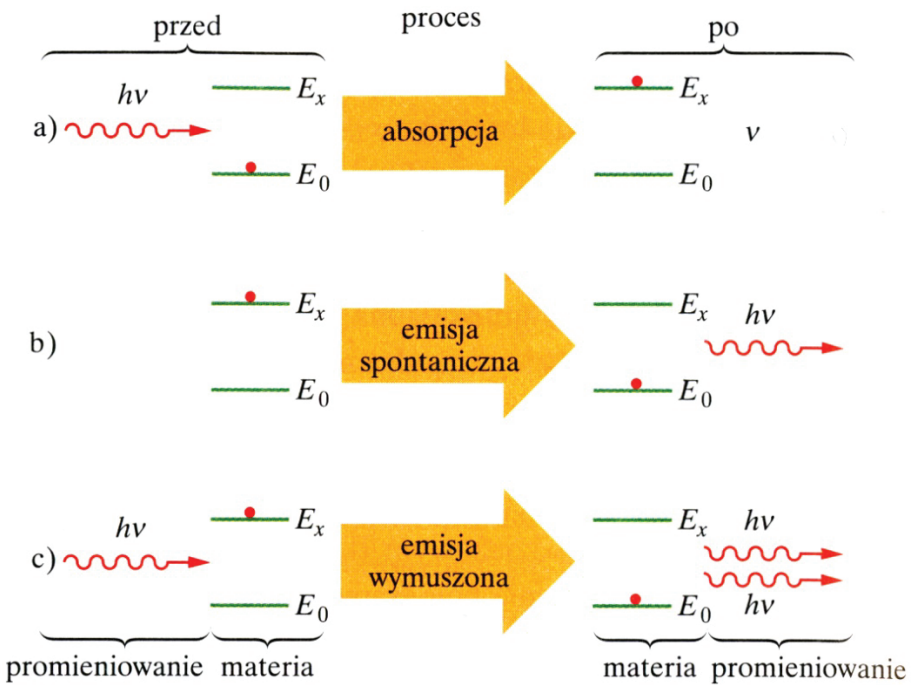
$$\frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{2h\nu^3\nu^3{}_{nm}}{c^2} \tag{5.72}$$

Współczynnik pochłaniania dany jest wzorem:

$$k(\nu_{nm}) = N_m \mathrm{h}\nu_{nm} B_{mn}\left(1 - \frac{N_n}{N_m}\right) \tag{5.73}$$

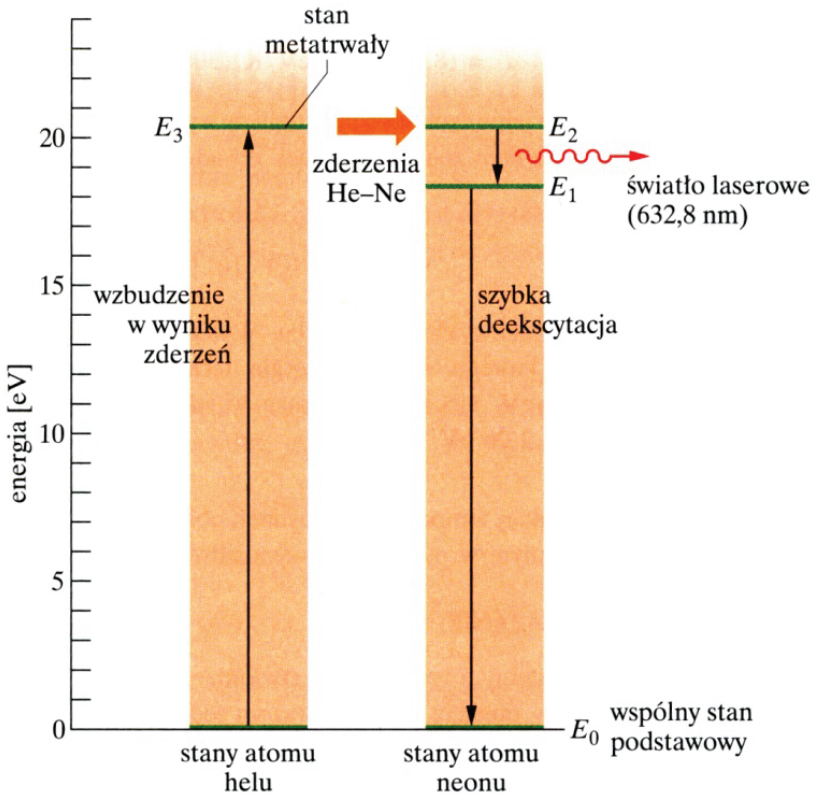
W warunkach normalnych $N_n/N_m \ll 1$ (por. *rozkład Boltzmanna*) i w układzie dominuje absorpcja. Emisja wymuszona dominuje natomiast, gdy $k < 0$, co ma miejsce dla $N_n/N_m > 1$.

Oddziaływanie promieniowania i materii



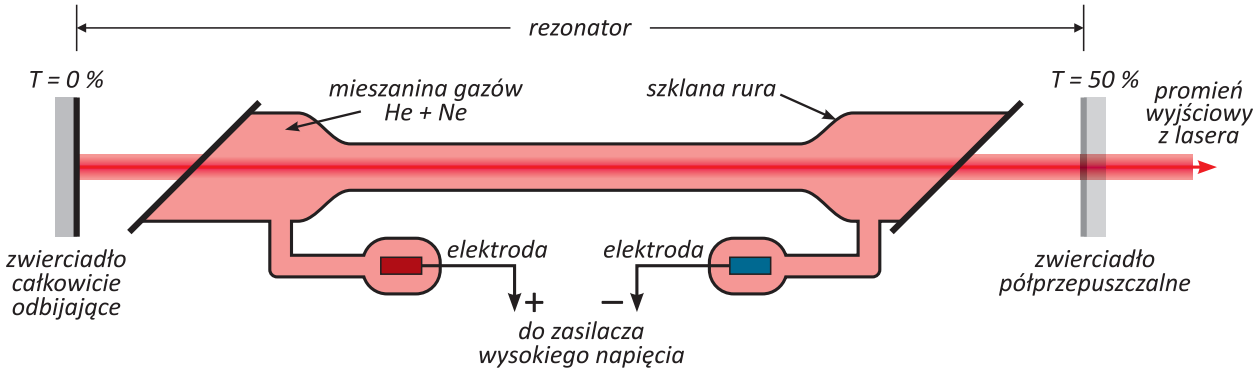
D. Halliday, R. Resnick, J. Walker „*Podstawy fizyki 5*", PWN Warszawa 2003

Poziomy energetyczne atomów helu i neonu



D. Halliday, R. Resnick, J. Walker „*Podstawy fizyki 5*", PWN Warszawa 2003

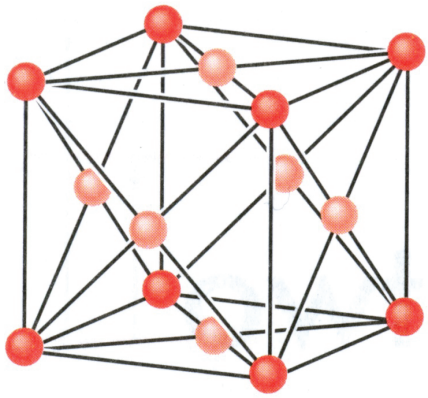
Budowa lasera helowo-neonowego



Przewodnictwo elektryczne ciał stałych

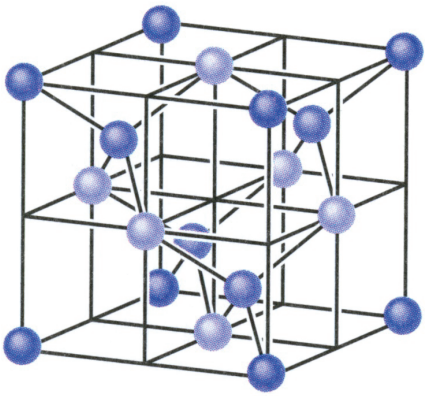
Krystaliczne ciała stałe – atomy uporządkowane są w okresowej trójwymiarowej strukturze (sieci)
Komórka elementarna struktury krystalicznej:

miedzi



D. Halliday, R. Resnick, J. Walker „*Podstawy fizyki 5*", PWN Warszawa 2003

krzemu i diamentu



D. Halliday, R. Resnick, J. Walker „*Podstawy fizyki 5*", PWN Warszawa 2003

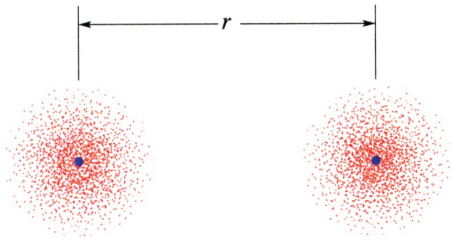
Właściwości elektryczne ciał stałych:

- **Opór elektryczny właściwy** ρ w temperaturze pokojowej. Jednostka $[\Omega \cdot m]$.
- **Temperaturowy współczynnik oporu** $\alpha = (1/\rho)(d\rho/dT)$. Jednostka $[K^{-1}]$.
- **Koncentracja nośników ładunku** n. Jednostka $[m^{-3}]$.

Klasyfikacja ciał stałych ze względu na powyższe właściwości:

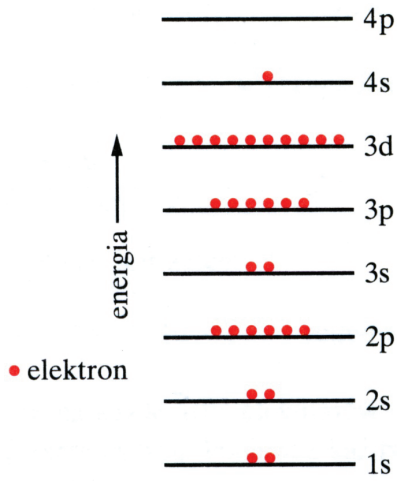
- izolatory (diament)
- metale (miedź)
- półprzewodniki (krzem)

Poziomy energetyczne w krysztale



Dwa atomy miedzi w dużej odległości od siebie – rozkład gęstości prawdopodobieństwa elektronu.

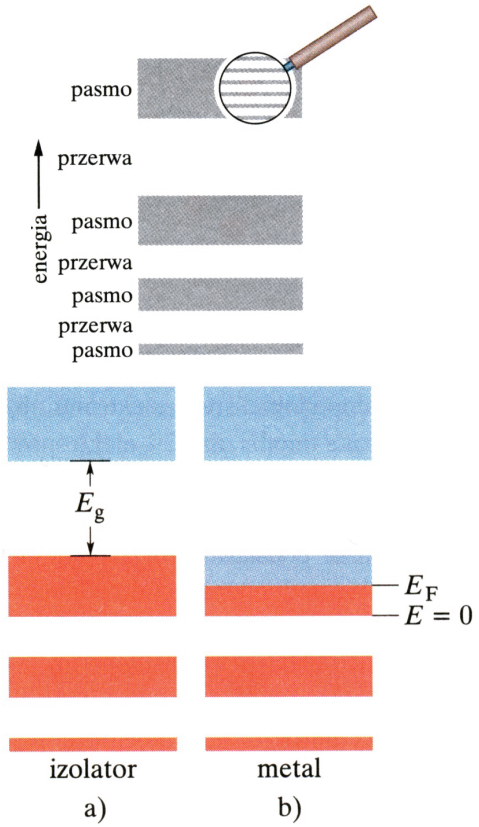
D. Halliday, R. Resnick, J. Walker „*Podstawy fizyki 5*", PWN Warszawa 2003



Obsadzenie podpowłok elektronowych elektrycznie obojętnego atomu miedzi.

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker „*Podstawy fizyki 5*", PWN Warszawa 2003

Struktura energetyczna ciała stałego:
poziomy energetyczne tworzą pasma energetyczne, które oddzielone są przerwą energetyczną.



D. Halliday, R. Resnick, J. Walker *„Podstawy fizyki 5”*, PWN Warszawa 2003

Izolatory – materiały, które nie przewodzą prądu elektrycznego.
Układ pasm i przerw tworzący strukturę energetyczną izolatora –
rysunek po lewej (a):
poziomy obsadzone – niebieskie,
poziomy nieobsadzone – czerwone.

Metale
Układ pasm i przerw tworzący strukturę energetyczną metalu (b).
Poziom Fermiego – najwyższy obsadzony poziom w paśmie ($T = 0$ K).
Odpowiadająca mu energia to energia Fermiego E_F.

Oszacowanie liczby elektronów przewodnictwa

Całkowita liczba elektronów przewodnictwa wynosi:

$$\begin{pmatrix} liczba\ elektronów \\ przewodnictwa\ w\ próbce \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} liczba\ atomów \\ w\ próbce \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} liczba\ elektronów\ walencyjnych \\ przypadających\ na\ atom \end{pmatrix} \tag{5.74}$$

Koncentracja elektronów przewodnictwa w próbce:

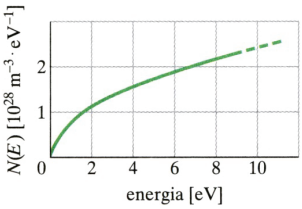
$$n = \frac{liczba\ elektronów\ przewodnictwa\ w\ próbce}{objętość\ próbki\ V} \tag{5.75}$$

$$\begin{pmatrix} liczba\ atomów \\ w\ próbce \end{pmatrix} = \frac{masa\ próbki}{masa\ atomowa} = \frac{masa\ próbki}{masa\ molowa\ M/N_A} = \frac{(gęstość\ materiału)(objętość\ próbki\ V)}{masa\ molowa\ M/N_A} \tag{5.76}$$

gdzie masa molowa jest masą jednego mola materiału, z którego wykonana jest próbka,
N_A – stała Avogadra $(6{,}02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1})$

Obliczenie prawdopodobieństwa i liczby stanów kwantowych

Gęstość stanów:



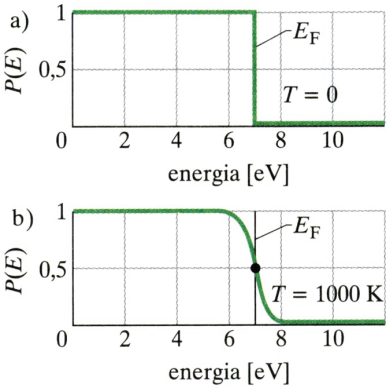
D. Halliday, R. Resnick, J. Walker „*Podstawy fizyki 5*", PWN Warszawa 2003

$$N(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} E^{1/2} \tag{5.77}$$

gdzie m – masa elektronu, E – energia, dla której obliczamy gęstość stanów.

Statystyka Fermiego-Diraca: zbiór reguł określających kwantowe zasady obliczania prawdopodobieństwa.

Gdy $T = 0\ K$:
dla wszystkich poziomów poniżej energii Fermiego $P(E) = 1$,
dla wszystkich poziomów powyżej energii Fermiego $P(E) = 0$.
W temperaturach wyższych niż temperatura zera bezwzględnego prawdopodobieństwo obsadzenia jest równe:



D. Halliday, R. Resnick, J. Walker „*Podstawy fizyki 5*", PWN Warszawa 2003

$$P(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \tag{5.78}$$

gdzie E_F – energia Fermiego.

- dla $E < E_F$, czynnik wykładniczy równy jest $e^{-\infty}$, czyli 0, a więc $P(E) = 1$,
- dla $E > E_F$, czynnik wykładniczy równy jest $e^{+\infty}$, a więc $P(E) = 0$,
- jeśli $E = E_F$, czynnik wykładniczy równy jest e^0, czyli 1, a więc $P(E_F) = 0{,}5$.

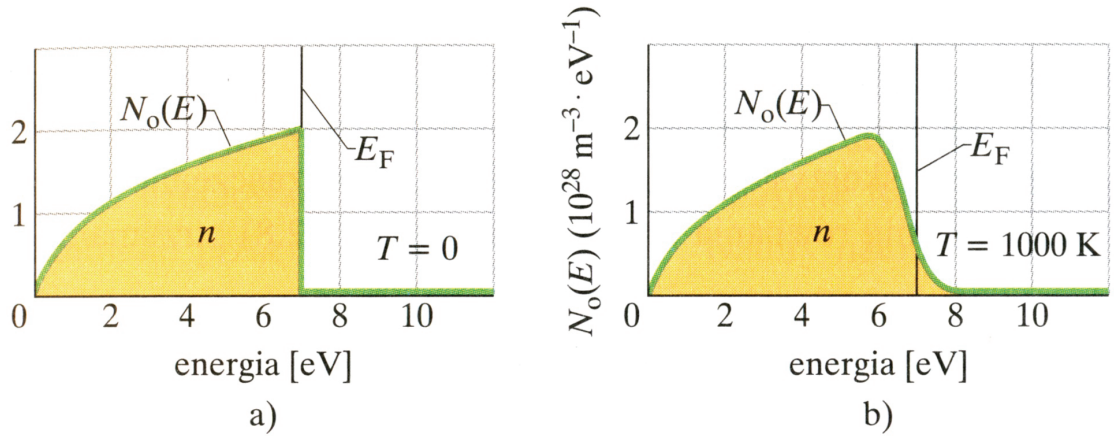
Energia Fermiego – energia stanu kwantowego, którego prawdopodobieństwo obsadzenia wynosi 0,5.

Obliczenie liczby stanów obsadzonych

Gęstość stanów obsadzonych:

$$\begin{pmatrix} gęstość\ stanów \\ obsadzonych\ N_0(E) \\ dla\ energii\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gęstość\ stanów \\ N(E)\ dla\ energii\ E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} prawdopodobieństwo \\ obsadzenia\ P(E) \\ dla\ energii\ E \end{pmatrix} \tag{5.78}$$

$$N_0(E) = N(E)P(E) \tag{5.79}$$



Gęstość stanów obsadzonych $N_0(E)$ dla miedzi w temperaturze
a) 0 K, b) 1000 K.

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker „*Podstawy fizyki 5*", PWN Warszawa 2003

Obliczanie energii Fermiego

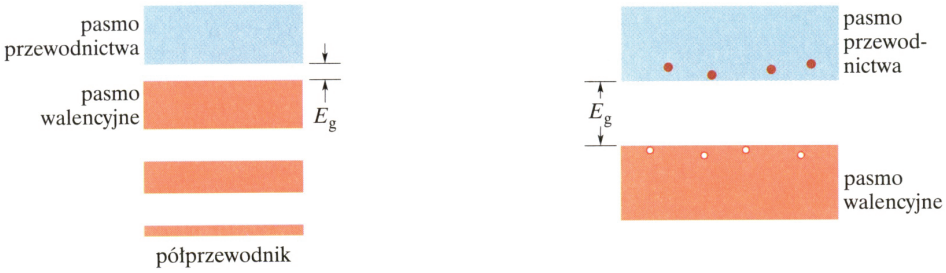
Liczba elektronów przewodnictwa przypadających na jednostkę objętości w metalu:

$$n = \int_0^{E_F} N_0(E)dE \tag{5.80}$$

$$n = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3}\int_0^{E_F} E^{1/2}dE = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3}\frac{2{E_F}^{3/2}}{3} \tag{5.81}$$

$$E_F = \left(\frac{3}{16\sqrt{2}\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{m}n^{2/3} = \frac{0{,}121h^2}{m}n^{2/3} \tag{5.82}$$

Półprzewodniki



Opór właściwy:

$$\rho = m/e^2 n\tau \tag{5.83}$$

m – masa elektronu,
e – ładunek elementarny,
n – liczba ładunków przypadających na jednostkę objętości,
τ – średni czas pomiędzy zderzeniami nośników ładunku.

Temperaturowy współczynnik oporu:

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT} \tag{5.84}$$

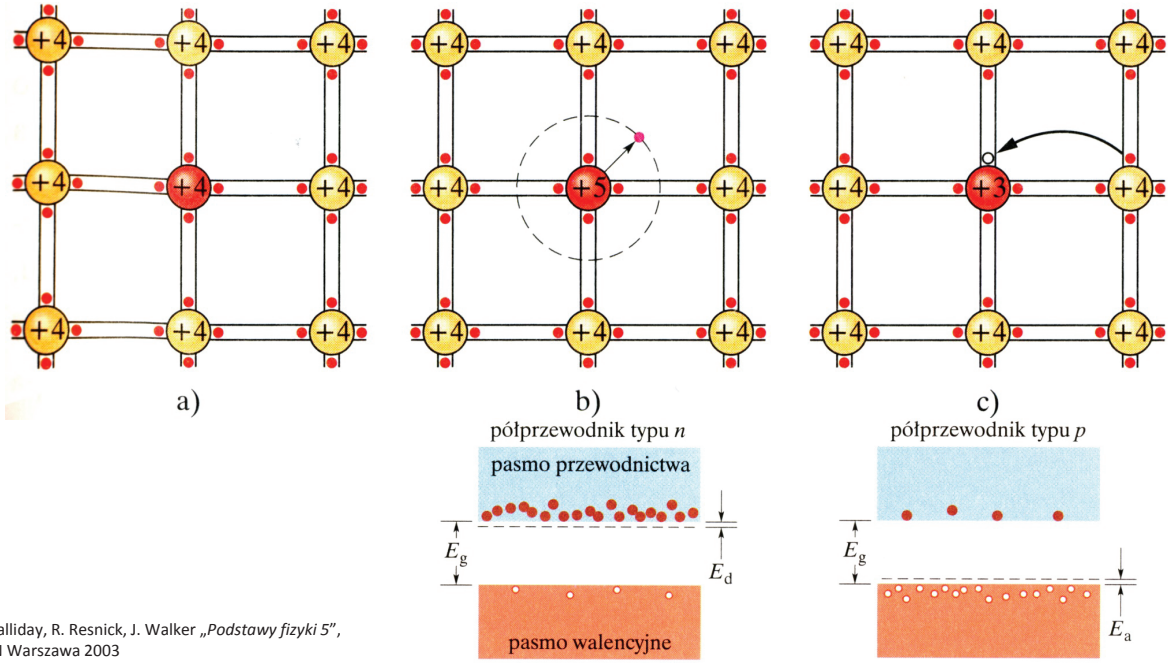
D. Halliday, R. Resnick, J. Walker *„Podstawy fizyki 5”*, PWN Warszawa 2003

Półprzewodniki domieszkowane

Typ *n* i *p*

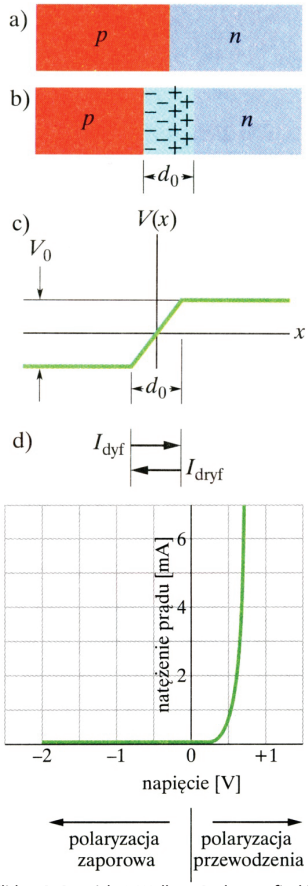
Schemat struktury krystalicznej:

a) czystego krzemu,
b) z „wstawionym” atomem fosforu (wartościowość 5) – ***donor***,
c) z „wstawionym” atomem glinu (wartościowość 3) – ***akceptor***.

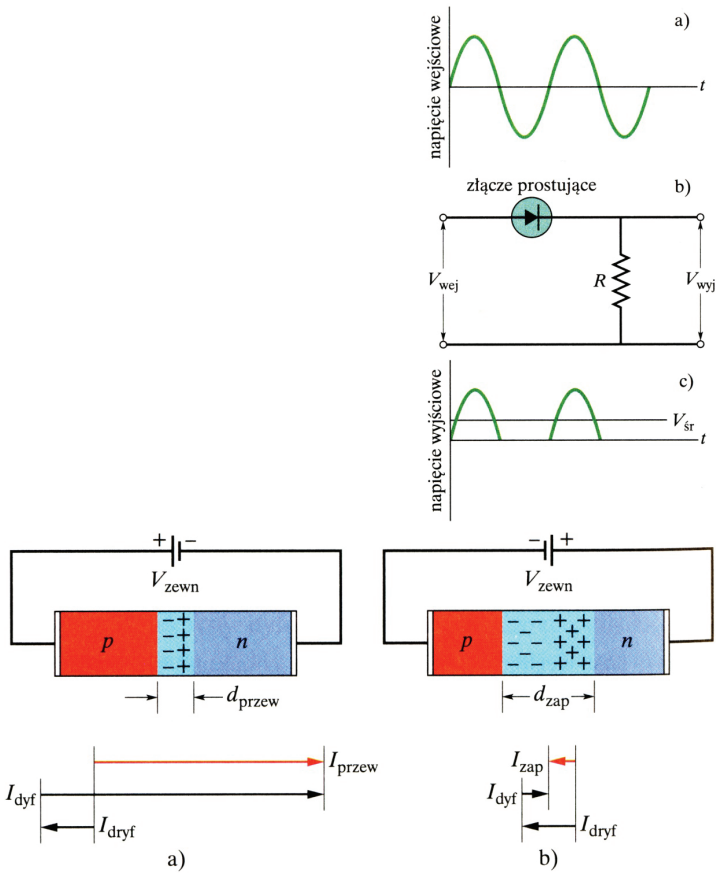


D. Halliday, R. Resnick, J. Walker *„Podstawy fizyki 5”*, PWN Warszawa 2003

Złącze p-n



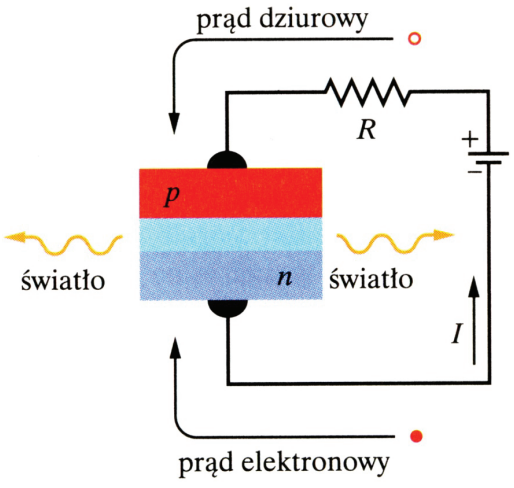
D. Halliday, R. Resnick, J. Walker „*Podstawy fizyki 5*", PWN Warszawa 2003



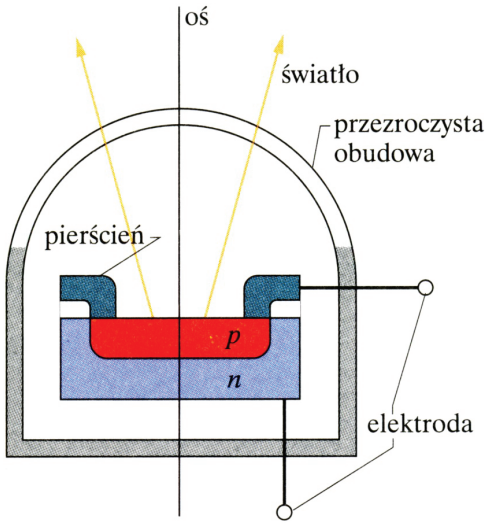
D. Halliday, R. Resnick, J. Walker „*Podstawy fizyki 5*", PWN Warszawa 2003

Dioda świecąca (LED)

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{E_g/h} = \frac{hc}{E_g}$$



Złącze p-n spolaryzowane w kierunku przewodzenia



Budowa diody świecącej – przekrój osiowy

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker „*Podstawy fizyki 5*", PWN Warszawa 2003

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker „*Podstawy fizyki 5*", PWN Warszawa 2003