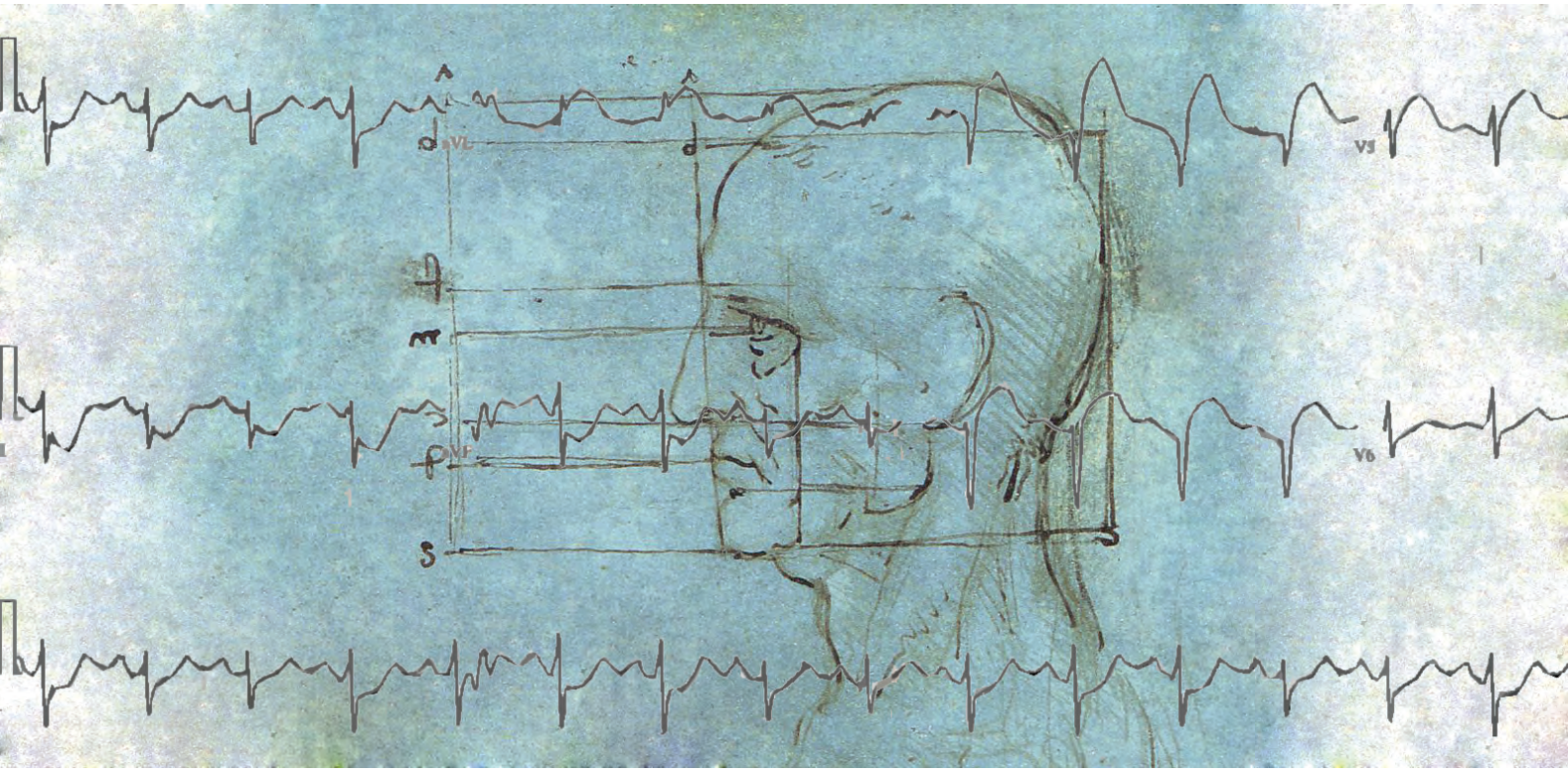


Podstawy fizyki teoretycznej 1

wykład

Robert Alicki

Gdańsk, 2013

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytetu Gdańskiego

Skrypt powstał w ramach projektu „Kształcimy profesjonalistów – kompleksowy program kształcenia skierowany do studentów, absolwentów oraz studentów niepełnosprawnych Uniwersytetu Gdańskiego”
współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach środków Europejskiego Funduszu Społecznego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET GDAŃSKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Podstawy fizyki teoretycznej dla fizyki medycznej

I. Mechanika klasyczna

Robert Alicki

21 czerwca 2013

Wstęp

Cześć pierwsza wykładu *Podstawy fizyki teoretycznej dla fizyki medycznej* ma na celu zapoznanie studentów z nieco bardziej zaawansowanym, niż to miało miejsce podczas wykładu *Podstawy fizyki*, formalizmem matematycznym mechaniki klasycznej i elektrodynamiki. Oba te działy fizyki stanowią fundament tego co nazywamy *fizyką klasyczną* w odróżnieniu od współczesnej teorii opisującej podstawowe prawa mikroświata - *fizyki kwantowej*. Fizyka klasyczna zastosowana do obiektów makroskopowych, gdy nie interesuje nas szczegółowy opis ich struktury wewnętrznej, spełnia swoje zadanie jako znakomite przybliżenie. Mechanika klasyczne i elektrodynamika wraz z mechaniką ośrodków ciągłych różnią się przede wszystkim zastosowanym formalizmem matematycznym. Ta pierwsza posługuje się pojęciem trajektorii w przestrzeni konfiguracyjnej czyli przestrzeni położeń. Trajektoria opisana jest przez układ funkcji zależnych od czasu (inaczej przez wektorową funkcję czasu) a podstawowe równania mechaniki klasycznej to *różniczkowe równania zwyczajne*. Do ich sformułowania wystarczy znajomość pojęcia pochodnej a także podstawowych elementów rachunku wektorowego. Równania te to przede wszystkim równania Newtona a także ich matematyczne rozwinięcie w postaci równań Eulera-Lagrange'a i równań Hamiltona. Elektrodynamika wraz z mechaniką ośrodków ciągłych posługuje się pojęciem *pola* czyli funkcji, lub układu funkcji, nie tylko zależnych od czasu ale także od położenia w przestrzeni. Podstawowe równania elektrodynamiki to równania Maxwella oraz równoważne im równania dla potencjałów. Rozwiązywanie tych równań wymaga wprowadzenia narzędzi matematycznych teorii *równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych* takich jak funkcje Greena czy transformata Fouriera. Oczywiście, ze względu na niewielką objętość tego wykładu skupimy się raczej na konkretnych zastosowaniach i ich fizycznej interpretacji a nie na systematycznym przedstawieniu odpowiednich działów matematyki. Część zaprezentowanych przykładów dotyczy zagadnień ważnych dla biofizyki lub dotyczących fizycznych zasad funkcjonowania urządzeń stosowanych w diagnostyce lub leczeniu.

Dla zrozumienia treści wykładów niezbędne jest przypomnienie sobie treści wspomnianego już wykładu *Podstawy fizyki* dotyczących mechaniki i elektrodynamiki jak również wykładów z analizy matematycznej i algebry z geometrią.

Rozdział 1

Mechanika pojedynczej cząstki

Ruch pojedynczej cząstki traktowanej jako punkt materialny to zmiana w czasie jej położenia w przestrzeni. Pojęcia czasu i przestrzeni są więc pojęciami fundamentalnymi nie tylko zresztą dla mechaniki ale i całej fizyki. Łącząc przestrzeń i czas otrzymujemy *czasoprzestrzeń* składającą sie z punktów, które nazywamy *zdarzeniami*. Zdarzenie jest matematyczną idealizacją zjawiska, które zachodzi w bardzo małym obszarze przestrzeni i trwa bardzo krótko. Poznanie struktury czasoprzestrzeni jest jednym z najważniejszych zadań fizyki. Omówimy teraz pokrótce ewolucję tego pojęcia i opis kinematyki dla różnych modeli czasoprzestrzeni. Następnie skupimy się na modelu czasoprzestrzeni Galileusza i Newtona i opiszemy w ramach tego modelu dynamikę pojedynczej cząstki.

1.1 Czasoprzestrzeń Galileusza i Newtona

Podstawowym postulatem fizyki newtonowskiej jest istnienie czasu absolutnego, który płynie jednakowo we wszystkich punktach przestrzeni i we wszystkich układach odniesienia. Pozwala to opisać ruch cząstki za pomocą funkcji $\mathbf{r}(t)$ gdzie t oznacza czas a $\mathbf{r}$ opisuje położenie w przestrzeni. Równania dynamiki Newtona przyjmują najprostrzą postać w kartezjańskich układach współrzędnych gdzie $\mathbf{r}(t)$ jest wektorem wodzącym punktu materialnego opisanym trzema współrzędnymi $\mathbf{r}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$ i takimi układami będziemy się dalej posługiwać. Odległość l między dwoma punktami $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ zdefiniowana jako

$$l^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \tag{1.1}$$

nie zależy od wyboru układu. Oznacza to, że modelem przestrzeni w teorii newtonowskiej jest trójwymiarowa płaska przestrzeń euklidesowa.

1.1.1 Funkcje wektorowe

Stosujemy standardowe oznaczenia iloczynu skalarnego i wektorowego dwóch wektorów (kartezjańskich) a także kilka równoważnych oznaczeń dla długości wektora

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\quad \mathbf{a}\times\mathbf{b},\quad |\mathbf{a}|\equiv\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\equiv\sqrt{\mathbf{a}^2}\equiv a. \tag{1.2}$$

Do opisu ruchu cząstek będziemy używać różnego rodzaju funkcji wektorowych zależnych od czasu i położenia w przestrzeni. Odpowiednio będziemy je oznaczać jako $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$. a gdy położenie jest także funkcją czasu jako $\mathbf{A}(\mathbf{r}(t),t)$. I tak np. pole wektorowe $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ jest w danym kartezjańskim układzie współrzędnych określone przez trzy funkcje $A_x(x,y,z,t)$, $A_y(x,y,z,t)$, $A_z(x,y,z,t)$. Dla dwóch zależnych od czasu funkcji wektorowych możemy obliczyć pochodną po czasie ich iloczynu skalarnego lub wektorowego korzystając ze wzorów

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\Big)=\mathbf{B}\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{B},\quad \frac{d}{dt}\Big(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\Big)=\Big(\frac{d}{dt}\mathbf{A}\Big)\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\frac{d}{dt}\mathbf{B}. \tag{1.3}$$

Pochodna po czasie złożonej funkcji $\mathbf{A}(\mathbf{r}(t),t)$ jest dana formułą

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{r}(t),t)=\Big(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\Big)\mathbf{A}+\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} \tag{1.4}$$

gdzie $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ jest wektorowym operatorem gradientu.
Będziemy też używać całki z pola wektorowego wzdłuż trajektorii $\mathbf{r}(t)$ postaci

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}\equiv\int_{t_1}^{t_2}\Big[\mathbf{A}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)\Big]\,dt. \tag{1.5}$$

1.1.2 Prędkość i przyśpieszenie, transformacje Galileusza

Mając daną trajektorię cząstki $\mathbf{r}(t)$ definiujemy *wektor prędkości* i jego składowe

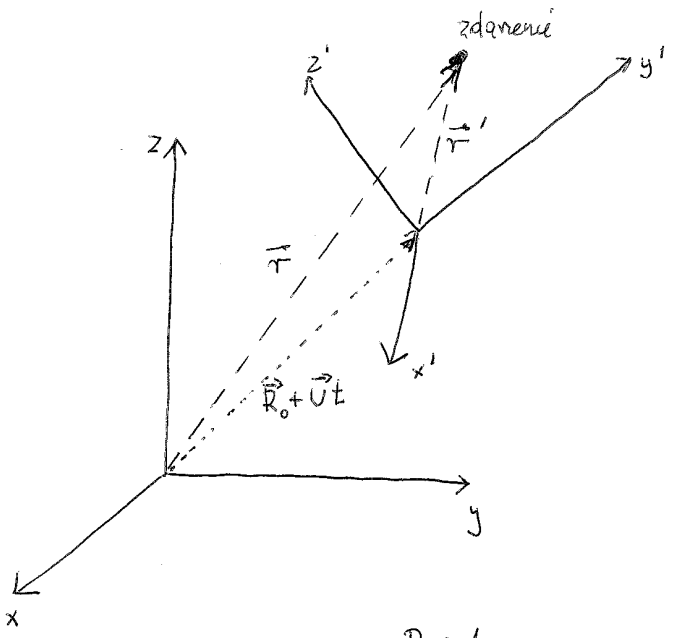
$$\mathbf{v}(t)=\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t),\quad v_x=\frac{dx}{dt},\ v_y=\frac{dy}{dt},\ v_z=\frac{dz}{dt} \tag{1.6}$$

oraz wektor przyśpieszenia

$$\mathbf{a}(t)=\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t)=\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t),\quad a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2},\ a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2},\ a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{1.7}$$

Będziemy też używać tradycyjnej notacji dla pochodnych po czasie, np.:

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}},\quad \mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=\ddot{\mathbf{r}}. \tag{1.8}$$



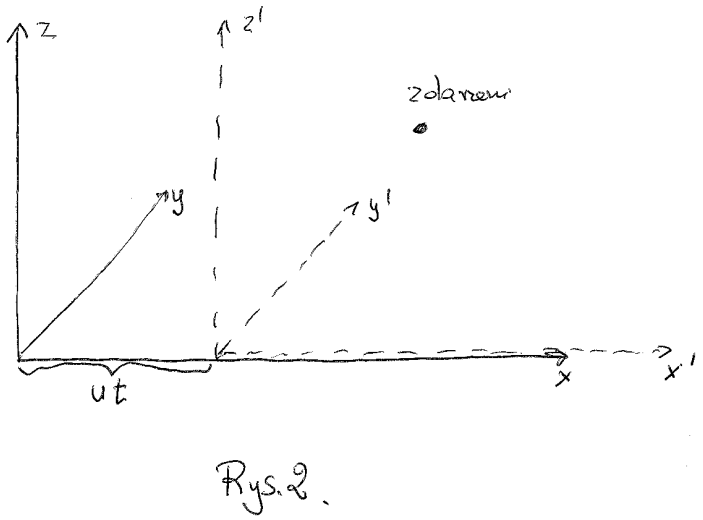
Rys. 1.

Rysunek 1.1: Dwa układy kartezjańskie poruszające się ze względną prędkością $\mathbf{u}$

Ruch tej samej cząstki jest opisywany w innym układzie odniesienia poruszającym się ze stałą prędkością $\mathbf{u}$ względem piewszego następującymi parametrami (patrz Rys.1.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}_0 - \mathbf{u}t, \\ \mathbf{v}'(t) &= \mathbf{v}(t) - \mathbf{u}, \\ \mathbf{a}'(t) &= \mathbf{a}(t) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Jak zauważył to już Galileusz powyższe przekształcenie (zwane *transformacją Galileusza*) nie zmienia przyśpieszenia cząstki, a przez to również równania Newtona, co oznacza, że jeśli tylko prawa Newtona obowiązują w jednym wybranym układzie to obowiązują one także we każdym układzie poruszającym się względem niego ze stałą prędkością. Na koniec zapiszmy *szczególną transformację Galileusza* jako transformację współrzędnych czasoprzestrzennych danego zdarzenia przy założeniu, że w pewnej chwili $t = 0$ oba kartezjańskie układy pokrywały



Rys.2.

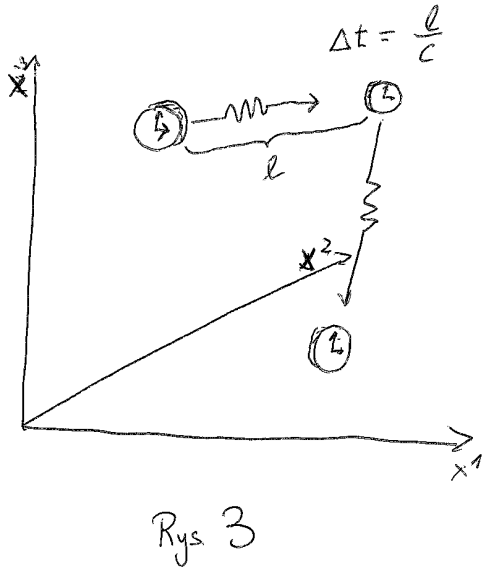
Rysunek 1.2: Szczególna transformacja Galileusza

się a prędkość **u** jest skierowana zgodnie z osią x (Rys.1.2)

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= x - ut, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{1.10}$$

1.1.3 Inercjalne układy odniesienia

Inercjalne układy odniesienia to takie, w których obowiązują prawa dynamiki Newtona. Określając jeden taki układ zdefiniujemy również wszystkie inne jako te poruszające się względem niego ze stałymi prędkościami. Wybór tego wzorcowego ma zwykle charakter przybliżony. Często układ laboratoryjny związany sztywno z powierzchnią Ziemi jest wystarczającym przybliżeniem układu inercjalnego, jednak obecność pozornych *sił bezwładności* (efekt Coriolisa) wskazuje, że jest to jedynie przybliżenie. Lepszym układem inercjalnym jest ten związany ze Słońcem, jeszcze lepszy to umieszczony w centrum naszej Galaktyki, a być może ostatecznym,



Rysunek 1.3: Synchronizacja zegarów za pomocą impulsów światła.

najlepszym układem inercjalnym jest ten wyznaczony przez *promieniowanie reliktowe* - ślad po wczesnych etapach ewolucji Wrzechświata.

1.2 Czasoprzestrzeń Einsteina

Prostą konsekwencją transformacji Galileusza (1.9) jest reguła dodawania prędkości $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$ co powoduje, że każda prędkość, w tym prędkość światła nie może być wielkością bezwzględną ale musi zależeć od wyboru układu odniesienia. Negatywne wyniki pomiarów zależności prędkości światła od jej kierunku względem ruchu Ziemi wykonanych przez Michelsona i Morleya skłoniły Einsteina do rezygnacji z pojęcia czasu absolutnego i przyjęcia prędkości światła $c \simeq 300.000 km/sek$ jako uniwersalnej stałej fizycznej niezależnej od ruchu źródła i detektora światła. Czas stał się teraz wielkością mierzoną w określony operacyjnie sposób za pomocą zegarów rozmieszczonych w przestrzeni i zsynchronizowanych za pomocą światła w danym układzie inercjalnym (Rys.1.3).

1.2.1 Transformacje Lorentza

Przejście z jednego układu inercjalnego do drugiego jest teraz opisywane *transformacjami Lorentza*, które zastępują transformacje Galileusza (1.9), w tym *szczególne transformacje Lorentza* zastępują (1.10)

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - \left(\frac{u}{c^2}\right)x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \\ x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Postać transformacji Lorentza pokazuje, że czas t jest taką samą współrzędną opisującą "położenie" zdarzenia w czasoprzestrzeni jak współrzędne przestrzenne x, y, z, podlegającą zmianie przy przejściu z jednego układu inercjalnego do drugiego. Podobnie jak dowolny obrót w przestrzeni 3-wymiarowej można złożyć z trzech obrotów względem prostopadłych osi, tak samo dowolna transformacja Lorentza opisująca przejście z jednego układu inercjalnego do drugiego (jedyny warunek to pokrywanie się początków obu kartezjańskich układów współrzędnych w chwili $t = t' = 0$) może być przedstawiona jako złożenie trzech szczególnych transformacji Lorentza i trzech zwykłych obrotów. Dla podkreślenia podobnego statusu współrzędnych przestrzennych i czasowych wygodnie jest wprowadzić nową parametryzację i oznaczenia dla zdarzenia x:

$$x \equiv \{x^\mu\}, \quad \mu = 0,1,2,3, \quad x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z, \tag{1.12}$$

co pozwala przedstawić szczególną transformację Lorentza jako "pseudo-obrót" w płaszczyźnie x^0x^1

$$\begin{aligned} x^{0'} &= (\cosh\beta)x^0 - (\sinh\beta)\,x^1, \\ x^{1'} &= -(\sinh\beta)x^0 + (\cosh\beta)x^1, \end{aligned} \tag{1.13}$$

gdzie $\operatorname{tgh}\beta = \frac{u}{c}$. Niezmiennikiem przekształceń Lorentza jest *interwał czasoprzestrzenny* s opisujący "pseudo-odległość" (pseudo-metryka) między zdarzeniami o współrzędnych x^μ i y^μ

$$s^2 = (x^0 - y^0)^2 - \sum_{k=1}^{3}(x^k - y^k)^2 = (x^{0'} - y^{0'})^2 - \sum_{k=1}^{3}(x^{k'} - y^{k'})^2 \tag{1.14}$$

Przechodząc do nieinercjalnego układu współrzędnych tracimy prostą postać (1.14) i musimy zadowolić się infinitezymalną postacią interwału pomiędzy bliskimi siebie zdarzeniami x i $x+dx$

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \tag{1.15}$$

W powyższej formule zastosowaliśmy *konwencję sumacyjną Einsteina*[1], a macierz $[g_{\mu\nu}(x)]$, zależna od punktu czasoprzestrzeni jest macierzą symetryczną, którą można zdiagonalizować do postaci $[1, -1, -1, -1]$.

1.2.2 Przestrzeń Minkowskiego, 4-wektory

Czasoprzestrzeń wyposażona w "pseudo-odległość" (1.14) i transformacje Lorentza jako grupę symetrii tej przestrzeni jest 4-wymiarową płaską przestrzenią pseudo-euklidesową zwaną *przestrzenią Minkowskiego*. Podobnie jak np. w 3-wymiarowej przestrzeni euklidesowej różnice współrzędnych dla dwóch zdarzeń $A^\mu = x^\mu - y^\mu$ stanowią model 4-wektora (w postaci *kontrawariantnej*) o ustalonej regule transformacji przy przejściu z jednego układu odniesienia do drugiego. Postać *kowariantną* 4-wektora definiujemy jako A_μ, gdzie $A_0 = A^0, A_k = -A^k, k = 1, 2, 3$ co pozwala na elegancki zapis kwadratu *pseudo-długości wektora* przy wykorzystaniu konwencji sumacyjnej Einsteina (sumujemy po powtarzającym się górnym i dolnym indeksie)

$$|A|^2 = (A^0)^2 - \sum_{k=1}^{3}(A^k)^2 = A_\mu A^\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = \eta^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \tag{1.16}$$

gdzie $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ jest macierzą diagonalną $[1, -1, -1, -1]$.
Należy pamiętać, że współrzędne kowariantne wektora transformujemy za pomocą odwrotnej transformacji Lorentza a pseudo-długość jest niezmiennikiem tych transformacji (skalarem).
Zasada względności Galileusza mówiąca, że prawa fizyczne wyglądają tak samo we wszystkich układach inercjalnych, pozostaje w mocy ale teraz prawa te muszą być zgodne z transformacjami Lorentza. Nie stanowi to problemu dla równań elektrodynamiki, gdyż jak zauważył Lorentz, są one niezmiennicze względem (1.11) ale wymaga to modyfikacji praw mechaniki, a w szczególności kinematyki cząstki. Praktycznie *relatywistyczna niezmienniczość* praw fizyki wymaga zapisania ich za pomocą 4-wektorów lub obiektów geometrycznych od nich pochodnych (tensorów).

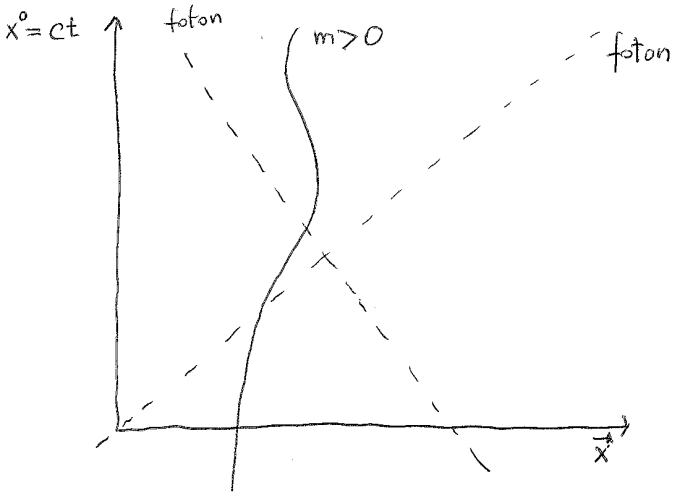
1.2.3 Kinematyka cząstki relatywistycznej

Rysunek 1.4 przedstawia trajektorię cząstki w przestrzeni Minkowskiego. Krzywą tę, zwaną *linią świata* można sparametryzować za pomocą *czasu własnego* τ - wielkości skalarnej zdefiniowanej w następujący sposób

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt, \tag{1.17}$$

gdzie v to bezwzględna wartość prędkości cząstki o składowych $v^k = \frac{dx^k}{dt}$, $k = 1, 2, 3$ wyznaczonych w danym układzie odniesienia. Nazwa czas własny wynika z tego, że $d\tau = dt'$ dla czasu t' mierzonego w takim układzie odniesienia, w którym w danej chwili cząstka spoczywa. Czas własny cząstki lub większego ciała to czas, który rządzi procesami fizycznymi zachodzącymi w tym ciele. Mogą to być procesy spontanicznego rozpadu cząstki elementarnej, mechaniczne,

[1]Sumujemy po powtarzającym się górnym i dolnym indeksie



Rysunek 1.4: Linia świata cząstki o niezerowej masie i linie świata fotonów.

elektryczne lub atomowe oscylacje będące podstawą funkcjonowania zegara czy biologiczne procesy życiowe. Wszystkie zgodnie z formułą (1.17) ulegną spowolnieniu co zostało potwierdzone doświadczalnie w przypadku szybko poruszających się niestabilnych cząstek czy zegarów wynoszonych przez satelity. Również bliźniak podróżujący z prędkością bliską prędkości światła będzie po powrocie młodszy od swego osiadłego brata. Trudno jednak zalecić takie podróże jako terapię przedłużającą życie, gdy podróżujący bliźniak nie odczuje spowolnienia czasu a jedynie może doznać szoku spotykając mocno podstarzałych krewnych i znajomych.
Inną konsekwencją formuły (1.17) jest to, że czas własny staje się liczbą urojoną gdy prędkość cząstki przekroczy prędkość światła co oznacza, że c jest maksymalną prędkością jaką można osiągnąć.

Mając linię świata cząstki, $x^\mu(\tau)$, sparametryzowaną jej czasem własnym możemy zdefiniować 4-wektor prędkości

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad u^k = \frac{v^k}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \ k = 1,2,3. \tag{1.18}$$

Zauważmy, że 4-prędkość spełnia tożsamość

$$u_\mu u^\mu = c^2. \tag{1.19}$$

Podobnie można wprowadzić 4-przyśpieszenie $\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$.

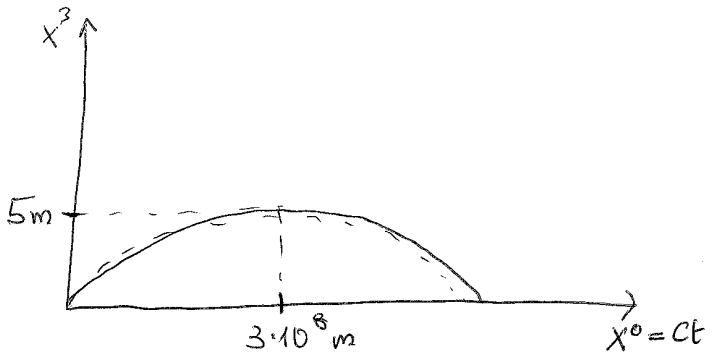
1.3 Czasoprzestrzeń zakrzywiona

Ogólna teoria względności Einsteina jest teorią grawitacji zakładającą, że źródłem oddziaływań grawitacyjnych jest zmiana geometrii czasoprzestrzeni. Punktem wyjścia jest obserwacja, którą poczynił już Galileusz, iż przyśpieszenie w polu grawitacyjnym nie zależy od masy ciała lub innymi słowy masa grawitacyjna i masa określająca bezwładność ciała są sobie równe. Oznacza to, że przechodząc do odpowiedniego nieinercjalnego układu odniesienia można, przynajmniej lokalnie, "wyłączyć" grawitację. Przykładem jest tu spadająca swobodnie winda, której pasażerowie przez chwilę znajdą się w stanie nieważkości. Skoro więc grawitacji nie można odróżnić lokalnie od pozornych "sił bezwładności" a siły te pojawiają się w układach nieinercjalnych to nasuwa się wniosek, że wpływ grawitacji na ruch cząstki można opisać modyfikując pseudometrykę czasoprzestrzeni i opisując ją formułą (1.15). W ten sposób przechodzimy od płaskiej pseudo-euklidesowej czasoprzestrzeni opisanej przez (1.14) do *czasoprzestrzeni zakrzywionej*. W takiej przestrzeni "linia prosta" jest taką krzywą, zwaną *krzywą geodezyjną*, która dla każdej pary punktów na niej leżących wyznacza najkrótszą (pseudo) odległość między nimi. Rysunek 5 przedstawia linię świata kamienia podrzuconego pionowo w polu grawitacyjnym Ziemi. Jest to w przybliżeniu parabola, która jak można pokazać jest krzywą geodezyjną dla interwału czasoprzestrzennego opisanego formułą

$$(ds)^2 = \sqrt{c^2 + 2\phi(\mathbf{x})}\,(dt)^2 - (|d\mathbf{x}|)^2, \tag{1.20}$$

gdzie $\phi(\mathbf{x})$ jest newtonowskim potencjałem grawitacyjnym Ziemi ($\phi(\mathbf{x}) = -G\frac{M_Z}{|\mathbf{x}|}$, G - stała grawitacji , M_Z- masa Ziemi, początek kartezjańskiego układu odniesienia umieszczony w środku Ziemi).

Modyfikacja geometrii czasoprzestrzeni opisana formułą (1.20) odpowiada przybliżeniu słabego pola grawitacyjnego i dla ciał poruszających się z niewielkimi prędkościami odtwarza wyniki newtonowskiej teorii powszechnego ciążenia. Jednak nawet ta uproszczona formuła przewiduje nowy efekt - grawitacyjne przyśpieszenie czasu w układzie wyniesionym wysoko nad powierzchnię Ziemi. Ścisłe równania ogólnej teorii względności opisujące z jednej strony zmianę geometrii czasoprzestrzeni przez materię, a z drugiej ruch cząstki próbnej w zakrzywionej czasoprzestrzeni są raczej skomplikowane i nie będą tu przytaczane.



Rys 5

Rysunek 1.5: Linia świata kamienia podrzuconego pionowo na wysokość $5m$. Zwróćmy uwagę na to, że używając tej samej skali dla x^0 i x^3 otrzymalibyśmy prawie linię prostą (niewielkie zakrzywienie czasoprzestrzeni).

1.4 Czasoprzestrzenie wielowymiarowe

Wkrótce po opublikowaniu prac Einsteina zawierających równania ogólnej teorii względności Kaluza (Kałuża?) i Klein zauważyli, że podobne równania dla 5-wymiarowej czasoprzestrzeni pozwalają w naturalny sposób zunifikować teorię grawitacji Einsteina i elektrodynamikę w jednolitą teorię o czysto geometrycznym charakterze. Ten dodatkowy wymiar należy "zwinąć" w okrąg o mikroskopowych rozmiarach tak aby tworzył on dodatkową "przestrzeń wewnętrzną", która nie jest postrzegana przez nasze zmysły. Ta idea "kompaktyfikacji" dodatkowych wymiarów czasoprzestrzeni aby w naturalny sposób stworzyć miejsce dla działania wewnętrznych symetrii obecnych w każdej teorii cząstek elementarnych pojawia się przy okazji różnych propozycji "Ostatecznej Teorii Wszystkiego". Można tu wymienić teorię supergrawitacji, teorię strun czy tzw. M-teorię. Motywacją dla tych poszukiwań są fundamentalne trudności z włączeniem grawitacji do współczesnej teorii cząstek elementarnych (tzw. *modelu standardowego*) a także zbyt duża liczba parametrów w tym modelu co kłóci się z koncepcją prostoty i elegancji fundamentalnych praw przyrody. Jak się wydaje ani obecnie ani w dającej się przewidzieć

przyszłości nie uda się eksperymentalnie zweryfikować tych teorii a koncepcja dodatkowych wymiarów czasoprzestrzeni pozostanie inspiracją dla autorów powieści i filmów *science fiction*.

1.5 Równanie Newtona i rodzaje sił

Ograniczymy się teraz do teorii Newtona przyjmując model czasoprzestrzeni, w którym czas jest absolutny a przestrzeń jest trójwymiarową przestrzenią euklidesową. Dynamika pojedynczej cząstki jest w pełni opisana równaniem Newtona

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \tag{1.21}$$

gdzie, jak poprzednio $\mathbf{a}$ oznacza przyśpieszenie, m masę cząstki a $\mathbf{F}$ jest wypadkową siłą działającą na cząstkę. Inne sformułowanie równania Newtona wykorzystuje pojęcie wektora pędu $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ i ma postać

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \tag{1.22}$$

co pozwala je zastosować także do przypadków zmiennej masy.

Z równaniem Newtona wiąże się kilka zasadniczych problemów.

1) *Kiedy ciało możemy opisywać jako "cząstkę", to znaczy obiekt traktowany jako punktowy ?*
Nie ma tu jednoznacznej odpowiedzi i należy kierować się tu tzw. intuicją fizyczną. Jak zobaczymy w dalszej części wykładu, często możemy opisywać ruch ciała poprzez ruch jego środka masy. W zależności od rozważanego problemu nawet cała galaktyka może być traktowana jako cząstka gdy interesuje nas względny ruch wielu dostatecznie oddalonych od siebie galaktyk.

2) *W jakim układzie odniesienia obowiązuje równanie Newtona ?*
Równanie Newtona (1.21) obowiązuje w inercjalnym kartezjańskim układzie odniesienia. Aby jednak uniknąć argumentów typu "zamkniętego koła" musimy określić siły działające na cząstkę używając do tego odpowiedniej teorii jak np. teorii powszechnego ciążenia Newtona, elektrodynamiki czy też bardziej fenomenologicznych teorii opisujących siły oporu i tarcia. Wtedy spełnianie równania Newtona jest kryterium dobrego wyboru inercjalnego układu odniesienia.

3) *Czym jest masa cząstki?*
Fakt, że cząstce można przypisać stałą masę charakteryzującą jej bezwładność czyli podatność na działanie siły i masa ta nie zależy od prędkości czy rodzaju siły jest faktem doświadczalnym dobrze potwierdzonym w obszarze prędkości znacznie mniejszych od prędkości światła. Pojęcie masy ulega pewnej modyfikacji w szczególnej, a nabiera głębszego sensu w ogólnej teorii względności.

4) *Czym jest siła?*
Siła jest wielkością wektorową, podlega więc zasadzie superpozycji, czyli siła wypadkowa jest sumą wektorową sił pochodzących z różnych źródeł. Zależnie od sytuacji siłę można traktować jako przyłożoną w danym momencie do cząstki, czyli wyłącznie jako funkcję czasu $\mathbf{F}(t)$ albo jako zmienne w czasie i przestrzeni pole wektorowe $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ istniejące niezależnie od cząstki. Istnieją też siły zależne od położenia i prędkości $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$. Można pokazać, że zasada superpozycji

sił wyklucza zależność siły od przyśpieszenia i wyższych pochodnych $\mathbf{r}$ po czasie.

1.5.1 Siły potencjalne i zachowawcze, zasada zachowania energii

Dla *siły potencjalnej* istnieje pole skalarne $U(\mathbf{r},t)$ zwane *potencjałem* takie, że siła jest równa minus grandientowi potencjału

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},t) = -\nabla U(\mathbf{r},t). \tag{1.23}$$

Gdy potencjał nie zmienia się w czasie to odpowiadającą mu siłę nazywamy *zachowawczą*, potencjał staje się *energią potencjalną* cząstki $U(\mathbf{r})$, a suma energii kinetycznej i potencjalnej, $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r})$ jest zachowana (*zasada zachowania energii*). Jest to bezpośrednią konsekwencją równania Newtona i równania (1.23)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{m}\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla U(\mathbf{r}) = \mathbf{v}\cdot\Big(\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \nabla U(\mathbf{r})\Big) = 0. \tag{1.24}$$

Dla siły zachowawczej $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ praca W jaką trzeba wykonać aby wbrew tej sile przenieść cząstkę z punktu $\mathbf{r}_1$ do punktu $\mathbf{r}_2$ nie zależy od pokonanej drogi ale jedynie od wyboru tych punktów

$$W = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\nabla U\cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1). \tag{1.25}$$

Przykłady sił zachowawczych to siła grawitacyjna działająca na cząstkę o masie m, pochodząca od rozkładu mas $\rho(\mathbf{r})$

$$U(\mathbf{r}) = -Gm\iiint\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3\mathbf{r}', \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -Gm\iiint\frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,d^3\mathbf{r}', \tag{1.26}$$

lub siła elektrostatyczna działająca na cząstkę o ładunku q, pochodząca od rozkładu ładunku $\rho(\mathbf{r})$

$$U(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\iiint\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3\mathbf{r}', \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\iiint\frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,d^3\mathbf{r}', \tag{1.27}$$

gdzie ϵ_0 to przenikalność dielektryczna próżni.
Innym przykładem jest potencjał harmoniczny i odpowiadająca mu siła sprężystości, które w jednowymiarowym przypadku mają postać

$$U(x) = \frac{1}{2}k^2x^2, \quad F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -k^2x. \tag{1.28}$$

1.5.2 Siła Lorentza

Pole elektromagnetyczne składające się z pola elektrycznego $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ i pola magnetycznego $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ działa na cząstkę o ładunku q poruszającą się z chwilową prędkością $\mathbf{v}$ *siłą Lorentza*

$$\mathbf{F} = q\Big(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\Big). \tag{1.29}$$

Zauważmy, że siła Lorentza nie jest siłą zachowawczą ale obecność pola magnetycznego nie zmienia energii kinetycznej cząstki ponieważ

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{m\mathbf{v}^2}{2}\Big) = \mathbf{v}\cdot\Big(m\dot{\mathbf{v}}\Big) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{F} = q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}, \tag{1.30}$$

gdzie wykorzystaliśmy własność iloczynu mieszanego $\mathbf{v}\cdot[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] = 0$. Stąd wniosek, że pole magnetyczne jedynie zakrzywia trajektorię cząstki, która np. w jednorodnym polu magnetycznym porusza się po krzywej o kształcie spirali.

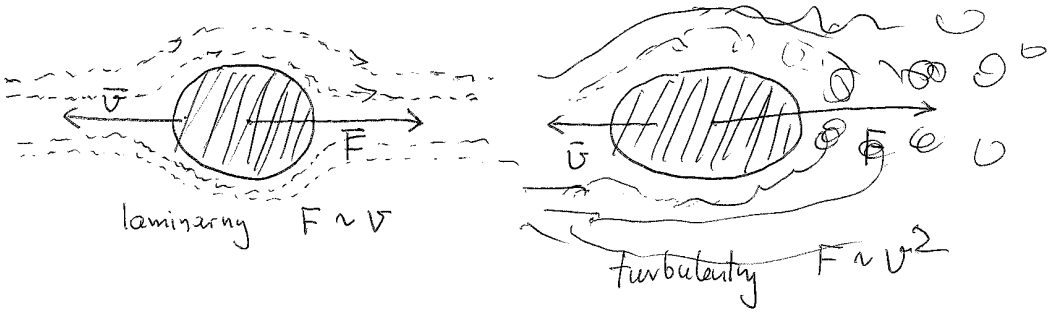
Ruch naładowanych cząstek w polu elektrycznym i magnetycznym wykorzystuje się w wielu urządzeniach medycznych. W *lampie rentgenowskiej* przyśpieszane w polu elektrycznym elektrony zderzają się z atomami anody produkując przenikliwe "promienie X" czyli fotony o odpowiednio wysokiej energii. W *cyklotronie* naładowane cząstki o ładunku q i masie m takie jak elektrony, protony i jony różnych pierwiastków poruszają się po okręgach w prostopadłym do płaszczyzny ruchu silnym jednorodnym polu magnetycznym B. Na ćwiczeniach pokażemy, że okres obiegu takiej cząstki jest stały i wynosi $T = 2\pi m/qB$ co pozwala przyśpieszać je periodycznym polem elektrycznym. Po osiągnięciu odpowiednio wysokiej energii cząstki te mogą być używane w radioterapii nowotworów lub do produkcji izotopów o krótkim czasie połowicznego rozpadu stosowanych w *pozytonowej tomografii emisyjnej* (PET). Trzeba też dodać, że zjawisko *zorzy polarnej*, które niewątpliwie ma pozytywny terapeutyczny wpływ na psychikę mieszkańców dalekiej Północy jest wywoływane przez naładowane cząstki *wiatru słonecznego* poruszające się po spiralnych trajektoriach w pobliżu biegunów magnetycznych Ziemi.

1.5.3 Siły niezachowawcze

Istnieje szereg przykładów sił niezachowawczych jak siły tarcia czy oporu, które prowadzą do rozpraszania (dysypacji) energii kinetycznej poruszających się ciał. Chociaż na poziomie mikroskopowym ich źródłem są fundamentalne oddziaływania elektromagnetyczne to ze względu na to, że odpowiadają za nie przypadkowe oddziaływania ogromnej liczby atomów wygodniej jest opisać je za pomocą przybliżonych formuł fenomenologicznych. Przykładem może być tu siła oporu działająca na ciało poruszające się z prędkością $\mathbf{v}$ w ośrodku gazowym lub ciekłym (Rys.1.6). Jeśli prędkość ciała nie jest zbyt duża to opływ ma charakter regularny (laminarny) a siła oporu jest proporcjonalna do prędkości. Dla wyższych prędkości opływ staje się chaotyczny (turbulentny) wytwarzając siłę proporcjonalną do kwadratu prędkości

$$\mathbf{F} = -\rho\mathbf{v}, \quad \mathbf{F} = -\kappa v^2\frac{\mathbf{v}}{v}, \tag{1.31}$$

gdzie ρ i κ to odpowiednie współczynniki oporu zależne od własności środowiska oraz rozmiarów i kształtu poruszającego się ciała.



Rys. 6

Rysunek 1.6: Siła oporu w zależności od charakteru opływu (laminarny lub turbulentny).

1.5.4 Tłumiony oscylator harmoniczny z wymuszeniem. Zjawisko rezonansu

Przykładem ważnego fizycznego układu opisywanego przez kilka typów sił jest tłumiony oscylator harmoniczny z siłą wymuszającą. Jego jedno-wymiarowa wersja opisywana jest równaniem postaci

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + k^2 x = F(t), \tag{1.32}$$

w którym występuje konserwatywna siła sprężystości $-k^2x$, siła oporu ośrodka proporcjonalna do prędkości $-\rho\dot{x}$ oraz zależna od czasu *siła wymuszająca* opisywana potencjałem $U(x,t) = -F(t)x$.

Jak pokażemy na ćwiczeniach ogólne rozwiązanie (1.32) jest sumą ogólnego rozwiązania dla równania jednorodnego, tzn. równania (1.32) z $F(t) \equiv 0$ i szczególnego rozwiązania (1.32). Jak pokażemy, to pierwsze, dla *słabego tłumienia* czyli dla

$$\rho < 2m\omega_0, \quad \omega_0 = \frac{k}{\sqrt{m}} \tag{1.33}$$

ma postać

$$x_0(t) = Ae^{-\frac{\rho}{2m}t}\sin(\omega_1 t + \phi) \tag{1.34}$$

gdzie częstość drgań tłumionych $\omega_1 = \sqrt{{\omega_0}^2 - \left(\frac{\rho}{2m}\right)^2}$ jest mniejsza of częstości drgań ω_0 nietłumionego oscylatora a rzeczywiste stałe A, ϕ mogą być wyznaczone z warunków początkowych dla położenia i prędkości.

Rozwiązanie szczególne nie zawiera już dowolnych stałych i daje się łatwo znaleźć dla szczególnego przypadku harmonicznej siły wymuszającej o częstości kołowej ω i amplitudzie a, tzn.

$$F(t) = a\sin\omega t. \tag{1.35}$$

Rozwiązanie to ma postać

$$\bar{x}(t) = B\sin(\omega t + \psi) \tag{1.36}$$

gdzie amplituda drgań wymuszonych dana formułą

$$B(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\frac{\rho\omega}{m})^2}} \tag{1.37}$$

osiąga maksimum dla *częstości rezonansowej* $\omega_r = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\left(\frac{\rho}{2m}\right)^2}$ (patrz Rys.7).

Przesunięcie fazowe obliczamy używając wzoru

$$\tan\psi = -\frac{\rho}{m}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}. \tag{1.38}$$

Zauważmy, że istotne dla przebiegów stacjonarnych (tzn. po wygaśnięciu stanów przejściowych) rozwiązanie szczególne (1.36),(1.37) dla zaburzenia harmonicznego (1.35) może być wykorzystane dla przypadku znacznie ogólniejszej postaci siły wymuszającej. Obowiązuje tu zasada superpozycji dla rozwiązania szczególnego, tzn. jeśli siła wymuszająca jest sumą sił , $F(t) = \sum_k F_k(t)$, to również rozwiązanie szczególne jest sumą rozwiązań , $\bar{x}(t) = \sum_k \bar{x}_(t)$. I tak siłę periodyczną o okresie T można rozwinąć w szereg Fouriera

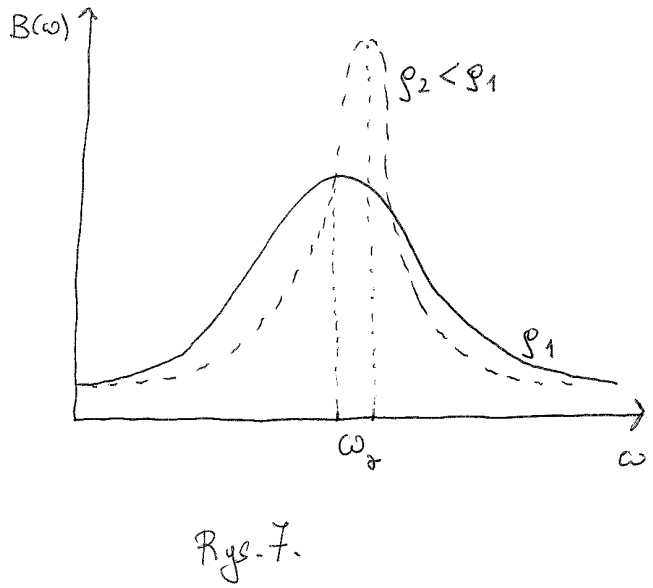
$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[c_n\sin\Big(\frac{2\pi n}{T}t\Big) + d_n\cos\Big(\frac{2\pi n}{T}t\Big)\Big] \tag{1.39}$$

lub dla $F(t)$ zanikającej w nieskończoności wykorzystać transformatę Fouriera

$$F(t) = \int_0^{\infty}\Big(C(\omega)\sin\omega t + D(\omega)\cos\omega t\Big)d\omega. \tag{1.40}$$

a następnie wykorzystać zasadę superpozycji i rozwiązania dla siły $\sim \sin\omega t$ oraz analogiczne wzory dla siły $\sim \cos\omega t$.

Zjawisko rezonansu jest powszechne i ważne w praktyce. Występuje nie tylko w układach mechanicznych ale także w urządzeniach elektrycznych i elektronicznych. Dla przykładu *obwód* RLC zasilany zmiennym napięciem $V(t)$ jest opisany równaniem (1.32) gdzie zmienna x jest



Rysunek 1.7: Krzywe rezonansowe dla dwóch wartości współczynnika tłumienia.

zastąpiona przez ładunek Q zgromadzony na okładkach kondensatora, masa m przez indukcyjność L, współczynnik oporu ρ przez opór elektryczny R, stała sprężystości przez odwrotność pojemności kondensatora $\frac{1}{C}$ a siła $F(t)$ przez zmienne napięcie.

Także popularny "rezonans", szczególnie często aplikowany pacjentom w serialach medycznych, czyli *magnetyczny rezonans jądrowy* (ang. - NMR) jest opisywany równaniami podobnymi do (1.32). Zamiast oscylatora harmonicznego mamy tu moment magnetyczny protonu (jądra wodoru) wykonujący precesję wokół kierunku przyłożonego silnego pola magnetycznego. Częstość kołowa precesji ω_0 jest proporcjonalna do tego pola , które względnie powoli zmienia się w przestrzeni i w czasie skanując badany obiekt. Precesja momentu magnetycznego jest tłumiona przez oddziaływanie z otoczeniem i emisję promieniowania a wzbudzana zewnętrznym polem elektromagnetycznym o częstościach radiowych bliskich ω_0 (rezonans!). Z kolei mierzone widmo promieniowania generowanego przez precesję protonu pozwala zrekonstruować krzywą rezonansową. Parametry tej krzywej zmieniają się w zależności od chemicznego składu tkanek co ostatecznie, po odpowiedniej obróbce komputerowej, pozwala otrzymać ich dobrze skontrastowany trójwymiarowy obraz.

1.5.5 Oscylator van der Pola. Model serca

W wielu układach fizycznych występujących w elektronice lub o znaczeniu biologicznym ważną rolę odgrywają procesy nieliniowe w tym *sprzężenie zwrotne*. Zilustrujemy to na przykładzie oscylatora van der Pola, którego równanie przy odpowiednio wybranych jednostkach położenia i czasu ma postać

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \mu > 0. \tag{1.41}$$

Widzimy, że jest to uogólnienie równania dla oscylatora tłumionego (bez siły wymuszającej), w którym współczynnik oporu ρ jest zastąpiony zależnym od x wyrażeniem $\mu(x^2 - 1)$. Oznacza to, że dla $|x| < 1$ efektywny współczynnik oporu jest ujemny a więc energia jest pompowana do układu. Dla $|x| > 1$ zachodzi dysypacja energii rosnąca wraz z $|x|$. Ta regulacja dopływu energii w zależności od stanu (położenia) układu jest przykładem sprzężenia zwrotnego.
Równanie (1.41) można rozwiązać numerycznie i Rys.1.8 pokazuje trzy takie rozwiązania dla trzech wyborów parametru $\mu = 0, 1\,, 1\,, 10$ i dla warunków początkowych $x(0) \simeq \dot{x}(0) \simeq 0$. We wszystkich przypadkach obserwujemy *drgania samowzbudne* inaczej *autooscylacje* o różnym kształcie. Kształt oscylacji dla $\mu = 10$ przypomina wykres EKG co wyjaśnia dlaczego sam twórca modelu zaproponował użycie go do opisu bicia serca. W modelu tym $x(t)$ oznacza zmianę długości włókna mięśniowego w sercu. Model oscylatora van der Pola znalazł także zastosowanie do opisu lamp elektronowych, a potem innych nieliniowych układów sterujących a także pojawia się w teorii lasera.

1.5.6 Układy autonomiczne na płaszczyźnie. Twierdzenie Poincare'go - Bendixona

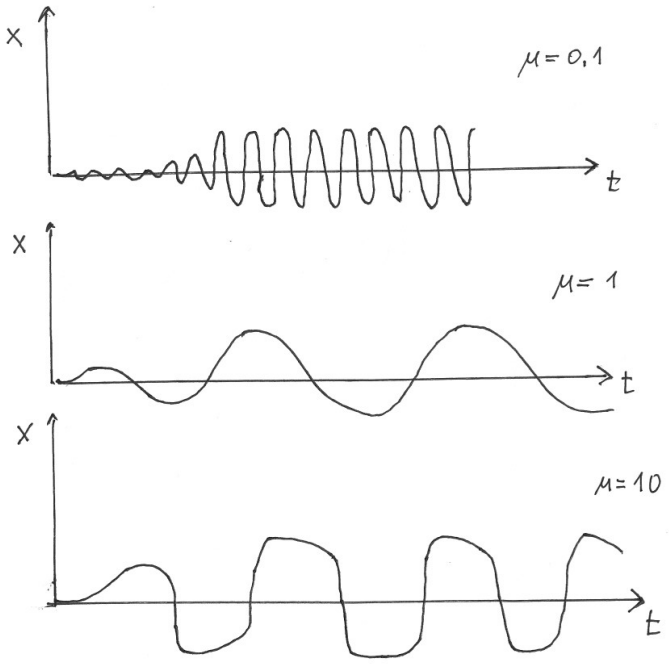
Równanie van der Pola (1.41) można zapisać jako układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -x - \mu(x^2 - 1)v, \quad \mu > 0 \end{aligned} \tag{1.42}$$

i jest szczególnym przypadkiem *układu autonomicznego* na 2-wymiarowej *przestrzeni fazowej*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{1.43}$$

Słowo "autonomiczny" oznacza tu, że funkcje F_1 i F_2 nie zależą jawnie od czasu. Dla takiego układu można bez rozwiązywania równań przewidzieć jak będą zachowywać się trajektorie ograniczone (tzn. takie, które "nie uciekają do nieskończoności") dla $t \to \infty$. Możliwe scenariusze takiego asymptotycznego zachowania określa następujące twierdzenie (patrz Rys.1.9).



Rysunek 1.8: Przykłady rozwiązań równania van der Pola dla parametru $\mu = 0, 1, 1, 10$.

Twierdzenie Poincare'go - Bendixona

Załóżmy, że dla wszystkich $t > 0$ trajektoria 2-wymiarowego układu autonomicznego leży w ograniczonym obszarze płaszczyzny. Wtedy możliwe są jedynie następujące scenariusze:

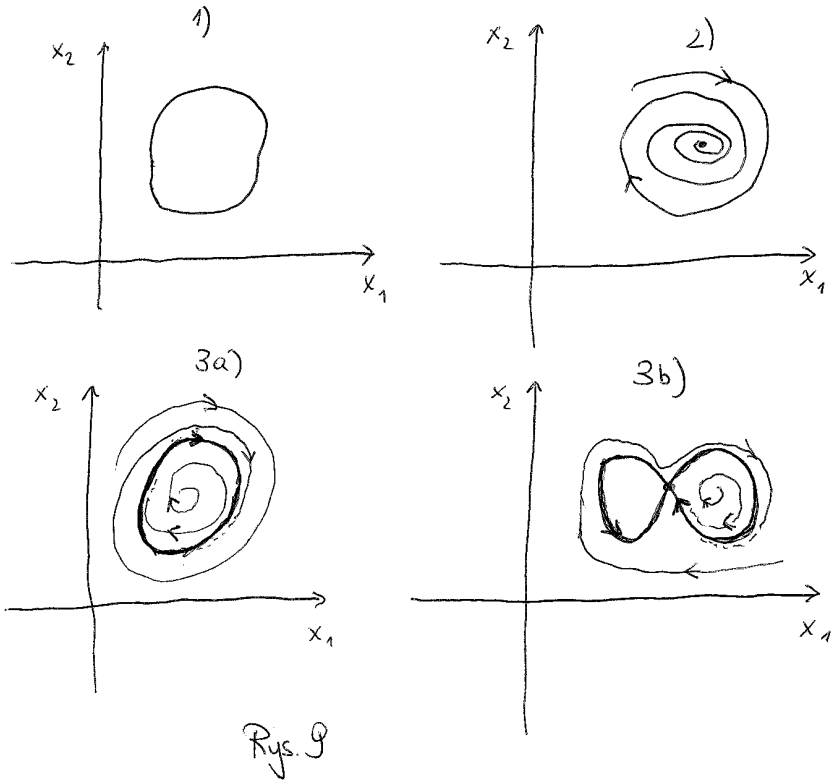
1) trajektoria jest krzywą zamkniętą,

2) trajektoria dąży do punktu stałego, gdy $t \to \infty$,

3) trajektoria dąży do cyklu granicznego, gdy $t \to \infty$.

Scenariusz 1) realizuje oscylator harmoniczny, a także każda oscylacja w 1-wymiarowym układzie zachowawczym w pobliżu lokalnego minimum potencjału. Tłumiony oscylator harmoniczny dąży do punktu stałego a oscylator van der Pola ilustruje scenariusz 3).

Ważnym wnioskiem płynącym z twierdzenia Poincare'go - Bendixona jest to, że dla 2-wymiarowych układów autonomicznych dynamika nie może być chaotyczna, tzn. nie ma zjawiska "eksponencjalnego rozbiegania się trajektorii" gdyż asymptotycznie trajektorie zachowują się regularnie. Dodanie jawnej zależności od czasu dla "sił" opisujących zmianę w czasie trajektorii w przestrzeni fazowej jest równoważne dodaniu do tej przestrzeni jednego wymiaru co można zilustrować poniższym przykładem.



Rysunek 1.9: Trzy scenariusze dla 2-wymiarowego układu autonomicznego. Cykl graniczny może mieć postać regularną a) i osobliwą b).

Nieautonomiczny układ 2-wymiarowy opisany równaniami

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2; t), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2; t). \end{aligned} \tag{1.44}$$

jest równoważny 3-wymiarowemu układowi autonomicznemu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 &= 1. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Chaos może pojawić się już dla 3-wymiarowych układów, np. dla zaburzanego periodycznie nieliniowego oscylatora.

1.6 Dynamika relatywistycznej cząstki

Równania ruchu cząstki zgodne ze szczególną teorią względności czyli inaczej niezmiennicze względem transformacji Lorentza muszą dać się zapisać w języku 4-wektorów. Korzystając z definicji 4-prędkości (1.18) możemy zdefiniować 4-wektor pędu

$$p^\mu = mu^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad p^k = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v^k, \ k = 1,2,3. \tag{1.46}$$

gdzie m jest masą cząstki, skalarem niezależnym od wyboru układu odniesienia. 4-wektor pędu spełnia tożsamościowy warunek

$$p_\mu p^\mu = m^2c^2. \tag{1.47}$$

Porównując przestrzenną część 4-pędu z wyrażeniem nierelatywistycznym niektórzy autorzy nazywają $m(v) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ *masą relatywistyczną* a m *masą spoczynkową*. Czasowa składowa jest $p^0 = \frac{E}{c}$ gdzie E interpretuje się jako całkowitą energię swobodnej cząstki, która zawiera oprócz energii kinetycznej energię mc^2 zawartą w jej masie. Interpretacja ta wynika z przybliżenia słusznego dla $v^2 << c^2$

$$E = cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m(v)c^2 \simeq mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \cdots . \tag{1.48}$$

Relatywistyczne równanie Newtona jest naturalnym uogólnieniem równania (1.22) i ma postać

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu, \tag{1.49}$$

gdzie f^μ jest 4-wektorem siły, który musi spełniać warunek pseudo-ortogonalności do 4-prędkości

$$u_\mu f^\mu = 0 \tag{1.50}$$

wynikający z (1.47).

Przykładem jest tu relatywistyczne równanie Lorentza

$$m\frac{du^\mu}{d\tau} = qu_\nu F^{\mu\nu}, \tag{1.51}$$

gdzie *antysymetryczny tensor pola elektromagnetycznego* $F^{\mu\nu}$ [2] zawiera pole elektryczne $\mathbf{E}$ i magnetyczne $\mathbf{B}$

$$F^{0k} \equiv E^k, \quad k = 1,2,3, \quad F^{12} = -B^3, \quad F^{23} = -B^1, \quad F^{31} = -B^2, \tag{1.52}$$

a antysymetria $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ zapewnia spełnianie warunku (1.50).

Należy zauważyć, że konsystentny opis dynamiki za pomocą relatywistycznego równania

[2] Tensor $F^{\mu\nu}$ będzie omawiany w części II wykładu.

Newtona ma sens tylko dla jednej cząstki. Sama idea natychmiastowego oddziaływania na odległość pomiędzy wieloma cząstkami jest sprzeczna z postulatami szczególnej teorii względności. Dla więcej niż jednej cząstki nie istnieje wspólny parametr czasu a jedynie indywidualne czasy własne, dlatego też opis oddziaływań między cząstkami zgodny z einsteinowską strukturą czasoprzestrzeni wymaga wprowadzenia koncepcji teorii pola.

Rozdział 2

Mechanika newtonowska układu wielu cząstek

Wracamy do teorii Newtona zastosowanej do opisu dynamiki wielu cząstek. Rozważamy układ N cząstek ponumerowanych indeksem $j = 1, 2, ..., N$. Każda z cząstek ma masę m_j i jej ruch jest opisany kartezjańskim wektorem $\mathbf{r}_j(t)$, gdzie t jest absolutnym czasem. W inercjalnym układzie odniesienia dynamika N cząstek opisywana jest układem równań Newtona

$$m_j \dot{\mathbf{v}}_j = \mathbf{F}_j + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_{jk}, \quad j = 1, 2, ..., N, \quad \mathbf{F}_{jj} \equiv 0. \tag{2.1}$$

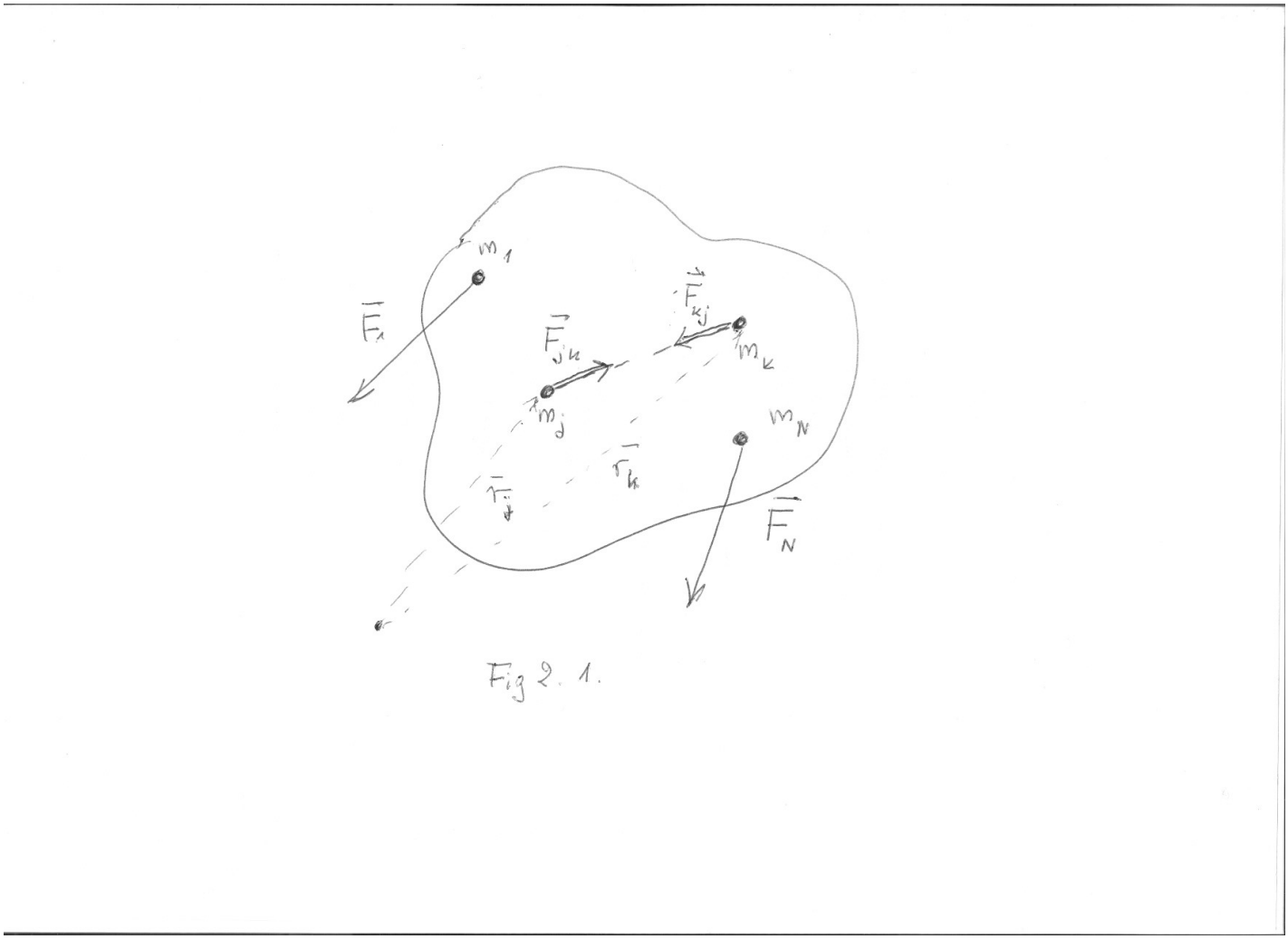
gdzie $\mathbf{F}_j$ oznacza *siłę zewnętrzną*, czyli pochodzącą z poza układu, działającą na j-tą cząstkę. $\mathbf{F}_{jk}$ jest *siłą wewnętrzną* z jaką na j-tą cząstkę działa cząstka k-ta (Rys.2.1). Trzecia zasada dynamiki Newtona nakłada następujące warunki dla sił wewnętrznych

$$\mathbf{F}_{jk} = -\mathbf{F}_{kj}, \quad \mathbf{F}_{jk} \,||\, \mathbf{r}_{jk} \equiv \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k. \tag{2.2}$$

gdzie $\mathbf{a} \,||\, \mathbf{b}$ oznacza, że wektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ są równoległe.
Układ N cząstek nazywamy *układem izolowanym* jeśli nie działają na niego siły zewnętrzne ($\mathbf{F}_j \equiv 0$).

2.1 Zasady zachowania

Analityczne rozwiązanie układu równań dla $N > 2$ nie jest możliwe poza bardzo szczególnymi przypadkami. Często jednak przynajmniej jakościowa analiza dynamiki jest możliwa przy wykorzystaniu zasad zachowania, które redukują liczbę istotnych zależnych od czasu parametrów opisujących dynamikę układu. Głębszy związek między symetriami praw mechaniki a zasadami zachowania przedyskutujemy w następnym rozdziale.



Rysunek 2.1: Układ N cząstek. Siły zewnętrzne i wewnętrzne

2.1.1 Zasada zachowania energii

Zakładamy teraz, że siły wewnętrzne są siłami zachowawczymi, czyli istnieją potencjały $U_{jk}(\mathbf{r}_{jk})$ $(U_{jj} \equiv 0)$ takie, że

$$\mathbf{F}_{jk} = -\nabla_j U_{jk}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) = -\mathbf{F}_{kj} = \nabla_k U_{jk}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k), \tag{2.3}$$

gdzie ∇_j oznacza operator gradientu względem zmiennej wektorowej $\mathbf{r}_j$, tzn. $\nabla_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right)$. Definiując *energię wewnętrzną* E_w układu N-cząstek jako sumę energii kinetycznych i energii potencjalnych dwu-cząstkowych oddziaływań

$$E_w = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j \mathbf{v}_j{}^2}{2} + \sum_{\{j<k\}=1}^{N} U_{jk}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j \mathbf{v}_j{}^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{N} U_{jk}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \tag{2.4}$$

i wykorzystując (2.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{dE_w}{dt} &= \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j \cdot \dot{\mathbf{v}}_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N}\Big(\mathbf{v}_j \cdot \nabla_j U_{jk}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) + \mathbf{v}_k \cdot \nabla_k U_{jk}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{v}_j.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Stąd

$$E_w(t_2) - E_w(t_1) = \sum_{j=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{v}_j dt = \sum_{j=1}^{N}\int_{\mathbf{r}_j^{(1)}}^{\mathbf{r}_j^{(2)}} \mathbf{F}_j \cdot d\mathbf{r}_j \tag{2.6}$$

czyli:
Zmiana energii wewnętrznej układu N cząstek jest równa pracy wykonanej przez siły zewnętrzne. W szczególności gdy układ jest izolowany to energia wewnętrzna jest zachowana.

Jeżeli także siły zewnętrzne są zachowawcze, czyli istnieją jednocząstkowe energie potencjalne $U_j(\mathbf{r}_j)$ takie, że

$$\mathbf{F}_j = -\nabla_j U_j(\mathbf{r}_j), \tag{2.7}$$

to możemy zdefiniować całkowitą energię układu N cząstek

$$E_c = \sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{m_j \mathbf{v}_j{}^2}{2} + U_j(\mathbf{r}_j)\Big) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N} U_{jk}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k). \tag{2.8}$$

Łatwo pokazać wykorzystując (2.1), (2.6) i (2.7), że:

Całkowita energia jest zachowana, tzn. $\frac{dE_c}{dt} = 0$.

2.1.2 Zasada zachowania pędu

Całkowity pęd układu N cząstek jest wektorową sumą poszczególnych pędów

$$\mathbf{P} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{p}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j. \tag{2.9}$$

Wprowadzając wektor $\mathbf{R}$ definiujący *środek masy układu* jako

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j\, \mathbf{r}_j}{\sum_{j=1}^{N} m_j} \tag{2.10}$$

możemy wyrazić całkowity pęd poprzez prędkość środka masy $\mathbf{V}$ i masę całkowitą $M = \sum_{j=1}^{N} m_j$

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}} = M\mathbf{V}. \tag{2.11}$$

Używając teraz układu równań Newtona (2.1) możemy wyprowadzić równanie opisujące zmianę całkowitego pędu pod wpływem sił zewnętrznych

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\mathbf{v}}_j = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j + \sum_{j,k=1}^{N} \mathbf{F}_{jk} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j, \tag{2.12}$$

gdzie w ostatniej równości wykorzystaliśmy III- zasadę (2.2), z której wynika równość $\sum_{j,k=1}^{N} \mathbf{F}_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N}(\mathbf{F}_{jk} + \mathbf{F}_{kj}) = 0$.
Ostatecznie środek masy układu cząstek zachowuje się jak cząstka o masie M pod działaniem wypadkowej siły zewnętrznej $\mathbf{F} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j$

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}. \tag{2.13}$$

Z równania (2.12) wynika zasada zachowania pędu:

Jeśli wypadkowa siła zewnętrzna działająca na układ N cząstek jest równa zero, to całkowity pęd jest zachowany. W szczególności całkowity pęd jest zachowany dla układu izolowanego.

2.1.3 Zasada zachowania momentu pędu

Pojęcie pędu zastosowane do układu wielu cząstek pozwala opisać ruch translacyjny środka masy takiego układu. Do opisu ruchu obrotowego użyteczne jest pojęcie *momentu pędu*. Moment pędu cząstki o masie m względem początku kartezjańskiego układu odniesienia jest zdefiniowany jako iloczyn wektorowy wektora wodzącego i wektora pędu

$$\mathbf{l}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v}. \tag{2.14}$$

Moment pędu względem dowolnego punktu opisanego wektorem $\mathbf{a}$ definiujemy jako

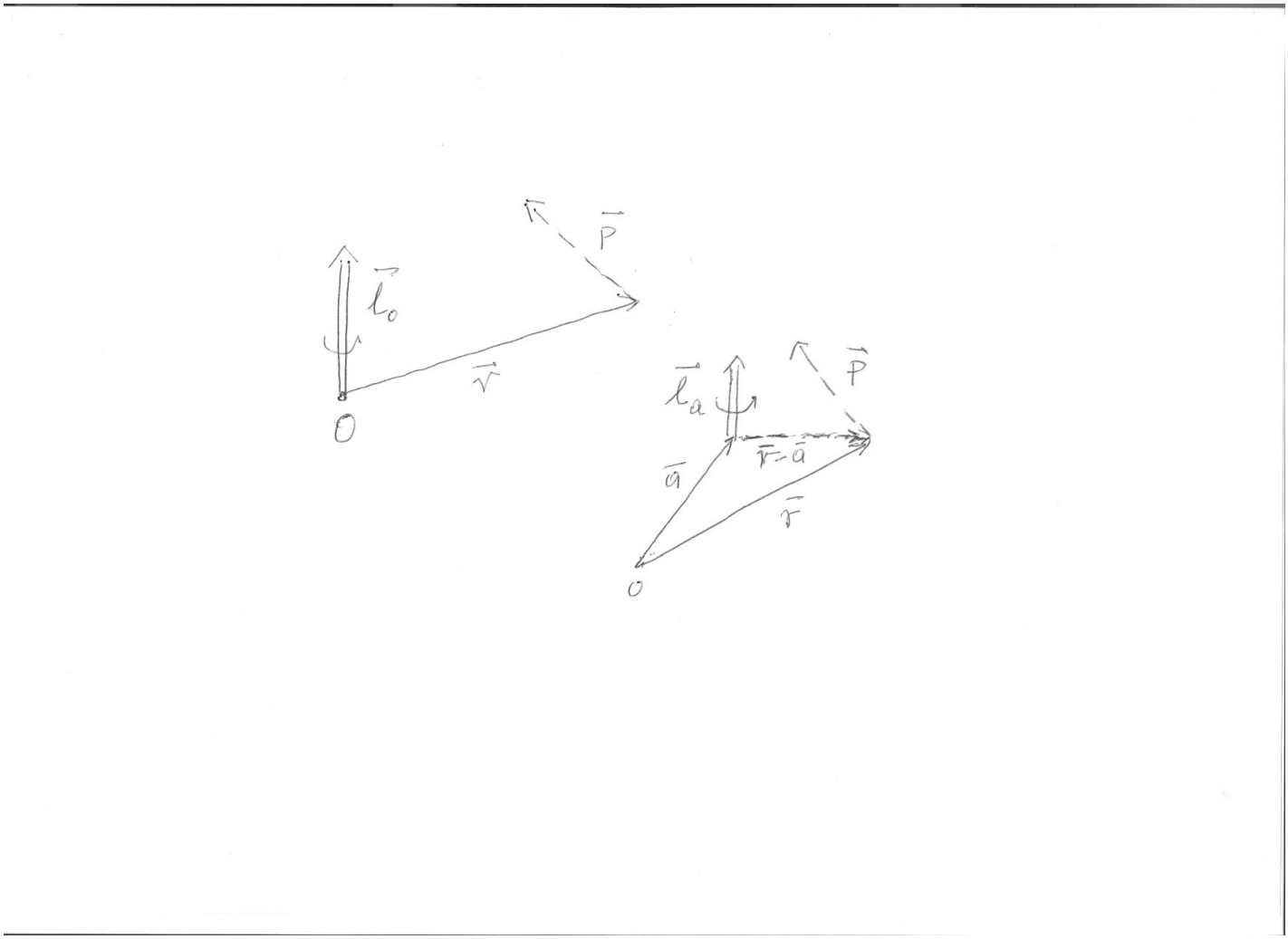
$$\mathbf{l}_a = (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times \mathbf{p} = m\,(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times \mathbf{v}. \tag{2.15}$$

Geometryczną interpretację momentu pędu przedstawia Rys.2.2

Podobnie jak w przypadku całkowitego pędu możemy również zdefiniować wektory *całkowitego momentu pędu*, względem początku układu współrzędnych i względem dowolnego punktu, dla układu N cząstek

$$\mathbf{L}_o = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j\,\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j, \tag{2.16}$$

$$\mathbf{L}_a = \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{r}_j - \mathbf{a}) \times \mathbf{p}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j\,(\mathbf{r}_j - \mathbf{a}) \times \mathbf{v}_j. \tag{2.17}$$



Rysunek 2.2: Geometryczna interpretacja momentu pędu.

Relacja między nimi jest dana formułą

$$\mathbf{L}_a = \mathbf{L}_o - \mathbf{a} \times \mathbf{P} \tag{2.18}$$

gdzie jak poprzednio $\mathbf{P} = \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j$ jest całkowitym pędem.

Dla określenia zmiany w czasie całkowitego momentu pędu (2.17) wykorzystamy znowu układ równań Newtona

$$m_j \dot{\mathbf{v}}_j = \mathbf{F}_j + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_{jk}, \quad j = 1, 2, ..., N, \quad \mathbf{F}_{jk} = -\mathbf{F}_{kj}, \quad \mathbf{F}_{jk} \,||\, (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \tag{2.19}$$

otrzymując

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_o}{dt} &= \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j \times \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j \times \dot{\mathbf{v}}_j = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j + \sum_{j,k=1}^{N} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{jk} \\ &= \mathbf{K}_o + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{N} (\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{jk} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj}) \end{aligned} \tag{2.20}$$

gdzie

$$\mathbf{K}_o = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j \tag{2.21}$$

nazywamy *całkowitym momentem siły* względem początku układu współrzędnych. Wykorzystując własności sił wewnętrznych (2.19) otrzymujemy

$$\sum_{j,k=1}^{N} (\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{jk} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj}) = \sum_{j,k=1}^{N} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{jk} = 0. \tag{2.22}$$

Wyprowadzenie powyższe nie zależy od wyboru punktu **a**, względem którego wyznaczamy momenty pędu i momenty siły. Prawo opisujące zmianę w czasie momentu siły ma więc postać

$$\frac{d\mathbf{L}_a}{dt} = \mathbf{K}_a \tag{2.23}$$

gdzie całkowity moment sił zewnętrznych względem punktu **a** jest równy

$$\mathbf{K}_a = \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{r}_j - \mathbf{a}) \times \mathbf{F}_j \tag{2.24}$$

Z prawa tego wynika *zasada zachowania momentu pędu*:

Dla izolowanego układu N cząstek całkowity moment pędu jest zachowany

Zasada zachowania jest też spełniona gdy siły zewnętrzne są *siłami centralnymi* względem punktu **a**, tzn. gdy

$$(\mathbf{r}_j - \mathbf{a}) \,||\, \mathbf{F}_j, \quad j = 1, 2, ..., N. \tag{2.25}$$

2.2 Zasada minimum działania

Prawa dynamiki opisywane są przez równania Newtona, które są równaniami różniczkowymi dla funkcji zależnych od czasu. Prawa te mają więc charakter "lokalny" tzn. jeśli w danej chwili znamy położenia $\mathbf{x}_j(t)$ i prędkości $\mathbf{v}_j(t)$ wszystkich cząstek, to możemy obliczyć je dla chwili późniejszej $\mathbf{x}_j(t + dt) = \mathbf{x}_j(t) + \mathbf{v}_j(t)dt$, $\mathbf{v}_j(t + dt) = \mathbf{v}_j(t) + \dot{\mathbf{v}}_j(t)dt$. Okazuje się, że opis ten, przynajmniej dla sił potencjalnych, jest równoważny opisowi wynikającemu z "globalnej" zasady, która mówi, że trajektoria układu $\{\mathbf{x}_j(t); t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$ minimalizuje pewną wielkość fizyczną zależną od tej trajektorii.
Dla uprosczenia rozważmy najpierw cząstkę poruszająca się ruchem prostoliniowym pod wpływem siły potencjalnej opisanym 1-wymiarowym równaniem Newtona

$$m\,\ddot{x}(t) = F(x;t) = -\frac{\partial}{\partial x} U(x;t). \tag{2.26}$$

Funkcją Lagrange'a nazywamy różnicę energii kinetycznej i potencjału traktowaną jako funkcję położenia i prędkości

$$L(x,\dot{x};t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x;t), \tag{2.27}$$

a *działaniem* wielkość zdefiniowaną jako

$$\mathcal{A}[x] = \int_{t_1}^{t_2} L(x,\dot{x};t)\,dt. \tag{2.28}$$

Działanie traktujemy jako *funcjonał* czyli "funkcję zależną od funkcji" $x(t), t \in [t_1,t_2]$.

Zasada najmniejszego działania

Cząstka porusza się po takiej trajektorii, że przy ustalonych warunkach brzegowych $x(t_1)$ i $x(t_2)$ działanie przyjmuje minimalną wartość.

Pokażemy teraz, że zasada ta jest równoważna równaniu Newtona (2.26). Oznaczmy przez $\bar{x}(t)$ trajektorię minimalizującą działanie a dowolną trajektorię spełniającą te same warunki brzegowe przez

$$x(t) = \bar{x}(t) + \delta x(t), \quad \delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0. \tag{2.29}$$

Wtedy dla małych odchyleń trajektorii $\delta x(t)$ możemy napisać

$$0 \leqslant \mathcal{A}[\bar{x}+\delta x] - \mathcal{A}[\bar{x}] = \delta\mathcal{A}[\bar{x}] + \delta^2\mathcal{A}[\bar{x}] + \cdots \tag{2.30}$$

gdzie $\delta\mathcal{A}[\bar{x}]$ oznacza pierwszą wariację działania, czyli wyrażenie zależne liniowo od δx, $\delta^2\mathcal{A}[\bar{x}]$ jest drugą wariacją zależną kwadratowo od δx, itd. Załóżmy, że $\delta\mathcal{A}[\bar{x}] \neq 0$ dla dowolnie małego odchylenia trajektorii. Wtedy z liniowości $\delta\mathcal{A}[\bar{x}]$ względem δx wynika , że zmiana znaku $\delta x \to -\delta x$ zmieniła by również znak $\mathcal{A}[\bar{x}+\delta x] - \mathcal{A}[\bar{x}] \simeq \delta\mathcal{A}[\bar{x}]$ co jest sprzeczne z nierównością w (2.30). Wynika stąd, że warunkiem koniecznym dla tego aby trajektoria $\{\bar{x}(t); t \in [t_1,t_2]\}$ minimalizowała działanie jest znikanie pierwszej wariacji

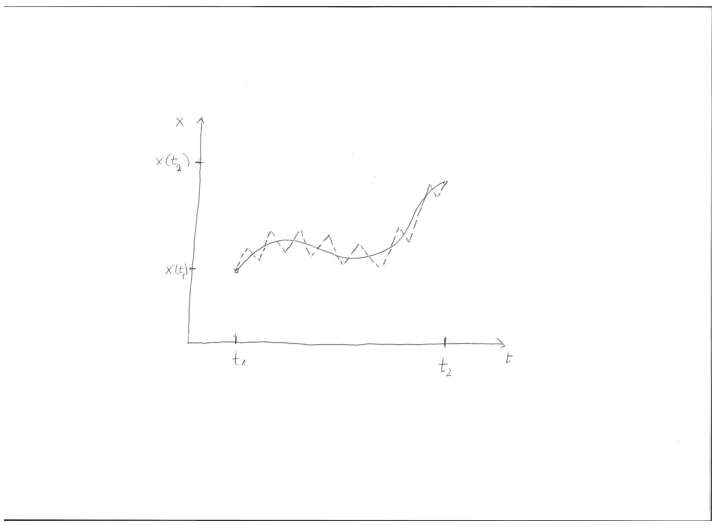
$$\delta\mathcal{A}[\bar{x}] = 0, \tag{2.31}$$

dla dowolnych $\delta x(t)$ spełniających (2.29). Pierwszą wariację obliczamy korzystając z postaci działania (2.28) i wykonując całkowanie przez części z wykorzystaniem tożsamości $\frac{d}{dt}\delta x = \delta\dot{x}$

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{A}[x] &= \delta\int_{t_1}^{t_2} L(x,\dot{x};t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}L(x,\dot{x};t)\delta x + \frac{\partial}{\partial\dot{x}}L(x,\dot{x};t)\delta\dot{x}\Big)dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}L(x,\dot{x};t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{x}}L(x,\dot{x};t)\Big)\delta x\,dt + L(x,\dot{x};t)\delta x|_{t_1}^{t_2}.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Dzięki warunkom brzegowym (2.29) graniczne wartości w wyrażeniu (2.33) znikają a znikanie pozostałej całki dla dowolnego δx wymaga znikania wyrażenia w nawiasie co prowadzi do *równania Eulera-Lagrange'a*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{x}}L(x,\dot{x};t) - \frac{\partial}{\partial x}L(x,\dot{x};t) = 0. \tag{2.33}$$



Rysunek 2.3: Trajektoria stacjonarna (linia ciągła) i trajektoria o wyższej wartości działania (linia przerywana)

Podstawiając teraz konkretną postać funkcji Lagrange'a (2.27) otrzymujemy równanie Newtona (2.26). Powtarzając to rozumowanie dla układu N cząstek z ogólnym potencjałem $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N; t)$ możemy pokazać, że odpowiednie równania Newtona

$$m_j \ddot{\mathrm{r}}_j = \mathrm{F} = -\nabla_j U, \quad j = 1, 2, ..., N. \tag{2.34}$$

jest równoważne zasadzie najmniejszego działania z funkcją Lagrange'a postaci

$$L(..., \mathrm{r}_j, ..., \dot{\mathrm{r}}_j, ...; t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j \mathbf{v}_j^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N; t). \tag{2.35}$$

Jak zobaczymy w następnym rozdziale takie sformułowanie praw dynamiki ma wiele zalet. Pozwala ono w łatwy sposób przejść od kartezjańskich współrzędnych do innych, często znacznie wygodniejszych, uwzględniających symetrie układu (np. symetrię obrotową prowadząca do współrzędnych sferycznych). Inne zastosowanie to opis układów z więzami geometrycznymi, które redukują liczbę niezależnych zmiennych.

Uwaga

Warunek $\delta\mathcal{A} = 0$ ściśle rzecz biorąc jest warunkiem stacjonarności działania i wcale nie oznacza, że działanie osiąga tu (lokalne) minimum, podobnie jak znikanie pochodnej funkcji $f(x)$ zachodzi zarówno w jej lokalnym minimum, maksimum lub w punkcie przegięcia. Aby udowodnić, że trajektoria dana równaniem Eulera-Lagrange'a rzeczywiście opisuje przynajmniej lokalne minimum działania należałoby przeanalizować drugą wariację $\delta^2\mathcal{A}$. W praktyce dla wielu typów funkcji Lagrange'a można użyć prostych argumentów. Np. dla standardowej postaci energii kinetycznej (3.41) widać, że trajektoria stacjonarna nie może odpowiadać maksimum działania gdyż zawsze można zwiększyć część działania pochodzącą of prędkości nadając trajektorii bardziej "zygzakowaty" kształt (Rys.2.3).

Rozdział 3

Układy z więzami. Formalizm Lagrange'a i Hamiltona

3.1 Więzy holonomiczne i stopnie swobody

Dla zilustrowania pojęcia więzów typu geometrycznego (*więzy holonomiczne*) rozważmy dwa proste przykłady (Rys.3.1):

A) koralik ślizgający się bez tarcia po drucie pod wplywem siły ciężkości,

B) cząstka poruszająca się w polu siły centralnej.

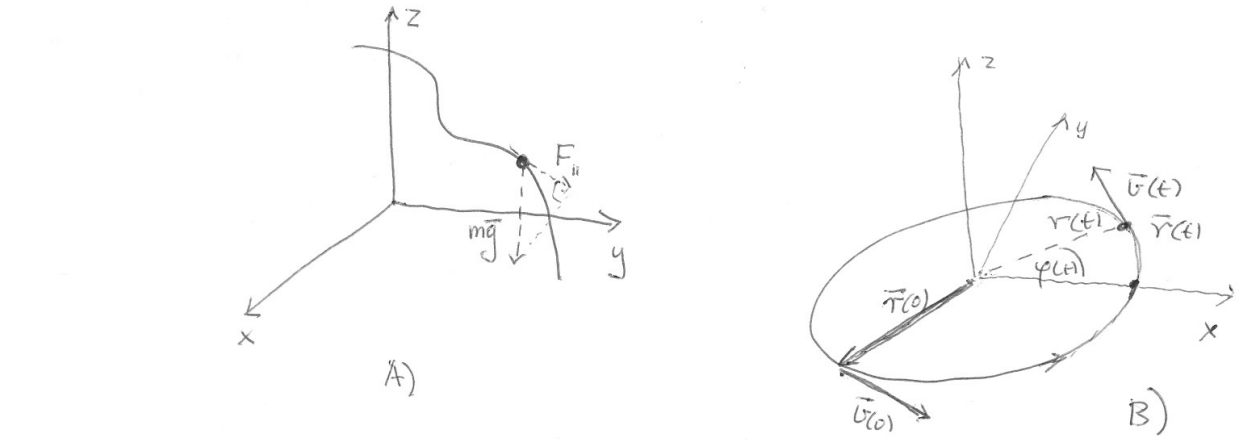
Przykład A)

Drut opisany jest przez krzywą $\mathbf{r}(\ell) = [x(\ell), y(\ell), z(\ell)]$ gdzie ℓ jest parametrem opisującym odległość od pewnego punktu na drucie mierzoną wzdłuż niego (czyli $d\ell^2 = (d\mathbf{r})^2$). Oczywiście teoretycznie ruch koralika można opisać jako ruch w 3-wymiarowej przestrzeni pod wpływem siły wypadkowej grawitacji i spężystej reakcji drutu, jednak taki opis jest bardzo skomplikowany. Wygodniej przyjąć, że kształt drutu praktycznie nie ulega zmianie a ruch koralika jest w pełni opisany funkcją czasu $\ell(t)$ wraz z odpowiednią prędkością styczną $\dot{\ell}$. Jak zobaczymy później do konstrukcji odpowiedniego równania ruchu wystarczy znajomość energii kinetycznej T i energii potencjalnej U danych wyrażeniami

$$T = \frac{m\dot{\ell}^2}{2}, \quad U(\ell) = mgz(\ell). \tag{3.1}$$

Przykład B)
Ruch cząstki pod wpływem zachowawczej siły centralnej

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(|\mathbf{r}|) \tag{3.2}$$



Rysunek 3.1: Przykłady więzów holonomicznych

jest zgodny z zasadą zachowania momentu pędu

$$\mathbf{l}_o = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t) \tag{3.3}$$

co oznacza, że ruch ten odbywa się w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory opisujace warunki początkowe $\mathbf{r}(0)$ i $\mathbf{v}(0)$. Można więc wybrać kartezjański układ współrzędnych w taki sposób aby płaszczyzna xy pokrywała sie z płaszczyzną ruchu a oś z miała kierunek wektora momentu pędu $\mathbf{l}_o$(Rys.3.1 B)). Taką redukcję wymiaru przestrzeni położeń możemy też traktować jako rodzaj więzów na położenia i prędkości opisywanych przez

$$z(t) = 0, \quad \dot{z}(t) = 0, \tag{3.4}$$

które są zgodne z postacią siły działającej na układ. Więzy tego typu nazywamy *całkowalnymi więzami kinematycznymi* i wraz z więzami geometrycznymi (przykład A)) tworzą klasę *więzów holonomicznych*. Ponadto, możemy teraz użyć biegunowego układu współrzędnych (r, ϕ) z odpowiednimi, prostopadłymi do siebie, składowymi prędkości radialnej v_r i transwersalnej v_ϕ

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad v_r = \dot{r}, \quad v_\phi = r\dot{\phi}. \tag{3.5}$$

W tych nowych współrzędnych energia kinetyczna i potencjalna mają postać

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right), \quad U = U(r). \tag{3.6}$$

Ogólnie uwzględnienie więzów holonomicznych pozwala zastąpić układ $3N$ kartezjańskich współrzędnych zapisywanych w postaci wektorowej $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N\}$ układem *współrzędnych uogólnionych* $q \equiv \{q_1, q_2, ..., q_f\}$ gdzie $f \leqslant 3N$ nazywamy *liczbą stopni swobody* a współrzędne q spełniają warunki:

1) q są funkcjami $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N\}$,

2) q są niezależne , tzn. żadna współrzędna q_j nie daje się przedstawić jako funkcja pozostałych,

3) istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między położeniami układu zgodnymi z więzami a zespołem współrzędnych uogólnionych.

Zbiór punktów $\{q\}$ tworzy f-wymiarową *przestrzeń konfiguracyjną* układu. Wprowadzając prędkości uogólnione $\dot{q} \equiv \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_f\}$ możemy dla przypadku sił potencjalnych zdefiniować funkcję Lagrange'a

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}) - U(q, t), \tag{3.7}$$

gdzie $T(q, \dot{q})$ i $U(q, t)$ są odpowiednio energią kinetyczną i potencjałem wyrażonymi za pomocą współrzędnych i prędkości uogólnionych.

3.2 Zasada wariacyjna Hamiltona

Równania ruchu dla układu N cząstek z więzami holonomicznymi i dla sił potencjalnych można wyprowadzić bezpośrednio z równań Newtona ale znacznie szybciej można je otrzymać wykorzystując zasadę wariacyjną Hamiltona, która jest uogólnieniem "zasady najmniejszego działania" z poprzedniego rozdziału. W tym celu użyjemy funkcji Lagrange'a (3.7) i funkcjonału działania postaci

$$\mathcal{A}[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt. \tag{3.8}$$

Zasada wariacyjna Hamiltona
Rzeczywista trajektoria opisująca ewolucję układu czyni działanie stacjonarnym, tzn.

$$\delta\mathcal{A}[q] = 0 \tag{3.9}$$

Uwagi

1) Nie jest rzeczą oczywistą, że zasada stacjonarnego działania, która okazała się równoważ-

na równaniom Newtona (dla sił zachowawczych) jest automatycznie spełniona dla układów z więzami. Można to jednak uzasadnić wyobrażając sobie, że więzy i wynikające z nich siły pochodzą od pewnego fikcyjnego potencjału, który osiąga minimum równe zero na f-wymiarowej hiperpowierzchni przestrzeni położeń wyznaczonej przez więzy i gwałtownie rośnie do nieskończoności gdy oddalamy się od niej. Tak więc fizycznie realizowana trajektoria, która w chwili początkowej leży na tej powierzchni a składowe prędkości są do niej prostopadłe nie opuszcza tej powierzchni podczas ewolucji. Wynika stąd, że ruch w kierunku prostopadłym nie wnosi wkładu do działania i stacjonarność działania zależy wyłącznie od kształtu trajektorii na powierzchni wyznaczonej przez więzy.

2) W określeniu zasady wariacyjnej Hamiltona używamy określenia "stacjonarne" a nie "minimalne". Jest to bardziej ścisłe, gdyż może się zdarzyć, że fizyczna trajektoria odpowiada, używając analogii z zachowaniem funkcji jednej zmiennej, "lokalnemu minimum" lub "punktowi przegięcia". Lokalne maksimum można wykluczyć używając argumentów podobnych do tych z końca poprzedniego rozdziału.

Podobnie, jak w poprzednim rozdziale możemy wyprowadzić równania ruchu równoważne zasadzie wariacyjnej Hamiltona dla układów z więzami.

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}[q] &= \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q};t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{f}\Big(\frac{\partial}{\partial q_j}L(q,\dot{q};t)\delta q_j + \frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}L(q,\dot{q};t)\delta\dot{q}_j\Big)dt, \qquad (3.10)\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{f}\Big(\frac{\partial}{\partial q_j}L(q,\dot{q};t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}L(q,\dot{q};t)\Big)\delta q_j\,dt + \sum_{j=1}^{f}L(q,\dot{q};t)\delta q_j|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned}$$

Dzięki warunkom brzegowym $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$ graniczne wartości znikają a znikanie pozostałej całki dla dowolnego δq_j prowadzi do *równań Eulera-Lagrange'a* zwanych też *równaniami Lagrange'a II-rodzaju*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}L(q,\dot{q};t) - \frac{\partial}{\partial q_j}L(q,\dot{q};t) = 0, \quad j = 1,2,...,f, \qquad (3.11)$$

które są układem f zwyczajnych równań różniczkowych drugiego rzędu.

Przykłady

A) Dla koralika na drucie funkcja Lagrange'a ma postać

$$L(s,\dot{\ell}) = \frac{m\dot{\ell}^2}{2} - mgz(\ell), \qquad (3.12)$$

a równanie Eulera-Lagrange'a można zapisać w postaci

$$\ddot{\ell} = gz'(\ell). \qquad (3.13)$$

B) Dla cząstki w polu siły centralnej mamy

$$L(r,\phi,\dot{r},\dot{\phi}) = \frac{m}{2}\Big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\Big) - U(r). \tag{3.14}$$

i równania Eulera-Lagrange'a w postaci

$$m\Big(\ddot{r} + r\dot{\phi}^2\Big) = -U'(r), \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0. \tag{3.15}$$

3.3 Małe drgania

Wiele układów mechanicznych z siłami zachowawczymi posiada położenie równowagi trwałej określone lokalnym mimimum energii potencjalnej. Jeśli wybierzemy w tym punkcie początek układu współrzędnych uogólnionych to wybierając odpowiednio stałą, tak aby w punkcie równowagi energia potencjalna była równa zero, możemy ją rozwinąć w szereg Taylora

$$U(q) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{f} \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}(0)\, q_j q_k + \cdots \tag{3.16}$$

Warunek minimum oznacza, że pierwsze pochodne (czyli także siły) znikają w punkcie równowagi a macierz drugich pochodnych $[b_{jk}] \equiv [\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}(0)]$ jest macierzą symetryczną i dodatnio określoną. Zakładając, że interesują nas tylko niewielkie wychylenia wokół punktu równowagi uwzględniamy wyłącznie wyraz zawierający drugie pochodne i energię potencjalną opisujemy dodatnio określoną formą kwadratową. Podobnie dla niewielkich wychyleń energia kinetyczna jest dodatnio określoną formą kwadratową prędkości uogólnionych

$$T(\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{f} a_{jk}\,\dot{q}_j\dot{q}_k. \tag{3.17}$$

W ramach tego przybliżenia (tzw. "małe drgania") równania Eulera-Lagrange'a są układem liniowych równań różniczkowych drugiego rzędu

$$\sum_{k=1}^{f} a_{jk}\,\ddot{q}_k = -\sum_{k=1}^{f} b_{jk}\,q_k, \quad j = 1,2,...,f. \tag{3.18}$$

Pokażmy teraz, że istnieje nowy układ współrzędnych uogólnionych, tzw. *współrzędne normalne* dane przez transformację liniową

$$Q_j \equiv Q_j(q) = \sum_{k=1}^{f} \ell_{jk}\,q_k, \quad j = 1,2,...,f, \tag{3.19}$$

takie, że funkcja Lagrange'a daje się zapisać w postaci

$$L(Q,\dot{Q}) = T(\dot{Q}) - U(Q) = \frac{1}{2}\sum_{j,}\Big(\dot{Q}_j^2 - \omega_j^2\,Q_j^2\Big), \tag{3.20}$$

a równania Eulera-Lagrange'a odpowiadają układowi niezależnych oscylatorów harmonicznych o częstościach $\{\omega_j\}$ i jednostkowych masach (tzw. "oscylatory normalne", "mody normalne") spełniających równania

$$\ddot{Q}_j = -\omega_j^2 Q_j, \quad j = 1, 2, ..., f. \tag{3.21}$$

z rozwiązaniami postaci

$$Q_k(t) = Q_k^{(0)} \sin(\omega_k t + \phi_k), \quad j = 1, 2, ...f. \tag{3.22}$$

W tym celu wygodnie jest użyć poniższej notacji macierzowej i wykorzystać podstawowe własności macierzy i form kwadratowych

$$T(\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{A}\dot{q}, \quad U(q) = \frac{1}{2}q^T \mathbf{B}q \quad \mathbf{A} = [a_{jk}], \quad \mathbf{B} = [b_{jk}], \quad q^T = [q_1, q_2, ..., q_f]. \tag{3.23}$$

Jak wiemy dla każdej rzeczywistej, symetrycznej $n \times n$ macierzy $\mathbf{M}$ istnieje ortogonalna macierz $\mathbf{W}$ ($\mathbf{W}^T\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{W}^T = \mathbf{1}$) taka, że $\mathbf{W}\mathbf{M}\mathbf{W}^T$ jest macierzą diagonalną, tzn. $\mathbf{W}\mathbf{M}\mathbf{W}^T = \mathrm{diag}[m_1, m_2, .., m_n]$ a $\{m_j\}$ to wartości własne $\mathbf{M}$. Stąd, istnieje transformacja ortogonalna współrzędnych $q \to r = \mathbf{W}q$ ($q = \mathbf{W}^T r$) diagonalizująca $\mathbf{A}$, a w nowych współrzędnych nasza funkcja Lagrange'a ma postać

$$L(r, \dot{r}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{f} a_j \dot{r}_j^2 - \frac{1}{2}r^T \mathbf{C}r, \quad \mathbf{C} = \mathbf{W}\mathbf{B}\mathbf{W}^T \equiv [c_{jk}], \tag{3.24}$$

Liczby $a_j > 0$ są wartościami własnymi dodatnio określonej macierzy $\mathbf{A}$. Zauważmy też, że $\dot{r} = \mathbf{W}\dot{q}$. W następnym kroku dokonujemy transformacji $r \to R$ gdzie $R_j = \sqrt{a_j} r_j$ co prowadzi do nowej postaci funkcji Lagrange'a

$$L(R, \dot{R}) = \frac{1}{2}\dot{R}^T\dot{R} - \frac{1}{2}R^T \mathbf{D}R, \quad \mathbf{D} \equiv [d_{jk}], \quad d_{jk} = \frac{1}{\sqrt{a_j}} c_{jk} \frac{1}{\sqrt{a_k}}. \tag{3.25}$$

Zauważmy, że macierz $\mathbf{D}$ podobnie jak $\mathbf{C}$ i $\mathbf{B}$ jest symetryczna i dodatnio określona. Można więc zastosować ostatnią ortogonalną transformację współrzędnych $R \to Q = \mathbf{U}R$ diagonalizującą $\mathbf{D}$. Oznaczając wartości własne $\mathbf{D}$ przez $\{\omega_j^2\}$ otrzymujemy ostateczną postać funkcji Lagrange'a

$$L(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2}\dot{Q}^T\dot{Q} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{f} \omega_j^2 Q_j^2, \tag{3.26}$$

równoważną (3.20).

Przedstawiona powyżej procedura pozwala znaleźć macierz $[\ell_{jk}]$ z równania (3.19), a także macierz odwrotną $[\ell_{jk}^{-1}]$, co z kolei daje ogólne rozwiązanie problemu w wyjściowych zmiennych

$$q_j(t) = \sum_{k=1}^{f} \ell_{jk}^{-1} Q_k^{(0)} \sin(\omega_k t + \phi_k), \quad j = 1, 2, ...f, \tag{3.27}$$

gdzie zbiór stałych $\{Q_k^{(0)}, \phi_k\}$ wyznaczają warunki początkowe.

3.4 Symetrie i zasady zachowania

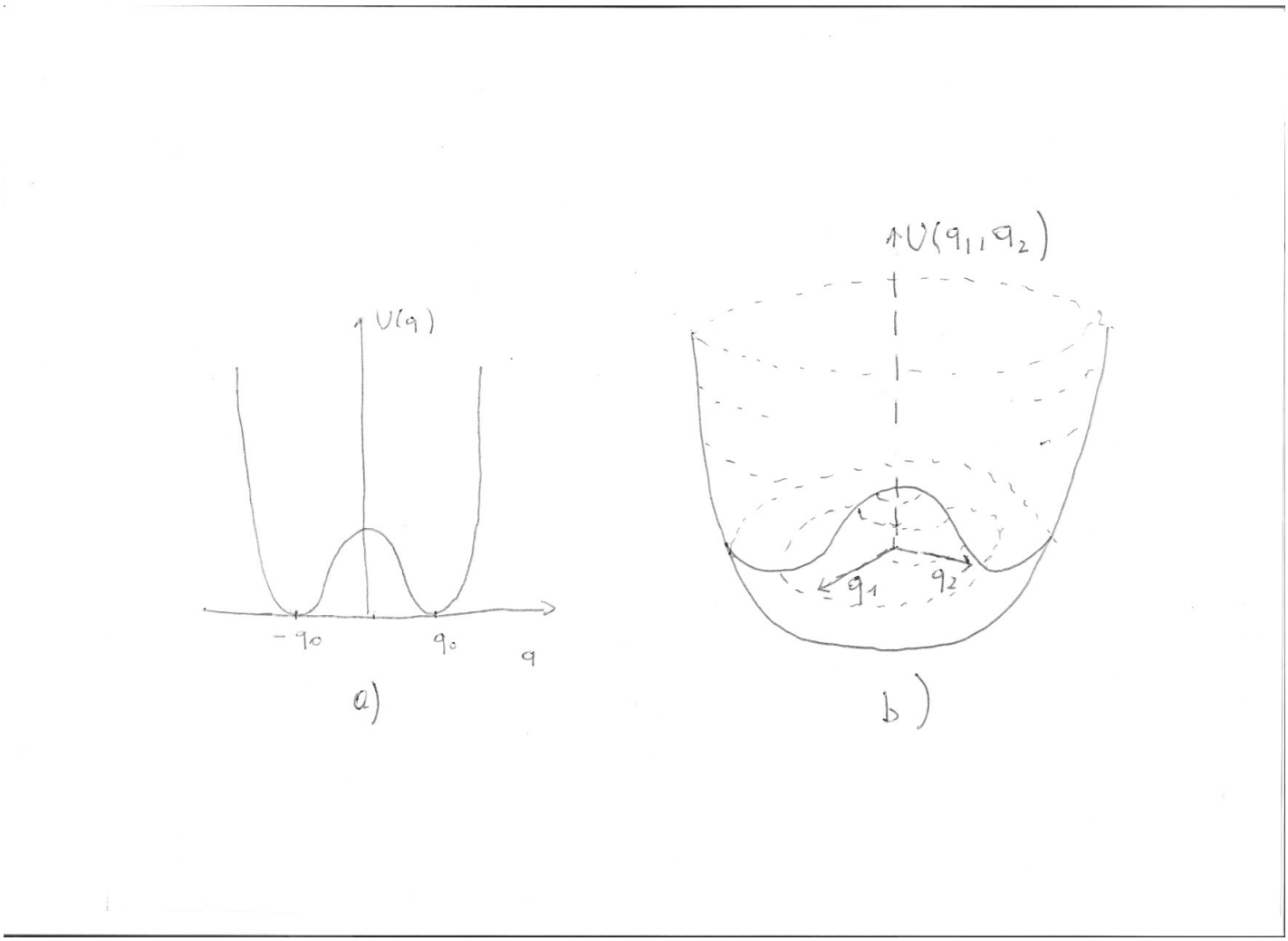
Poznaliśmy już szereg przykładów transformacji symetrii, które nie zmieniają praw rządzących dynamiką układów fizycznych. Oczywiście symetrie te mogą ulec zmianie przy przejściu od teorii przybliżonej do teorii dokładniejszej o szerszym obszarze zastosowań. I tak prawa mechaniki newtonowskiej są niezmiennicze względem transformacji Galileusza. ale wiemy, że bardziej precyzyjna teoria powinna być niezmiennicza względem transformacji Lorentza a po dodaniu translacji (przesunięć) w przestrzeni i w czasie względem transformacji Poincare'go. Ponieważ złożenie transformacji symetrii jest też transformacją symetrii (podobnie jak transformacja odwrotna i tożsamościowa) to ich zbiór stanowi grupę. Powinniśmy także odróżnić transformacje symetrii układów izolowanych, które mają bardziej fundamentalny charakter i są zwykle bogatsze od transformacji układów w polach zewnętrznych, lub z zadanymi więzami. Symetria tych pól lub więzów określa grupę symetrii całego układu. Inny podział to na symetrie "ciągłe" takie jak translacje o dowolny wektor czy obroty o dowolny kąt względem wybranej osi i symetrie dyskretne jak np. obrót o kąt π, czy operacja odwrócenia czasu $t \to -t$ (patrz Rys.3.2). W dalszej części zajmiemy się wyłącznie symetriami ciągłymi gdyż wiążą się one z zasadami zachowania. Ze względu na głębokie wnioski płynące z tych relacji oraz możliwość ich rozszerzenia aż do kwantowej teorii pola podamy ich ogólne sformułowanie.

3.4.1 Twierdzenie Noether

Interesuje nas układ mechaniczny opisywany współrzędnymi uogólnionymi $q = (q_1, q_2, ..., q_f)$, funkcją Lagrange'a $L(q, \dot{q}, t)$ i funkcjonałem działania $\mathcal{A}[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$, którego dynamika określona jest równaniami Eulera-Lagrange'a (3.11). Możemy teraz sformułować następujące twierdzenie

Twierdzenie Noether
Jeśli działanie $\mathcal{A}[q]$ jest niezmiennicze względem pewnej r-parametrowej ciągłej grupy transformacji współrzędnych uogólnionych i czasu, to w teorii istnieje r praw zachowania.

Przejdziemy teraz do dowodu tego twierdzenia, który da nam również wyrażenia określające zachowywane wielkości fizyczne. Parametry grupy symetrii $\{\omega_a; a = 1, 2, ..., r\} \equiv \omega$ wybieramy zawsze tak aby przekształceniu tożsamościowemu odpowiadały wartości $\omega_a = 0$. Jeśli działanie ma być niezmiennicze względem grupy transformacji ciagłych to również musi być niezmiennicze ze względu na *transformacje infinitezymalne* czyli transformacje o parametrach oznaczanych przez $\{\delta\omega_a; a = 1, 2, ..., r\}$, tak małych, że we wszystkich rachunkach ograniczamy się do wyrazów pierwszego rzędu. Dokonujemy jednoczesnych infinitezymalnych transformacji



Rysunek 3.2: Potencjał układu z symetrią: a) dyskretną ($q \to -q$) , b) ciągłą (obrót w płaszczyźnie $q_1 q_2$)

współrzędnych i czasu

$$t \to t^* = t + \Delta t, \quad q_j(t) \to q_j^*(t^*) = q_j(t) + \Delta q_j, \quad j = 1, 2, ...f. \tag{3.28}$$

Obie zmiany są infinitezymalne a więc proporcjonalne do $\{\delta\omega_a\}$. Należy zauważyć różnicę między zmianą samych współrzędnych pod wpływem symetrii daną przez $\Delta q_j = q_j^*(t^*) - q_j(t)$ a zmianą $\delta q_j = q_j^*(t) - q_j(t)$ przy ustalonym parametrze czasu. Obie wariacje powiązane są wzorem (z dokładnością do wyrazów wyższych rzędów)

$$\Delta q_j = q_j^*(t^*) - q_j(t) = [q_j^*(t^*) - q_j(t^*)] + [q_j(t^*) - q_j(t)] \simeq \delta q_j + \dot{q}_j \Delta t. \tag{3.29}$$

Podobny związek spełniają wariacje prędkości uogólnionych

$$\Delta \dot{q}_j \simeq \frac{d}{dt}\delta q_j + \ddot{q}_j \Delta t. \tag{3.30}$$

Ponieważ działanie ma być niezmiennicze ze względu na symetrie to wariacja działania odpowiadająca powyższej transformacji infinitezymalnej musi znikać. Wykorzystując (3.29) i (3.30)

oraz tożsamość

$$\frac{d}{dt}\Big(L\Delta t\Big) = \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j\Delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\Delta t + \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + L\frac{d\Delta t}{dt}. \tag{3.31}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta\mathcal{A}[q] = \mathcal{A}[q^*] - \mathcal{A}[q] \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\Big[\sum_j\Big(\frac{\partial L}{\partial q_j}\Delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Delta\dot{q}_j\Big) + \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + L\frac{d\Delta t}{dt}\Big]dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\Big\{\sum_j\Big(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Big)\delta q_j\Big\}dt + \int_{t_1}^{t_2}\Big\{\frac{d}{dt}\Big(\sum_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\Big) + \frac{d}{dt}\Big(L\Delta t\Big)\Big\}dt. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Zauważmy, że wyrażenie pod pierwszą całką znika gdyż zakładamy, że trajektoria $q(t)$ spełnia równania Eulera-Lagrange'a. Znikanie drugiej całki dla dowolnych t_1, t_2 oznacza, że wielkość fizyczna

$$\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j + L\Delta t \tag{3.33}$$

jest zachowywana. Pamiętając o formule (3.29) możemy wariacje współrzędnych wyrazić przez parametry $\delta\omega_a$

$$\delta q_j = \Delta q_j - \dot{q}_j\Delta t = \sum_{a=1}^{2}\Big(\frac{\partial q_j}{\partial \omega_a} - \dot{q}_j\frac{\partial t}{\partial \omega_a}\Big)\delta\omega_a. \tag{3.34}$$

W powyższej formule $\frac{\partial q_j}{\partial \omega_a}$ odpowiada zmianom formy współrzędnych pod wpływem działania grupy symetrii a $\frac{\partial t}{\partial \omega_a}$ transformacji czasu. Po podstawieniu (3.34) do (3.33) i uwzględnieniu faktu dowolności $\delta\omega_a$ wnioskujemy, że istnieje r zachowywanych wielkości fizycznych danych przez następujące wyrażenia

$$J_a = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Big(\frac{\partial q_j}{\partial \omega_a} - \dot{q}_j\frac{\partial t}{\partial \omega_a}\Big) + L\frac{\partial t}{\partial \omega_a}. \tag{3.35}$$

3.4.2 Przykłady zastosowań twierdzenia Noether

Pokażemy teraz, że poznane już zasady zachowania energii, pędu i momentu pędu można traktować jako konsekwencje twierdzenia Noether.

Zasada zachowania energii

Rozważmy wielkość, która związana jest z symetrią względem (infinitezymalnego) przesunięcia w czasie $t \to t + \delta\tau$, przy pozostawieniu bez zmian położeń uogólnionych. Wtedy mamy

$$\frac{\partial q_j}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = 1, \tag{3.36}$$

co prowadzi zgodnie z (3.35) do zachowywanej wielkości postaci

$$H = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L. \tag{3.37}$$

Wielkośc tę możemy traktować jako energię układu, gdyż dla układu N cząstek opisanych funkcją Lagrange'a (3.41) jest równa całkowitej energii, $H = T + U$. Oznacza to, że zasada zachowania energii jest konsekwencją niezmienniczości teorii względem przesunięcia w czasie. Okazuje się, że wniosek ten jest prawdziwy nie tylko w mechanice nierelatywistycznej ale także w teoriach relatywistycznych włączając w to klasyczną i kwantową teorię pola.

Zasada zachowania pędu

Powróćmy do układu N cząstek w trójwymiarowej przestrzeni z oddziaływaniem opisanym dwu-cząstkowymi potencjałami. Funkcja Lagrange'a takiego układu ma postać

$$L = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{N} U_{jk}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k). \tag{3.38}$$

Zauważmy, że funkcja ta, a więc i odpowiedni funkcjonał działania, są niezmiennicze względem (infinitezymalnej) translacji w przestrzeni

$$\mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_j + \delta\mathbf{a}. \tag{3.39}$$

Ponieważ $\delta\mathbf{a}$ jest wektorem zawierającym trzy parametry, więc również odpowiednie wielkości zachowywane tworzą wektor $\mathbf{P}$ dany przez wyrażenie (3.35) zastosowane do tego szczególnego przypadku. Wykorzystując teraz $\frac{\partial t}{\partial \mathbf{a}} = 0$ i $\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{1}$ otrzymujemy

$$\mathbf{P} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} = \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\mathbf{r}}_j = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{p}_j. \tag{3.40}$$

Oznacza to, że na mocy twierdzenia Noether niezmienniczość względem przesunięcia w przestrzeni implikuje zasadę zachowania pędu.

Zasada zachowania momentu pędu

Rozważmy ponownie układ N cząstek w trójwymiarowej przestrzeni z oddziaływaniem opisanym dwu-cząstkowymi potencjałami, tym razem zależnymi jedynie od odległości, tzn. $U_{jk}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \equiv U_{jk}(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|)$ (co oznacza, że odpowiednie siły są centralne) a także możemy dodać dla każdej cząstrki zewnętrzny potencjał o symetri sferycznej $U_j(|\mathbf{r}_j|)$. Funkcja Lagrange'a ma teraz postać

$$L = \sum_{j=1}^{N} \Big(\frac{m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2}{2} - U_j(|\mathbf{r}_j|) \Big) - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{N} U_{jk}(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|). \tag{3.41}$$

Funkcja Lagrange'a i funkcjonał działania są niezmiennicze względem (infinitezymalnego) obrotu względem środka układu współrzędnych kartezjańskich danego wzorem

$$\mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_j + \delta\mathbf{w} \times \mathbf{r}_j, \tag{3.42}$$

gdzie wektor $\delta\mathbf{w}$ jest równoległy do osi obrotu a jego długość równa jest kątowi obrotu. Odpowiednie wielkości występujące w formule (3.35) mają postać

$$\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{w}} = \{\cdot\} \times \mathbf{r}_j, \quad \frac{\partial t}{\partial \mathbf{w}} = 0. \tag{3.43}$$

Pierwsze wyrażenie w (3.43) należy rozumieć jako operator działający na wektor, który należy umieścić w nawiasie $\{\cdot\}$.
Podobnie jak w przypadku translacji otrzymujemy zachowywaną wielkość wektorową $\mathbf{L}_o$ daną przez podstawienie (3.43) do (3.35) ze zmienionym znakiem

$$\mathbf{L}_o = -\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \times \mathbf{r}_j = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j. \tag{3.44}$$

co oznacza, że symetria względem obrotów prowadzi do zasady zachowania momentu pędu.

Uwaga
Przedstawione powyżej wyprowadzenia wykorzystują skrócony zapis wektorowy badanych obiektów. Można jednak bez trudu przeprowadzić bardziej elementarne rachunki używając w sposób jawny wszystkich składowych wektorów.

3.5 Równania Hamiltona

Równania Eulera-Lagrange'a są układem f równań różniczkowych drugiego rzędu, a więc dla wyznaczenia ruchu należy podać $2f$ wartości początkowych, f współrzędnych i f prędkości uogólnionych. Oznacza to, że przez dowolny punkt f - wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej może przechodzić nieskończenie wiele trajektorii. Z wielu powodów wygodniejszy opis dynamiki wykorzystuje $2f$-wymiarową *przestrzeń fazową* i układ $2f$ równań różniczkowych pierwszego rzędu. Wtedy punkt przestrzeni fazowej określa w pełni stan układu i pozwala znaleźć jedyną trajektorię układu przechodzącą przez ten punkt.

3.5.1 Przestrzeń fazowa

Przestrzeń fazową określamy wprowadzając *pędy uogólnione* $p = \{p_1, p_2, ..., p_f\}$ jako funkcje prędkości i współrzędnych uogólnionych

$$p_j \equiv p_j(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, ..., f. \tag{3.45}$$

Możemy teraz wykorzystać (3.45) do przedstawienia prędkości uogólnionych jako funkcji współrzędnych i pędów uogólnionych

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q, p, t) \tag{3.46}$$

oraz zdefiniować *funkcję Hamiltona*, w skrócie *hamiltonian*

$$H(q,p,t) = \sum_{j=1}^{f} p_j \dot{q}_j(q,p,t) - L\Big(q, \dot{q}(q,p,t), t\Big). \tag{3.47}$$

Porównując (3.47) z (3.37) widzimy, że hamiltonian możemy traktować jako energię układu.

3.5.2 Równania Hamiltona

Aby znaleźć równania ruchu dla *zmiennych kanonicznych* $\{q,p\}$ obliczmy pochodne hamiltonianu wykorzystując definicje pędów uogólnionych (3.45) i hamiltonianu (3.47)

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{f} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k} \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k + \sum_{j=1}^{f} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} - \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} = \dot{q}_k. \tag{3.49}$$

Pamiętając, że równania Eulera-Lagrange'a (3.11) są spełnione, czyli $\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \dot{p}_k$, otrzymujemy równania Hamiltona

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1,2,...,f. \tag{3.50}$$

Przykład
Dla cząstki w polu siły centralnej opisanej funkcją Lagrange'a (3.14) pędy uogólnione mają postać

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \tag{3.51}$$

a hamiltonian jest dany wyrażeniem

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\phi^2\right] + U(r). \tag{3.52}$$

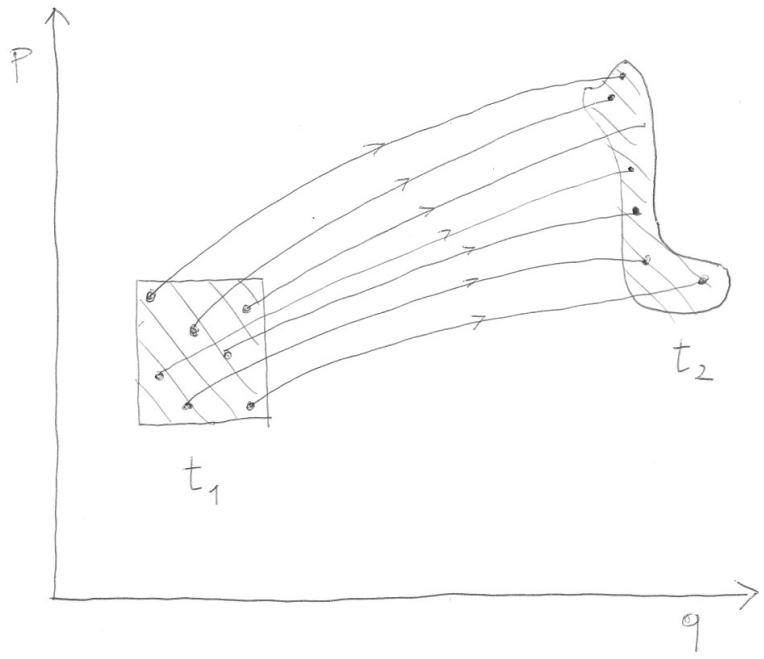
Ostatecznie otrzymujemy równania Hamiltona równoważne równaniom Eulera-Lagrange'a (3.15)

$$\dot{p}_r = \frac{1}{mr^3}p_\phi^2 - U'(r), \quad \dot{p}_\phi = 0. \tag{3.53}$$

Zauważmy, że pierwsze równanie zawiera "siłę odśrodkową" a drugie opisuje zachowanie momentu pędu.

3.5.3 Twierdzenie Liouville'a

Fakt, że w przestrzeni fazowej przez każdy punkt przechodzi jedna trajektoria opisująca ewolucje w czasie hamiltonowskiego układu pozwala na "hydrodynamiczną" interpretację dynamiki (patrz Rys.3.3). Możemy traktować każdy punkt przestrzeni fazowej jako cząstkę $2f$-



Rysunek 3.3: Hydrodynamiczny model przestrzeni fazowej. Objętość obszaru nie zmienia się pod wpływem ewolucji.

wymiarowej cieczy, a trajektorie tych punktów jako linie prądu. Pokażemy, że ciecz ta może być traktowana jako nieściśliwa. Własność tę możemy opisać następującym twierdzeniem.

Twierdzenie Liouville'a

Objętość dowolnego obszaru przestrzeni fazowej nie zmienia się w czasie ruchu opisanego kanonicznymi równaniami Hamiltona.

Aby udowodnić to twierdzenia wystarczy wykazać niezmienniczość objętości względem infinitezymalnej transformacji przestrzeni fazowej

$$q_j \equiv q_j(t) \to q'_j \equiv q_j(t+dt) = q_j + \dot{q}_j\, dt, \quad p_j \equiv p_j(t) \to p'_j \equiv p_j(t+dt) = p_j + \dot{p}_j\, dt. \quad (3.54)$$

Oznaczając współrzędne kanoniczne (q,p) wspólnym symbolem $x = \{x_1, x_2, ..., x_{2f}\}$ możemy obliczyć Jakobian transformacji $x \to x' = x + \dot{x}dt$ z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu względem dt

$$\det\Big[\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta}\Big] = \det\Big[\delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_\beta}dt\Big] \simeq 1 + \sum_{\alpha=1}^{2f}\frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_\alpha}dt = 1 + \sum_{j=1}^{f}\Big[\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j}\Big]dt. \quad (3.55)$$

Wykorzystując równania Hamiltona (3.50) otrzymujemy

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_j}, \quad \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_j}. \tag{3.56}$$

Po podstawieniu (3.56) do (3.55) widzimy, że Jakobian transformacji infinitezymalnej jest równy jeden a więc objętość przestrzeni fazowej jest zachowana.

3.5.4 Nawiasy Poissona

Dla każdej pary funkcji $F(q,p)$ i $G(q,p)$, określonych na przestrzeni fazowej, definiujemy *nawias Poissona* jako wyrażenie postaci

$$\{F,G\} \equiv \sum_{j=1}^{f}\Big[\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial G}{\partial q_j}\frac{\partial F}{\partial p_j}\Big]. \tag{3.57}$$

Bezpośrednim rachunkiem można dowieść następujących własności nawiasów Poissona

$$\{F,G\} = -\{G,F\}, \tag{3.58}$$

$$\{F,G_1+G_2\} = \{F,G_1\}+\{F,G_2\}, \tag{3.59}$$

$$\{F,G_1\,G_2\} = G_1\{F,G_2\}+\{F,G_1\}G_2, \tag{3.60}$$

$$\{G_1,\{G_2,G_3\}\} + \{G_3,\{G_1,G_2\}\}+\{G_2,\{G_3,G_1\}\} = 0, \tag{3.61}$$

gdzie ostatni związek nazywamy *tożsamością Jacobiego*.

Wykorzystując definicję (3.57) można wyprowadzić szereg użytecznych relacji zawierających nawiasy Poissona.

Nawias Poissona dowolnej wielkości mierzalnej układu $G(q,p)$ ze zmienną kanoniczną wynosi

$$\{G,q_j\} = -\frac{\partial G}{\partial p_j}, \quad \{G,p_j\} = \frac{\partial G}{\partial q_j}. \tag{3.62}$$

W szczególności gdy G jest zmienną kanoniczną otrzymujemy relacje

$$\{q_j,p_k\} = \delta_{jk}, \quad \{q_j,q_k\} = 0, \quad \{p_j,p_k\} = 0. \tag{3.63}$$

Pochodna zupełna po czasie dla wielkości $A(q,p,t)$, która zależy od czasu poprzez zmienne kanoniczne ale także może zawierać jawną zależność od czasu jest dana wzorem

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{j=1}^{f}\Big(\frac{\partial A}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial A}{\partial p_j}\dot{p}_j\Big). \tag{3.64}$$

Po podstawieniu równań Hamiltona (3.50) do (3.67) pojawia się nawias Poissona i ostatecznie

otrzymujemu *równanie Liouville'a* opisujące dynamikę dowolnej wielkości fizycznej układu

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}. \tag{3.65}$$

W szczególności jeśli hamiltonian $H(q,p)$ nie jest jawnie zależny od czasu to

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = 0, \tag{3.66}$$

co oznacza zachowanie energii.

Nawiasy Poissona stanowią istotny element rozbudowanego formalizmu matematycznego mechaniki klasycznej. Pozwala on badać ogólne własności dynamiki, w tym zasady zachowania oraz istnienie analitycznych rozwiązań równań ruchu (układy całkowalne i niecałkowalne) a także jest podstawą dla schematów obliczeniowych opartych na rachunku perturbacyjnym.

Nawiasy Poissona pojawiają się także przy procedurze *kwantowania* tzn. przejścia od teorii klasycznej opisującej dany układ mechaniczny do teorii kwantowej. Symbolicznie procedurę *kanonicznego kwantowania* możemy przedstawić jako przepis na transformację

$$A(q,p) \to \hat{A}, \quad B(q,p) \to \hat{B}, \quad \{A, B\} \to \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}] \tag{3.67}$$

gdzie $\hat{A}, \hat{B}$ to obserwable kwantowe (operatory) odpowiadające klasycznym obserwablom A, B, a $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ jest *komutatorem* dla pary operatorów.

3.6 Przykład. Ruch obrotowy bryły sztywnej

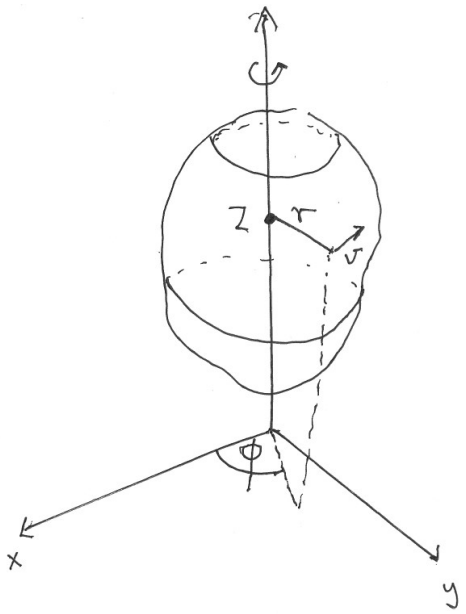
Bryła sztywna jest przykładem układu mechanicznego z ogromną liczbą więzów. Zakładamy mianowicie, że odległość między dowolną parą cząstek, z których składa się to ciało pozostaje stała [1]. Wtedy układ taki ma sześć stopni swobody, na które składają się trzy współrzędne opisujące położenie środka masy (patrz (2.10)) oraz trzy kąty opisujące orientację bryły sztywnej. Zwykle wprowadza się dodatkowe więzy jak np. ustalony punkt podparcia dla wirujacego bąka. Następnie można wyrazić energię kinetyczną i potencjalną (np. w polu grawitacyjnym) za pomocą tych współrzędnych i ich pochodnych po czasie. Pozwala to stworzyć funkcje Lagrange'a i Hamiltona i wyprowadzić odpowiednie równania ruchu.

Dla ilustracji rozważamy jedynie najprostrzy przypadek jakim jest ruch bryły sztywnej wokół ustalonej osi, powiedzmy z, opisywany we współrzędnych cylindrycznych (r, ϕ, z) (Rys.3.4).

Jeśli obrót wokół osi z opisujemy za pomocą kąta $\phi(t)$ to prędkość kątowa $\omega = \dot{\alpha}$ wiąże się z prędkością liniową v elementu bryły oddalonego od osi z na odległość r wzorem

$$v = r\,\omega. \tag{3.68}$$

[1] Oczywiście na poziomie mikroskopowym, atomy wykonują drgania względem punktów równowagi, ale je pomijamy. Oznacza to, że "cząstkami" w naszym modelu bryły sztywnej są raczej jej fragmenty na tyle duże aby zawierały wiele atomów, których przypadkowe drgania możemy uśrednić.



Rysunek 3.4: Obrót bryły sztywnej względem osi Z w cylindrycznym układzie współrzędnych.

Stąd energię kinetyczną obracającej się bryły opisujemy za pomocą momentu bezwładności I (względem osi z)

$$T = \frac{1}{2} I\,\omega^2, \quad I = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(r,\phi,z) r^2\, dr\, d\phi\, dz. \tag{3.69}$$

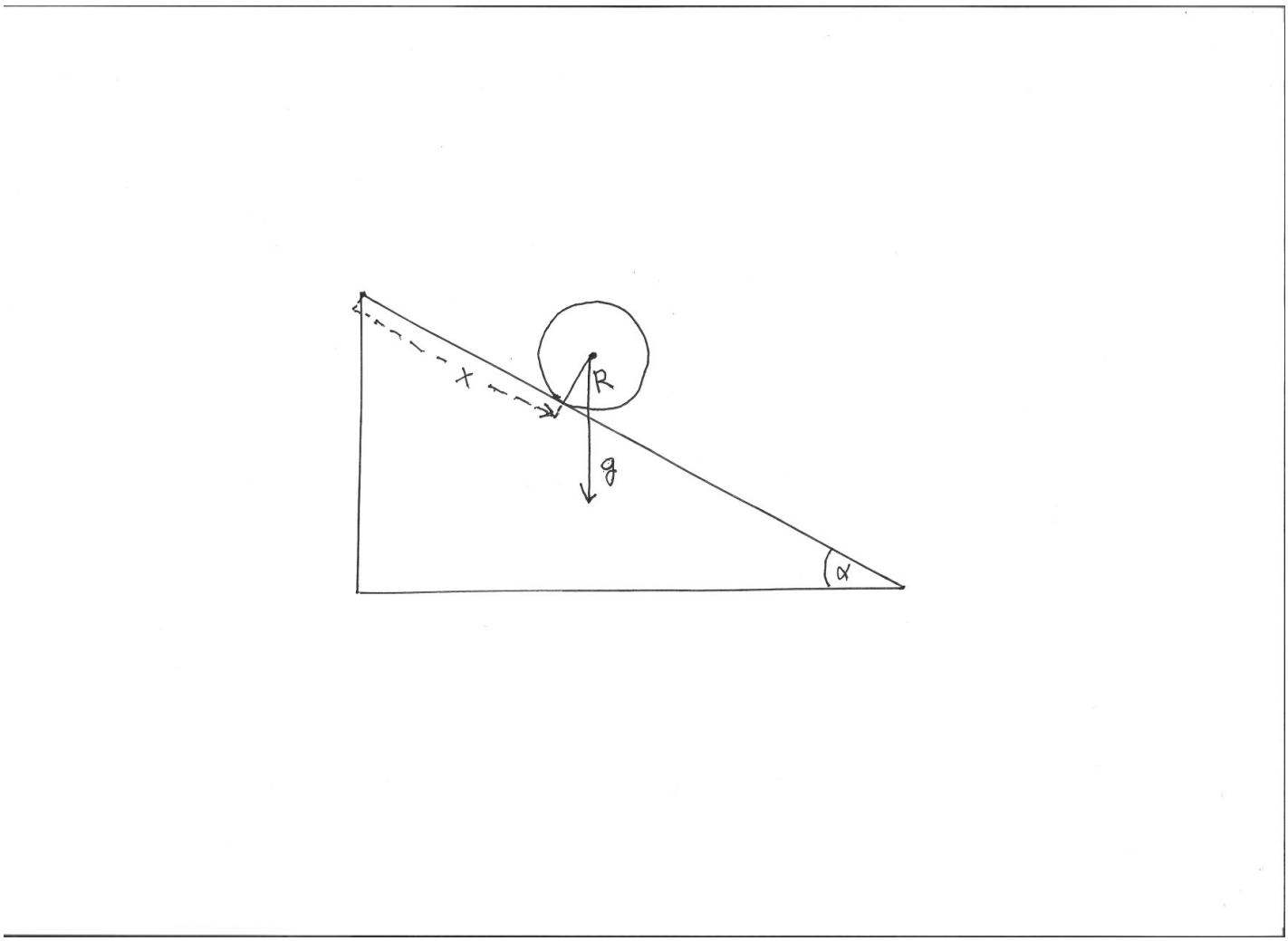
Następny przykład toczącego się walca po równi pochyłej (patrz Rys.3.5) ilustruje zalety formalizmu kanonicznego

Ponieważ zakładamy, że walec toczy się bez poślizgu to jego ruch obrotowy jest ściśle związany z ruchem postępowym po równi pochyłej. Stąd wynika, że układ posiada jeden stopień swobody, który można opisać współrzędną x jego środka masy mierzoną wzdłuż równi. Wtedy prędkość kątowa obrotu ω jest związana z prędkością liniową środka masy relacją

$$\dot{x} = R\,\omega \tag{3.70}$$

gdzie R jest promieniem walca. Energia kinetyczna walca jest sumą energii kinetycznych ruchu obrotowego i postępowego

$$T = \frac{1}{2} I\,\omega^2 + \frac{1}{2} M\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\Big(M + \frac{I}{R^2}\Big)\dot{x}^2, \tag{3.71}$$



Rysunek 3.5: Walec toczący się po równi pochyłej.

gdzie M jest masą walca a I jego momentem bezwładności. Uwzględniając energię potencjalną w polu grawitacyjnym

$$U = -M\,g\,x\,\sin\alpha, \tag{3.72}$$

otrzymujemy funkcję Lagrange'a

$$L(x,\dot{x}) = T - U = \frac{1}{2}\Big(M + \frac{I}{R^2}\Big)\dot{x}^2 + (Mg\sin\alpha)x, \tag{3.73}$$

i odpowiednie równanie Eulera-Lagrange'a opisujące ruch jednostajnie przyśpieszony

$$\ddot{x} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I}{MR^2}}. \tag{3.74}$$

Funkcję Hamiltona otrzymujemy wykorzystując definicje i pamiętając, że $\dot{x}$ należy przedstawić jako funkcję x i p

$$H(x,p) = p\dot{x} - L(x,\dot{x}), \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}. \tag{3.75}$$

Po podstawieniu otrzymujemy ostatecznie

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2\left(M + \frac{I}{R^2}\right)} - Mg\sin\alpha x, \tag{3.76}$$

i równania Hamiltona

$$\dot{x} = \frac{p}{\left(M + \frac{I}{R^2}\right)}, \quad \dot{p} = Mg\sin\alpha. \tag{3.77}$$

Literatura

G. Białkowski, *Mechanika klasyczna*, PWN, Warszawa, 1975.

R. Douglas Gregory, *Classical Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

Podstawy fizyki teoretycznej dla fizyki medycznej

II. Mechanika płynów i elektrodynamika

Robert Alicki

22 czerwca 2013

Wstęp matematyczny

Zarówno mechanika ośrodków ciągłych jak i elektrodynamika wymaga zastosowania formalizmu matematycznego teorii pola. Polem nierelatywistycznym będziemy nazywać funkcję $f(\mathbf{r},t)$ położenia i czasu o wartościach w pewnej skończenie-wymiarowej przestrzeni liniowej. W praktyce ograniczymy się do dwóch rodzajów pól, skalarnego $\phi(\mathbf{r},t)$ i wektorowego $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$. Pola relatywistyczne to funkcje określone na czasoprzestrzeni Minkowskiego, czyli funkcje zmiennych $x \equiv (x^0,x^1,x^2,x^3) \equiv (x^\mu) \equiv (ct,\mathbf{r})$ o określonych własnościach transformacyjnych przy przejściu z jednego układu inercjalnego do drugiego. Ograniczymy się tu do trzech typów pól relatywistycznych, skalarnego $\phi(x)$, wektorowego $A_\mu(x)$ i tensorowego (drugiego stopnia) $T_{\mu\nu}(x)$. Tensor metryczny $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \equiv \mathrm{diag}[1,-1,-1,-1]$ będzie używany do podnoszenia i opuszczania wskaźników z zastosowaniem konwencji sumacyjnej Einsteina.

0.1 Elementy analizy wektorowej w $\mathbf{R}^3$

Wektorowy różniczkowy operator gradientu $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ pozwala zdefiniować szereg operacji na polach.

Gradient pola skalarnego $\phi(\mathbf{r})$ jest polem wektorowym postaci

$$\nabla\phi = \Big(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\Big) \tag{1}$$

Formalny "kwadrat" gradientu ∇^2 jest skalarnym operatorem różniczkowym nazywanym Laplace'anem (laplasjanem) i oznaczanym przez Δ. Może on działać na pola skalarne, wektorowe i inne zachowując ich charakter

$$\nabla^2 F \equiv \Delta F \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \tag{2}$$

Dywergencja pola wektorowego to funkcja skalarna zdefiniowa jako formalny iloczyn skalarny

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{3}$$

Rotacją pola wektorowego nazywamy pole wektorowe otrzymane jako formalny iloczyn wektorowy o składowych

$$\nabla \times \mathbf{A} \equiv \Big(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Big). \tag{4}$$

Bezpośrednim rachunkiem możemy sprawdzić następujące tożsamości

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0, \tag{5}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0, \tag{6}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \tag{7}$$

Ważnym narzędziem analizy wektorowej jest *lemat Poincare'go.*

Lemat Poincare'go

Załóżmy, że pole wektorowe $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ *jest określone w pewnym obszarze* $\mathbf{R}^3$ sciągalnym do punktu. *Wtedy, jeśli rotacja tego pola znika, to jest ono gradientem pewnego pola skalarnego tzn.*

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{A} = \nabla \phi. \tag{8}$$

Jeśli natomiast znika jego dywergencja, to pole to jest rotacją pewnego pola wektorowego, czyli

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B}. \tag{9}$$

Pole ϕ jest wyznaczone z dokładnością do stałej a pole $\mathbf{B}$ z dokładnością do gradientu dowolnego pola skalarnego.

0.1.1 Twierdzenia Gaussa i Stokesa

Rozważmy *krzywą zorientowaną* C określoną za pomocą funkcji zmiennej τ o wartościach w przestrzeni $\mathbf{R}^3$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau), \quad \tau \in [a, b]. \tag{10}$$

Jeśli wzdłuż tej krzywej zadane jest pole wektorowe $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ to możemy zdefiniować następującą *całkę krzywoliniową*

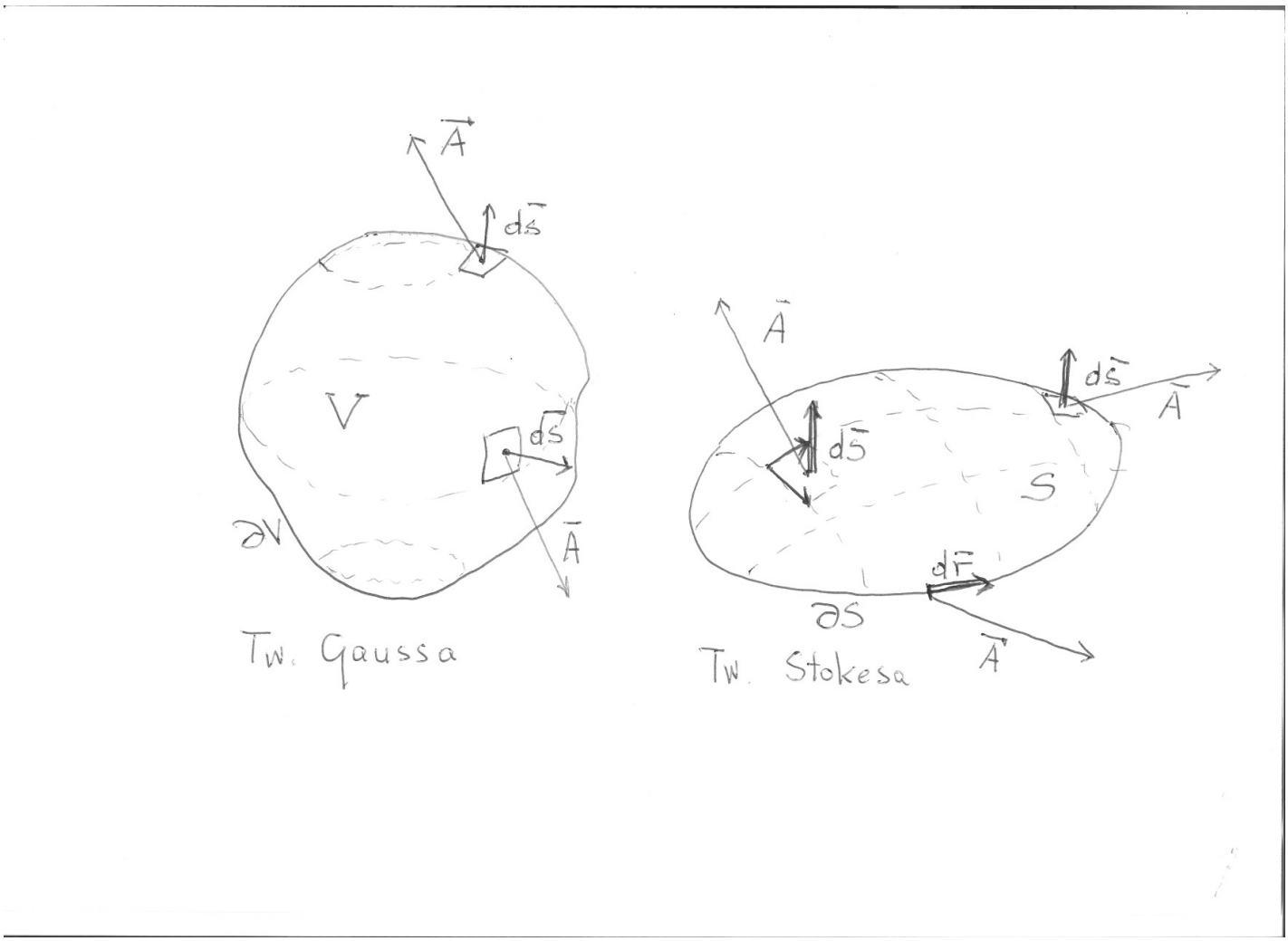
$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(\tau)) \cdot \mathbf{t}(\tau)\, d\tau, \quad \tau \in [a, b]. \tag{11}$$

gdzie $\mathbf{t}(\tau) = \frac{d\mathbf{r}(\tau)}{d\tau}$ jest wektorem stycznym do krzywej C.

Rozważmy teraz *powierzchnię zorientowaną* S w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ z brzegiem oznaczanym przez ∂S opisanym pewną krzywą. Powierzchnia jest zorientowana przez wybór zwrotu wektorów do niej prostopadłych, ktory jest zgodny z orientacja brzegu (reguła śruby prawoskrętnej, patrz Rys.1). Powierzchnie taką można opisać za pomocą wektorowej funkcji dwóch parametrów

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2. \tag{12}$$

Infinitezymalny element powierzchni możemy traktować jako wektor do niej prostopadły o długości równej polu tego elementu i zwrocie wyznaczonym przez orientację. Można go zdefiniować



Rysunek 1: Ilustracja do twierdzeń Gaussa i Stokesa.

używając okreslonej wyżej parametryzacji

$$d\mathbf{s} = (\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v)du\,dv, \quad \mathbf{t}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{t}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}. \tag{13}$$

Mając teraz pole wektorowe $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ określone na powierzchni S definiujemy *strumień pola wektorowego przez powierzchnię* jako całkę podwójną

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{t}_u(u,v) \times \mathbf{t}_v(u,v))\,du\,dv, \tag{14}$$

Możemy teraz sformułować dwa ważne twierdzenia (patrz Rys.1.)

Twierdzenie Gaussa

Strumień pola wektorowego $\mathbf{A}$ *przez zamkniętą, zorientowaną na zewnątrz powierzchnię* ∂V*, będącą brzegiem trójwymiarowego obszaru* V *jest równy całce po obszarze* V *z dywergencji* $\mathbf{A}$

$$\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{A})\,d^3\mathbf{r}, \quad d^3\mathbf{r} \equiv dx\,dy\,dz. \tag{15}$$

Twierdzenie Stokesa

Całka krzywoliniowa pola wektorowego $\mathbf{A}$ *wzdłuż krzywej zamkniętej* ∂S *będącej brzegiem zorientowanej powierzchni* S *jest równa strumieniowi rotacji* $\mathbf{A}$ *przez* S

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}. \tag{16}$$

Na zakończenie przedstawimy dwie modyfikacje twierdzeń Gaussa i Stokesa, które będą wykorzystane w dalszej części wykładu. Pierwsza z nich to następująca formuła dla funkcji skalarnej $f(\mathbf{r})$ całkowanej z wektorową miarą $d\mathbf{s}$ po zorientowanej zamkniętej powierzchni ∂V będącej brzegiem obszaru V

$$\iint_{\partial V} f \, d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla f \, d^3\mathbf{r}. \tag{17}$$

Formułę tą można dowieść mnożąc skalarnie lewą stronę równania (17) przez dowolny stały wektor $\mathbf{a}$ i stosując twierdzenie Gaussa do pola wektorowego $\mathbf{A} = f\,\mathbf{a}$. Druga to formuła dla całki z funkcji skalarnej $f(\mathbf{r})$ po konturze zamkniętym ∂S będącym brzegiem zorientowanej powierzchni S

$$\oint_{\partial S} f \, d\mathbf{r} = -\iint_S \nabla f \times d\mathbf{s}. \tag{18}$$

Aby udowodnić (18) mnożymy skalarnie lewą stronę tego równania przez dowolny stały wektor $\mathbf{a}$ i stosujemy twierdzenie Stokesa do pola wektorowego $\mathbf{A} = f(\mathbf{r})\mathbf{a}$. Następnie wykorzystujemy możliwość cyklicznego przestawiania w iloczynie mieszanym, $\Big(\nabla \times (f\mathbf{a})\Big) \cdot d\mathbf{s} = (d\mathbf{s} \times \nabla f) \cdot \mathbf{a}$.

Rozdział 1

Elementy mechaniki płynów

W odróżnieniu od mechaniki klasycznej, gdzie układy fizyczne traktowane są jako zespoły cząstek mechanika płynów będąca częścią mechaniki ośrodów ciągłych opiera się na ciągłym modelu materii. Jest to pewna idealizacja wynikająca z założenia, że nawet infinitezymalne elementy objętości zawierają tak wiele atomów, aby można było pominąć (uśrednić) ich indywidualny chaotyczny ruch a rozważać jedynie ruch środka masy całego elementu. Do opisu ruchu infinitezymalnego elementu będziemy stosować równania Newtona i wynikające z nich zasady zachowania. Przedstawiona teoria stosuje się do cieczy a także w ograniczonym zakresie do gazów jeśli prędkości przepływu są niższe niż prędkość dźwięku.

1.1 Podstawowe równania

Stan płynu opisujemy *polem gęstości* $\rho(\mathbf{r},t)$, *polem ciśnienia* $p(\mathbf{r},t)$ i wektorowym *polem prędkości* $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$. Odpowiednie równania opisujące dynamikę płynu będą konsekwencją zasady zachowania masy i równań Newtona.

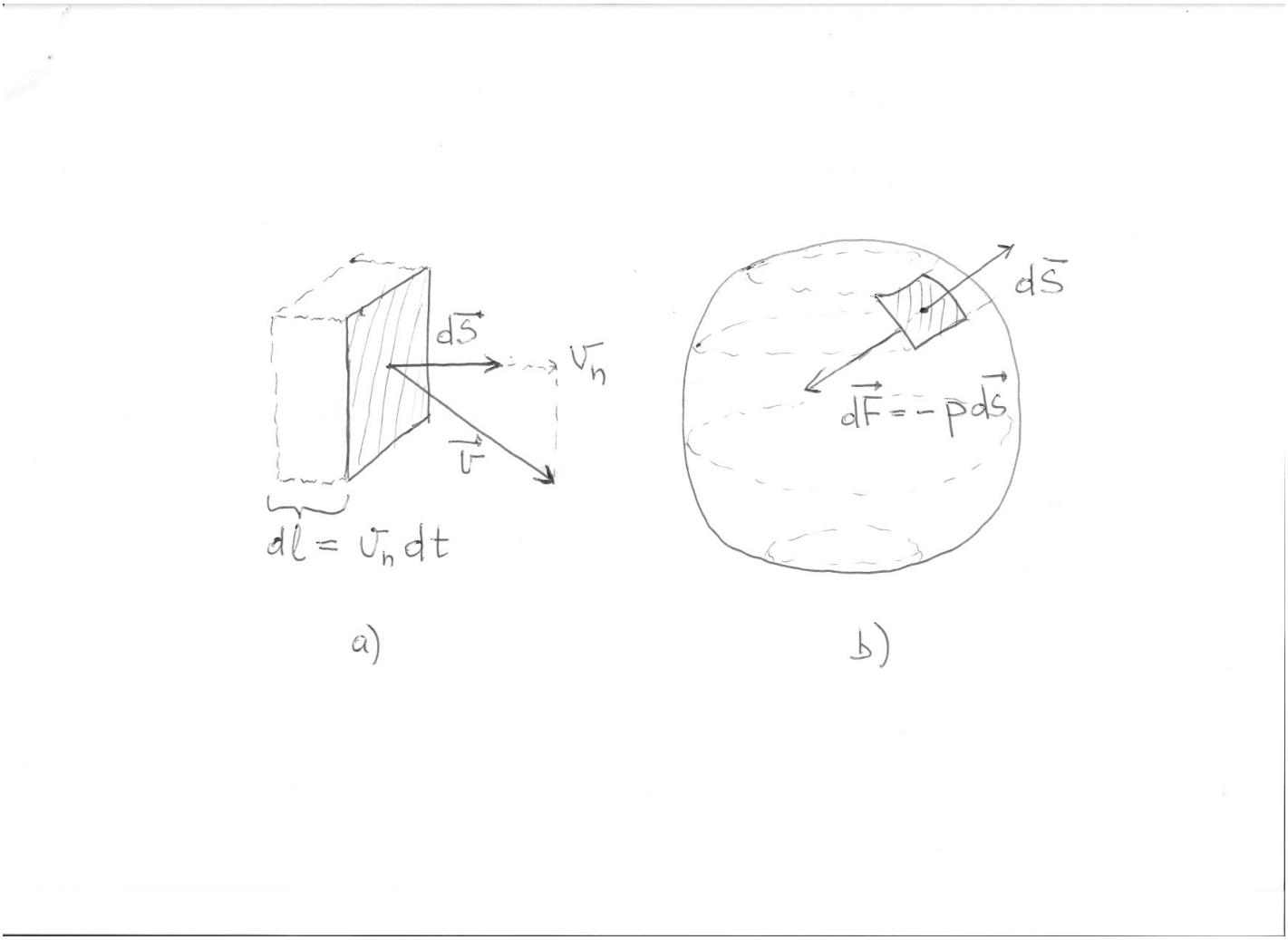
1.1.1 Równanie ciągłości

Rozważmy otoczenie punktu $\mathbf{r}$, w którym prędkość płynu jest równa $\mathbf{v}$ a gęstość ρ. Policzymy teraz masę płynu przepływającą w czasie dt przez element powierzchni wyznaczony przez wektor $d\mathbf{s}$. Jak wyjaśnia to Rys.1.1a masa ta równa jest

$$dm = \rho\,|d\mathbf{s}|\,v_n\,dt = \rho\,(\mathbf{v}\cdot d\mathbf{s})\,dt \tag{1.1}$$

gdzie v_n jest składową prędkości płynu normalną do elementu powierzchni. Dla dowolnego obszaru V ograniczonego powierzchnią zamkniętą ∂V możemy policzyć masę płynu wypływającego przez tę powierzchnię w jednostce czasu używając (1.1)

$$\frac{dM}{dt} = -\iint_{\partial V}\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{s} = -\iiint_{V}\nabla\cdot\Big[\rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\Big]\,d^3\mathbf{r} \tag{1.2}$$



Rysunek 1.1: a) Przepływ płynu przez element powierzchni. b) Siła pochodząca od ciśnienia.

gdzie druga równość jest konsekwencją twierdzenia Gaussa. Z drugiej strony zmiana masy płynu wewnątrz obszaru V jest powiązana ze zmianą gęstości

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_V \rho(\mathbf{r},t)\, d^3\mathbf{r} = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t)\, d^3\mathbf{r}. \tag{1.3}$$

Porównując prawe strony równań (1.2) i (1.3) i pamiętając, że obszar V jest dowolny otrzymujemy *równanie ciągłości*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \mathbf{v}) = 0. \tag{1.4}$$

W dalszej cześci tego wykładu będziemy rozważać model *cieczy nieściśliwej* tzn. takiej, której gęstość jest stała, $\rho = \text{const}$. Wtedy równanie ciągłości staje się warunkiem znikania dywergencji pola prędkości

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{1.5}$$

1.1.2 Równanie dla "suchej cieczy"

Zaczniemy od obliczenia przyśpieszenia elementu cieczy, którego ruch opisany jest polem prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Zmiana prędkości wywołana jest przez dwa czynniki: zmianę prędkości na skutek przesunięcia elementu do innego punktu w przestrzeni i zmianę w czasie prędkości w danym punkcie, co można zapisać jako

$$\mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt. \tag{1.6}$$

Stąd przyśpieszenie elementu cieczy ma postać

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \tag{1.7}$$

Zauważmy pojawienie się w obu formułach *pochodnej kierunkowej* $\mathbf{v} \cdot \nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$.

Dla cieczy nieściśliwej element objętości $d^3\mathbf{r}$ ma masę $\rho\, d^3\mathbf{r}$ i jego ruch opisany jest równaniem Newtona

$$(\rho\, d^3\mathbf{r})\, \mathbf{a} = d\,\mathbf{F} = \mathbf{f}\, d^3\mathbf{r}, \tag{1.8}$$

gdzie $d\,\mathbf{F}$ to wypadkowa siła działająca na ten element, która może być wyrażona przez gęstość siły $\mathbf{f}$. Łącząc równania (1.7) i (1.8) oraz (1.5) otrzymujemy podstawowe równania dla pola prędkości

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{1.9}$$

Wyprowadzimy teraz wzory na gęstości sił pochodzących od ciśnienia panującego w cieczy i od pola grawitacyjnego. Rozważmy wypadkową siłę $\mathbf{F}$ pochodzącą od ciśnienia $p(\mathbf{r}, t)$ działającą na powierzchni ∂V pewnego obszaru V (patrz Rys.1.1b)

$$\mathbf{F} = -\iint_{\partial V} p(\mathbf{r}, t) d\mathbf{s}. \tag{1.10}$$

Wykorzystując teraz formułę (17) otrzymujemy

$$\mathbf{F} = -\iint_{\partial V} p(\mathbf{r}, t)\, d\mathbf{s} = -\iiint_{V} \nabla p\, d^3\mathbf{r}, \tag{1.11}$$

a stąd gęstość siły wywołanej ciśnieniem jest równa

$$\mathbf{f}_c = -\nabla p. \tag{1.12}$$

Siła pochodząca od potencjału grawitacyjnego $U(\mathbf{r}, t)$ działająca na element objętości o masie $\rho\, d^3\mathbf{r}$ jest dana przez $d\,\mathbf{F} = -(\rho\, d^3\mathbf{r})\nabla U$ co daje gęstość siły

$$\mathbf{f}_g = -\rho \nabla U. \tag{1.13}$$

Uwzględniając jedynie te dwa rodzaje sił a pomijając niezachowawcze siły związane z wewnętrz-

nym tarciem (lepkością cieczy) otrzymujemy równanie "suchej cieczy" [1]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla U = 0. \tag{1.14}$$

1.2 Twierdzenie Bernouliego

Wygodnym graficznym przedstawieniem wektorowego pola prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ jest użycie linii prądu. Linie prądu to krzywe styczne w każdym punkcie do wektora prędkości. Dla ustalonej chwili t są one rozwiązaniami równania różniczkowego

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \mathbf{v}(\mathbf{r}(s), t). \tag{1.15}$$

Zajmiemy się teraz *przepływem ustalonym* gdy pole prędkości nie zmienia się w czasie tzn.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r}). \tag{1.16}$$

Wtedy równanie (1.14) redukuje się do równania

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla U = 0 \tag{1.17}$$

z niezależnymi od czasu polami ciśnienia $p(\mathbf{r})$ i potencjału grawitacyjnego $U(\mathbf{r})$. Wykorzystamy teraz następującą tożsamość, którą można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v}^2) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}. \tag{1.18}$$

Mnożąc skalarnie obie strony równania (1.18) przez $\mathbf{v}$ otrzymujemy

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla\Big(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\Big). \tag{1.19}$$

Podobnie możemy pomnożyć obie strony równania (1.17) i wykorzystać (1.19) dla wyprowadzenia formuły (pamiętamy, że gęstość ρ jest stałą)

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\Big(\frac{1}{2}\rho\,\mathbf{v}^2 + p + \rho U\Big) = 0. \tag{1.20}$$

Ponieważ $\mathbf{v} \cdot \nabla$ oznacza pochodną kierunkową wzdłuż stycznej do linii prądu to wielkość w nawiasie jest zachowana wzdłuż tych linii. Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie:

[1] Nazwa ta wynika z faktu, że ciecz odbieramy jako "mokrą" z powodu jej lepkości.

Twierdzenie Bernoulli'ego

Dla cieczy nieściśliwej i nielepkiej, w przepływie ustalonym, gęstość energii dana wzorem

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho\,\mathbf{v}^2 + p + \rho U \tag{1.21}$$

jest stała wzdłuż linii prądu.

Podstawowym wnioskiem płynącym z twierdzenia Bernoulliego jest to, że obszarach gdzie prędkość przepływu rośnie maleje ciśnienie płynu i odwrotnie. Jest to źródłem wielu efektów w hydrodynamice i aerodynamice.

Efekt Magnusa

Przykładem zastosowania twierdzenia Bernoulliego do jakościowego wyjaśnienia zjawiska jest mechanizm powstawania *siły Magnusa*. Jest ona źródłem efektu "podkręcenia" piłki stosowanego przez piłkarzy/piłkarki i tenisistów/tenisistki. Rys.1.2 ilustruje ten mechanizm. Kula, porusza się względem płynu z pewną prędkością jednocześnie wykonując ruch obrotowy. Wskutek zjawiska adhezji (przylegania) cząstek płynu do powierzchni kuli prędkośc płynu "pociąganego" przez kulę jest po jednej stronie zwiększona a po drugiej zmniejszona. Tam gdzie prędkość jest wyższa ciśnienie maleje i odwrotnie co powoduje powstanie wypadkowej siły w kierunku prostopadłym do prędkości płynu i osi obrotu kuli.

1.3 Równanie Naviera-Stokesa

Przedstawimy teraz modyfikację równania (1.14), które uwzględnia lepkość płynu. Mikroskopowy mechanizm lepkości wyjaśnia Rys.1.3. W strumieiu cieczy, w którym różne warstwy poruszają się z różnymi prędkościami zachodzą procesy dyfuzji. Cząstki o wyższej prędkości wędrują do warstw o prędkości niższej i odwrotnie. Wypadkowym rezultatem tych procesów jest zanikanie różnic prędkości między warstwami i zamiana energii ruchu uporządkowanego na energię ruchu chaotycznego (ciepło). Jest to szczególny przykład zjawiska transportu, w tym przypadku transportu pędu. Ogólnie transport pewnej wielkości fizycznej N np. pędu, masy rozpuszczonej substancji, ładunku elektrycznego, ciepła, itp. opisujemy równaniem ciągłości podobnym do (1.4)

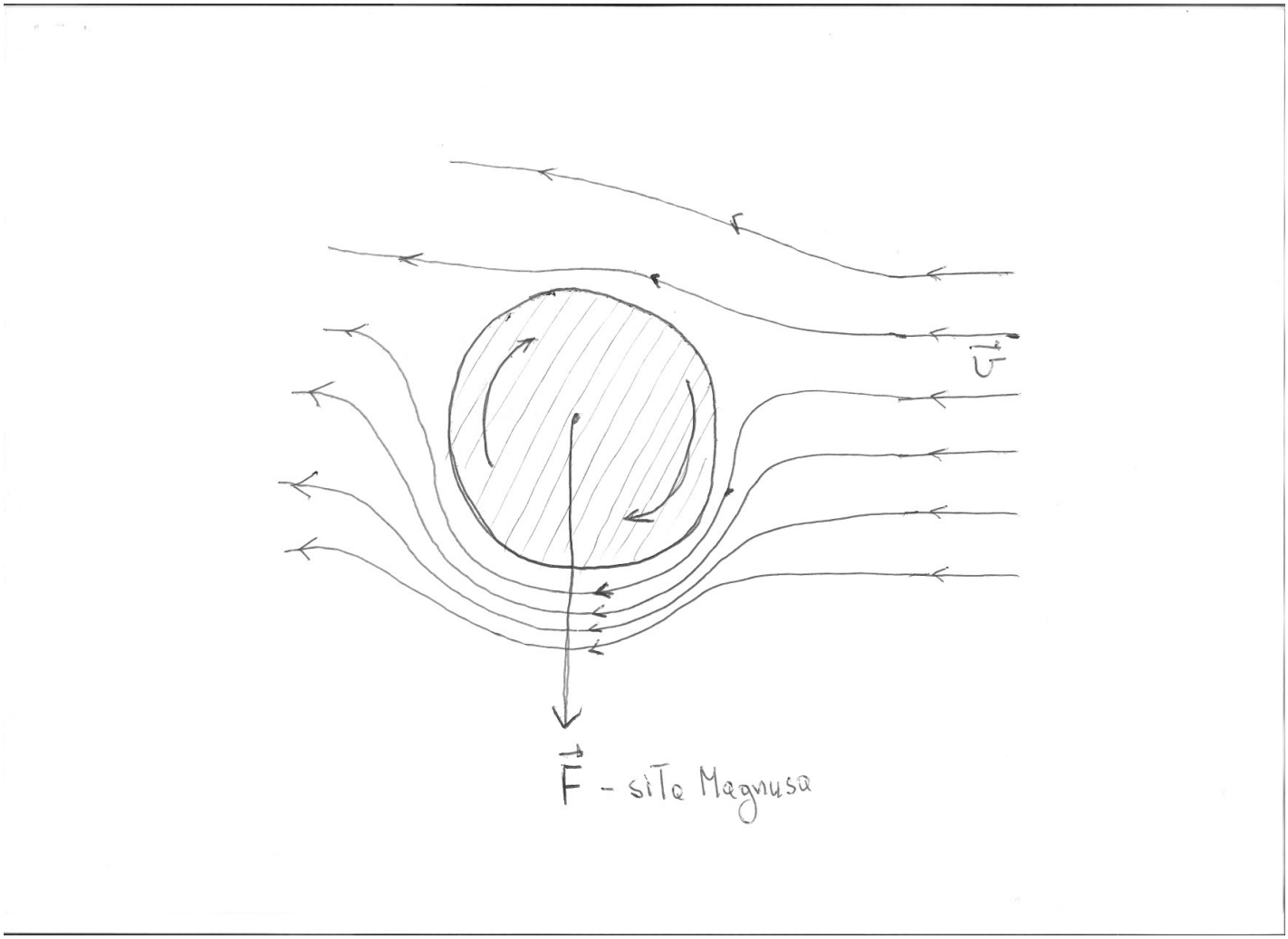
$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0, \tag{1.22}$$

gdzie n jest gęstością wielkości N, a $\mathbf{j}$ jest wektorem gęstości prądu opisującym jej przepływ. Można przyjąć jako rozsądne przybliżenie, zwanem prawem Ficka, że prąd jest proporcjonalny do gradientu gęstości

$$\mathbf{j} = -\nu \nabla n. \tag{1.23}$$

Łącząc (1.23) z (1.22) otrzymujemy równanie dyfuzji dla gęstości n

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nu \Delta n, \tag{1.24}$$



Rysunek 1.2: Efekt Magnusa.

gdzie ν jest stałą dyfuzji. Stosując teraz równanie dyfuzji do składowych prędkości płynu możemy przyjąć, że zmiana prędkości wywołana zjawiskiem transportu pędu czyli lepkością dana jest przez

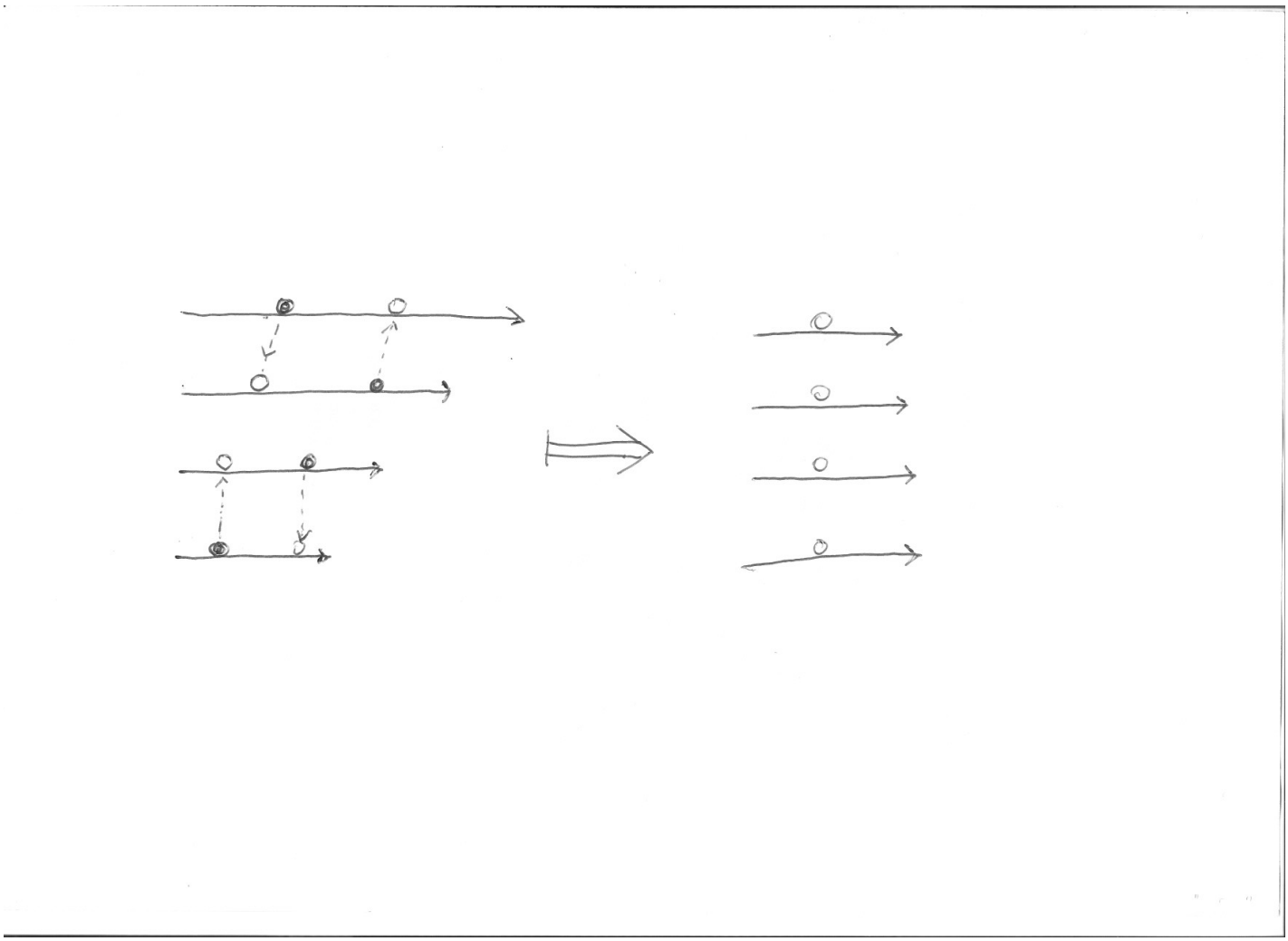
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}|_{\text{dyfuzja}} = \nu \Delta \mathbf{v}, \tag{1.25}$$

Dodając ten przyczynek do innych opisanych równaniem (1.14) otrzymujemy:

Równanie Naviera-Stokesa

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \frac{\mu}{\rho}\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla U = 0. \tag{1.26}$$

gdzie tradycyjnie zamiast stałej ν wprowadziliśmy *współczynnik lepkości dynamicznej* $\mu = \nu\rho$. Przypominamy, że równanie to zakłada nieściśliwość płynu (tzn. $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) oraz jego izotropowość, jednak w praktyce może być wykorzystane również w aerodynamice dla prędkości do około 0.3 Macha. Z punktu widzenia matematycznego równanie to jest bardzo trudne ze względu na nieliniowy człon $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$. Nawet kwestia istnienia jego rozwiązań dla wszystkich czasów $t > 0$ (przy zadanych p, U i wartościach początkowych $\mathbf{v}(\mathbf{r}, 0)$) jest problemem otwartym, a za jego rozwiązanie **Instytut Matematyczny Claya wyznaczył nagrodę 1 mln dolarów.**



Rysunek 1.3: Wyrównywanie prędkości cząsteczek płynu wskutek dyfuzji.

Z drugiej strony równanie Naviera-Stokesa stanowi podstawę teoretyczną aerodynamiki, hydrodynamiki czy meteorologii. Dzięki szybkim komputerom jego numeryczne rozwiązywanie stało się możliwe i jest podstawowym narzędziem używanym przy projektowaniu samochodów, samolotów, promów kosmicznych czy prognozowaniu pogody. Równanie to jest stosowane także do modelowania przepływu krwi w dużych naczyniach krwionośnych.

Rozdział 2

Równania elektrodynamiki klasycznej

Pole elektromagnetyczne w sformułowaniu nierelatywistycznym opisujemy dwoma polami wektorowymi $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Pole $\mathbf{E}$ nazywa się *natężeniem pola elektrycznego* a $\mathbf{B}$ *indukcją pola magnetycznego* . Zakładamy, że pola opisujemy w danym inercjalnym i kartezjańskim układzie odniesienia a jego wartości można określić operacyjnie badając ruch cząstki o ładunku elektrycznym q pod wpływem siły Lorentza wytwarzanej przez te pola

$$\mathbf{F} = q\Big(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\Big). \tag{2.1}$$

Znacznym utrudnieniem dla studiujących a także wykładających elektrodynamikę jest różnorodność układów jednostek stosowanych przez autorów podręczników i monografii. Będziemy wyłącznie stosować "legalny" układ jednostek SI pomimo, że równania elektrodynamiki w tym układzie są nieco trudniejsze do zapamiętania i mniej eleganckie niż w innych układach [1]. Podstawowe jednostki układu SI potrzebne w elektrodynamice to oprócz jednostek znanych z mechaniki: *metr* [m], *kilogram* [kg], *sekunda* [s] także jednostka natężenia prądu elektrycznego - *amper* [A]. W praktyce używa się wielu jednostek pochodnych, jak np. jednostka siły - *niuton* [N] = $[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2}]$, jednostka ładunku - *kulomb* [C]= [A $\cdot$ s], itp.

Ze wzoru (2.1) wynika, że jednostką natężenia pola elektrycznego jest $\mathrm{N/C} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}^3\cdot\mathrm{A}$ a jednostką indukcji magnetycznej *Tesla* $\mathrm{T} = \mathrm{kg/s}^2\cdot\mathrm{A}$.

2.1 Równania Maxwella

Zebrane przez wielu fizyków w wieku XIX dane doświadczalne dotyczące oddziaływań elektrycznych i magnetycznych ładunków i prądów pozwoliły Maxwellowi opisać wszystkie znane zjawiska i przewidzieć nowe w oparciu o układ równań różniczkowych pierwszego rzędu o pochodnych cząstkowych, który nosi nazwę *równań Maxwella*. Zwykle odpowiednie prawa opisane tymi równaniami wygodniej jest formułować w postaci całkowej, a następnie przejść do postaci różniczkowej używając twierdzeń Gaussa i Stokesa.

[1] Szczególnie elegancki ale bezużyteczny dla praktycznych obliczeń jest ulubiony wśród fizyków teoretyków układ jednostek Plancka, w którym podstawowe stałe fizyczne są równe 1.

2.1.1 Prawo Gaussa dla elektryczności

Uogólniając prawo Coulomba dla ładunku punktowego na jego dowolny rozkład, związek między polem $\mathbf{E}$ i gęstością ładunku $\rho(\mathbf{r}, t)$ można zapisać w postaci

$$\iint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, d^3\mathbf{r}, \tag{2.2}$$

co oznacza, że strumień pola elektrycznego przez powierzchnię zamkniętą ∂V ograniczającą obszar V jest proporcjonalny do ładunku elektrycznego znajdującego się w tym obszarze. Stałą proporcjonalności $\epsilon_0 = 8,854.. \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{A}^2 \cdot \mathrm{s}^4}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^3}$ nazywamy *przenikalnością elektryczną próżni*. Stosując teraz twierdzenie Gaussa (15) do lewej strony równania (2.2) i wykorzystując fakt, że zachodzi ono dla dowolnego obszaru V otrzymujemy różniczkową postać prawa Gaussa lub też pierwsze z równań Maxwella

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \tag{2.3}$$

2.1.2 Prawo Gaussa dla magnetyzmu

Podobnie możemy opisać własności pola magnetycznego wykorzystując fakt, że w Przyrodzie nie obserwujemy pojedynczych "ładunków magnetycznych" a jedynie kompensujące się pary - dipole magnetyczne[2]. Gęstość "ładunku magnetycznego" jest zatem równa zero co można zapisać jako

$$\iint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0, \tag{2.4}$$

co oznacza, że strumień pola magnetycznego przez powierzchnię zamkniętą ∂V jest zawsze równy zero. Stosując ponownie twierdzenie Gaussa otrzymujemy różniczkową postać prawa Gaussa dla magnetyzmu (drugie równanie Maxwella)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{2.5}$$

2.1.3 Prawo indukcji elektromagnetycznej Faradaya

Pole elektryczne indukowane zmiennym polem magnetycznym jest opisane formułą całkową

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \tag{2.6}$$

która oznacza że całka po dowolnej krzywej zamkniętej z natężenia pola elektrycznego jest równa minus szybkości zmian strumienia pola magnetycznego przez dowolną powierzchnię rozpiętą na tej krzywej. Po zastosowaniu twierdzenia Stokesa otrzymujemy różniczkową postać tego prawa (trzecie równanie Maxwella)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{2.7}$$

[2] *Monopolu magnetycznego* nie można wykluczyć na drodze teoretycznej, a nawet jego istnienie ma ciekawe konsekwencje jak np. kwantowanie ładunku (*monopol Diraca*)

2.1.4 Uogólnione prawo Ampera

Pole magnetyczne wywołane prądem elektrycznym o gęstości $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ i zmiennym polem elektrycznym jest opisane formułą całkową

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{s} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}, \tag{2.8}$$

która oznacza, że całka po dowolnej krzywej zamkniętej z indukcji pola magnetycznego jest równa sumie (z odpowiednimi stałymi proporcjonalności) prądu płynącego przez dowolną powierzchnię rozpiętą na tej krzywej i szybkości zmian strumienia pola elektrycznego przez tę sama powierzchnię. Nową stałą proporcjonalności $\mu_0 = 12,56..\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{A^2\cdot s^2}}$ nazywamy *przenikalnością magnetyczną próżni*. Zastosowanie twierdzenia Stokesa pozwala otrzymać różniczkową postać tego prawa (czwarte równanie Maxwella)

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{j} + \mu_0\epsilon_0\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{2.9}$$

"Uogólnione", w nazwie tego prawa oznacza niezwykle istotną modyfikację prawa Ampera dokonaną przez Maxwella a polegającą na dodaniu członu zawierającego zmianę pola elektrycznego. Zauważmy, że człon ten jest konieczny aby gęstość prądu spełniała równanie ciągłości dla gęstości ładunku elektrycznego

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0, \tag{2.10}$$

które z kolei implikuje *zasadę zachowania ładunku*. Równanie (2.10) otrzymujemy działając operatorem dywergencji na obie strony równania (2.9) i wykorzystując (2.3) oraz drugą tożsamość z (7).

2.2 Potencjał skalarny i wektorowy

Równania Maxwella

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho, && (2.11)\\
\nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, && (2.12)\\
\nabla\cdot\mathbf{B} &= 0, && (2.13)\\
\nabla\times\mathbf{B} &= \mu_0\,\mathbf{j} + \mu_0\epsilon_0\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} && (2.14)
\end{aligned}$$

można traktować jako układ liniowych, niejednorodnych, sprzężonych równań różniczkowych pierwszego rzędu o pochodnych cząstkowych. Niewiadomymi są tu dwa pola wektorowe $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$, natomiast rozkład ładunku ρ i gęstość prądu $\mathbf{j}$ spełniające równanie ciągłości (2.10) traktujemy jako zadane pola. Ze względu na liniowość układu równań spodziewamy się znalezienia jego rozwiązań jako funkcji zadanych pól i warunków początkowych. Dla prostych zagadnień można ten układ równań rozwiązywać bezpośrednio. W ogólnej sytuacji pierwszym krokiem jest

wprowadzenie nowych zmiennych, które prowadzą do separacji równań. Będą to *potencjały elektromagnetyczne*, które mają ogromne znaczenie dla formalizmu elektrodynamiki, pozwalają też wprowadzić oddziaływania elektromagnetyczne w teorii kwantowej a także stanowią wzór dla konstrukcji ogólnych *teorii pól z cechowaniem* będących fundamentem *modelu standardowego* cząstek elementarnych.

Lemat Poincare'go zastosowany do równania (2.13) pociąga za sobą istnienie pola $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ zwanego *potencjałem wektorowym*, który pozwala wyznaczyć pole indukcji magnetycznej jako jego rotację,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{2.15}$$

Wstawiając tak zdefiniowany potencjał wektorowy do równania (2.12) otrzymujemy

$$\nabla \times \Big(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\Big) = 0, \tag{2.16}$$

co, wykorzystując jeszcze raz lemat Poincare'go, prowadzi do istnienia *potencjału skalarnego* Φ, którego minus gradient jest równy polu w nawiasie w równaniu (2.16). Stąd możemy wyznaczyć pole elektryczne

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\Phi. \tag{2.17}$$

Jak wspominaliśmy przy okazji lematu Poincare'go potencjały elektromagnetyczne nie są wyznaczone jednoznacznie. Łatwo sprawdzić wykorzystując tożsamości (1.18), że jednoczesna *transformacja cechowania*

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad \Phi \Rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{2.18}$$

nie zmienia pól $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ przy dowolnej funkcji $\chi(\mathbf{r},t)$.[3]

Niejednoznaczność potencjałów pozwala nałożyć na nie dodatkowe *warunki cechowania*, które upraszczają rachunki w konkretnych sytuacjach. Przykładem jest tu warunek *cechowania Lorentza*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \tag{2.19}$$

gdzie wprowadzamy stałą $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\epsilon_0}} = 299\,792\,458\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ równą prędkości światła.

Wykorzystamy teraz drugą parę równań Maxwella zawierajacą źródła pola ρ i $\mathbf{j}$. Wstawiając wyrażenie na $\mathbf{E}$ z równania (2.17) do równania Maxwella (2.11) otrzymujemy

$$-\nabla^2\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\nabla \cdot \mathbf{A}\Big) = \frac{1}{\epsilon_0}\,\rho. \tag{2.20}$$

Podobnie, wstawiając (2.15) do równania Maxwella (2.14) i wykorzystując ostatnią tożsamość w (7) otrzymujemy

$$-\nabla^2\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla\Big(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big) = \mu_0\,\mathbf{j}. \tag{2.21}$$

[3]Niejednoznaczność potencjałów przy jednoczesnej konieczności ich użycia w teorii kwantowej wywołała długotrwałą dyskusję nad ich "fizycznością" (patrz pod hasłem *efekt Aharonova-Bohma*).

Równania powyższe można uprościć przyjmując cechowanie Lorentza (2.19) i podstawiając je do równań (2.20) i (2.21). Otrzymujemy wtedy cztery niezależne równania falowe ze źródłami (dla Φ, A_x, A_y, A_z), które możemy zapisać w postaci

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \nabla^2\Phi = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{2.22}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j}. \tag{2.23}$$

2.2.1 Metoda funkcji Greena

Równania falowe wyprowadzone powyżej mają taką samą strukture matematyczną dla wszystkich składowych Φ, A_x, A_y, A_z, którą możemy zapisać ogólnie w postaci równania dla pewnego pola $\Psi(\mathbf{r},t)$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \nabla^2\Psi = f(\mathbf{r},t), \tag{2.24}$$

gdzie $f(\mathbf{r},t)$ jest zadanym źródłem pola. Jest to liniowe niejednorodne równanie drugiego stopnia o pochodnych cząstkowych i podobnie jak dla równania Newtona dla oscylatora z siłą wymuszającą ogólne rozwiązanie daje się przedstawić w postaci sumy

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \Psi_0(\mathbf{r},t) + \Psi_s(\mathbf{r},t), \tag{2.25}$$

gdzie $\Psi_0(\mathbf{r},t)$ jest *ogólnym rozwiązaniem równania jednorodnego* tzn.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial t^2} - \nabla^2\Psi_0 = 0, \tag{2.26}$$

a $\Psi_s(\mathbf{r},t)$ jest *szczególnym rozwiązaniem równania niejednorodnego*. Ta struktura rozwiązań pozwala wybrać wygodną postać rozwiązania szczególnego a zadane warunki początkowe lub brzegowe uwzględnić przez odpowiedni wybór $\Psi_0(\mathbf{r},t)$.

Ważnym przykładem rozwiązania równania (2.26) jest *monochromatyczna fala płaska*

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r},t) = \Psi_0 \exp\Big\{i[\omega(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}]\Big\}. \tag{2.27}$$

Podobnie jak w przypadku oscylatora używamy tu funkcji zespolonych, a w szczególności zespolonych amplitud Ψ_0. Ponieważ także funkcja sprzężona do $\Psi_{\mathbf{k}}$ jest rozwiązaniem równania falowego to część rzeczywista lub urojona wyrażenia (2.27) opisuje fizyczne rozwiązanie.

Po podstawieniu (2.27) do (2.26) otrzymujemy liniowy związek dyspersyjny pomiędzy częstością kołową fali $\omega(\mathbf{k})$ i jej wektorem falowym $\mathbf{k}$ charakterystyczny dla fal elektromagnetycznych rozchodzących się w próżni

$$\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|. \tag{2.28}$$

Dowolne rozwiązanie równania falowego daje się przedstawić jako "ciągła superpozycja" fal płaskich postaci

$$\Psi_o(\mathbf{r},t) = \iiint \Psi_0(\mathbf{k}) \exp\Big\{i[c|\mathbf{k}|t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}]\Big\}\, d^3\mathbf{k}, \tag{2.29}$$

a odpowiedni wybór amplitudy $\Psi_0(\mathbf{k})$ zapewni rzeczywisty charakter rozwiązania i spełnianie warunków początkowych i brzegowych.

Przejdziemy teraz do konstrukcji szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego (2.24).

Źródła stacjonarne

Zaczniemy od przypadku gdy źródło jest niezależne od czasu czyli $f(\mathbf{r}, t) \equiv f(\mathbf{r})$. Wtedy również szczególne rozwiązanie może być wybrane jako niezależne od czasu $\Psi_s(\mathbf{r}, t) \equiv \Psi(\mathbf{r})$ i spełnia ono równanie zwane *równaniem Poissona* (pamiętamy oznaczenie $\Delta \equiv \nabla^2$)

$$-\Delta\Psi = f(\mathbf{r}). \tag{2.30}$$

Metoda funkcji Greena polega na znalezieniu najpierw szczególnego rozwiązania $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, czyli *funkcji Greena dla równania Poissona* dla źródła punktowego skupionego w $\mathbf{r}'$. Równanie to zapisujemy w postaci

$$-\Delta_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{2.31}$$

Gdzie indeks $\mathbf{r}$ przy operatorze Laplace'a przypomina, że działa on na zmienną $\mathbf{r}$.

Wyrażenie $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ nazywamy trójwymiarową *deltą Diraca*, którą można sobie wyobrazić jako zależną of $\mathbf{r}$ gęstość jednostkowego ładunku punktowego skupionego w $\mathbf{r}'$. Oczywiście taka gęstość jest równa zero dla $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ i osobliwa w punkcie $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, nie może więc być opisywana zwykłą funkcją, ale obiekt taki ma określony sens matematyczny w ramach *teorii dystrybucji*. Dla naszych potrzeb wystarczy wiedzieć, że delta Diraca ma sens pod całką. Mianowicie, dla dowolnej ciągłej funkcji $f(\mathrm{r})$ zachodzi

$$\iiint f(\mathbf{r})\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, d^3\mathbf{r} = f(\mathbf{r}'). \tag{2.32}$$

Dystrybucje można również różniczkować i tak np. $\nabla_{\mathbf{r}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ma następujący sens po umieszczeniu pod całką (stosujemy regułę całkowania przez części)

$$\iiint f(\mathbf{r})\, \nabla_{\mathbf{r}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, d^3\mathbf{r} = -\iiint \nabla f(\mathbf{r})\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, d^3\mathbf{r} = -\nabla f(\mathbf{r}'). \tag{2.33}$$

Znając funkcję Greena możemy znaleźć szczególne rozwiązanie dla dowolnego stacjonarnego źródła $f(\mathbf{r})$ określone przez następujacą całkę

$$\Psi_f(\mathbf{r}) = \iiint G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}')\, d^3\mathbf{r}' \tag{2.34}$$

co można sprawdzić działając operatorem Laplace'a na obie strony równania (2.34) i wykorzystując (2.31) i (2.32).

Znalezienie funkcji Greena, także w sytuacji gdy operator Laplace'a zastąpimy innym liniowym operatorem różniczkowym o pochodnych cząstkowych, wymaga zastosowania techniki transformaty Fouriera a dla obliczenia odpowiednich całek metody residuum dla funkcji zespolonych. Na szczęście dla naszego przypadku równania Poissona możemy wykorzystać fakt, że

równanie (2.31) można interpretować jako równanie dla potencjału skalarnego wytwarzanego przez ładunek ϵ_0 skupiony w punkcie $\mathbf{r}'$. Znamy rozwiązanie tego problemu i możemy zapisać funkcję Greena w formie potencjału Coulomba

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|}. \tag{2.35}$$

Wracając teraz do potencjałów skalarnego i wektorowego dla zagadnień elektrostatyki i magnetostatyki, tzn. dla stacjonarnego rozkładu ładunków $\rho(\mathbf{r})$ i stacjonarnej gęstości prądu $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ (spełniającej warunek ciągłości $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$) otrzymujemy ogólne rozwiązania postaci

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3\mathbf{r}' \tag{2.36}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3\mathbf{r}'. \tag{2.37}$$

Źródła zależne od czasu

Dla źródeł zależnych od czasu równanie na funcję Greena $G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')$ ma postać

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{\mathbf{r}}\right] G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t'), \tag{2.38}$$

gdzie $\delta(t - t')$ jest jednowymiarową funkcją delta Diraca. Podamy teraz postać funkcji Greena bez wyprowadzenia, ale za to przedyskutujemy jej własności. Używa się dwóch rozwiązań równania (2.38) postaci

$$G^{(\pm)}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \frac{1}{4\pi \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|} \delta\Big(\Big[t \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\Big] - t'\Big), \tag{2.39}$$

gdzie $G^{(+)}$ nazywamy *opóźnioną* a $G^{(-)}$ *przedwczesną funkcją Greena*. Nazwy te można uzasadnić rozważając szczególne rozwiązanie dla ogólnego źródła, które ma postać analogiczną do (2.34)

$$\Psi_f(\mathbf{r}) = \iiint d^3\mathbf{r}' \int dt' G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t'). \tag{2.40}$$

Podstawiając np. opóźnioną funkcję Greena i wykonując całkowanie po t' otrzymujemy

$$\Psi_f{}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \iiint \frac{1}{4\pi \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|} f\Big(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\Big)\, d^3\mathbf{r}', \tag{2.41}$$

co oznacza, że wartość pola w punkcie $\mathbf{r}$ i w chwili t zależy od zachowania źródła odległego o R od tego punktu w chwili $t - R/c$ czyli sygnał od źródła przychodzi z *opóźnieniem* $\delta t = R/c$ wynikającym ze skończonej prędkości światła. Fakt, że możemy używać również przedwczesnych funkcji Greena wynika z niezmienniczości praw elektrodynamiki względem transformacji odwrócenia czasu $t \mapsto -t$.

Wykorzystując (2.41) możemy zapisać ogólne rozwiązanie równań elektrodynamiki, przy

zadanych źródłach w postaci

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \Phi_0(\mathbf{r},t) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint \frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3\mathbf{r}' \tag{2.42}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r},t) + \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3\mathbf{r}', \tag{2.43}$$

gdzie $\Phi_0(\mathbf{r},t)$ i $\mathbf{A}_0(\mathbf{r},t)$ to rozwiązania jednorodnego równania falowego (2.26) opisujące *falę nadbiegajacą*.

2.3 Ruch cząstki naładowanej w polu elektromagnetycznym. Formalizm Lagrange'a i Hamiltona

W części wykładu poświęconej mechanice pojedynczej nierelatywistycznej cząstki opisywalismy ruch naładowanej cząstki równaniem Newtona z siłą Lorentza

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\Big(\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\Big). \tag{2.44}$$

Aby stworzyć równoważny opis w języku równań Lagrange'a i Hamiltona należy zamiast pól $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ użyć potencjałów Φ i $\mathbf{A}$. Formalizm ten jest szczególnie ważny dla późniejszego wprowadzenia oddziaływań elektromagnetycznych w mechanice kwantowej.

2.3.1 Równania Lagrange'a

Punktem wyjścia jest następująca postać funkcji Lagrange'a dla cząstki o ładunku q

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + q\,\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - q\,\Phi(\mathbf{r},t)\Big). \tag{2.45}$$

Równania Eulera-Lagrange'a można zapisać w postaci wektorowej

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{r}}} - \frac{\partial L}{\partial\mathbf{r}} = 0 \tag{2.46}$$

aby po podstawieniu (2.45) otrzymać

$$m\ddot{\mathbf{r}} + q\frac{d\mathbf{A}}{dt} - q\nabla\Big(\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}\Big) + q\nabla\Phi = 0. \tag{2.47}$$

Zastosujemy teraz tożsamość $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ dla przypadku $\mathbf{a}=\dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{b}=\nabla$ i $\mathbf{c}=\mathbf{A}$ otrzymując

$$\nabla\Big(\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}\Big) = \dot{\mathbf{r}}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \Big(\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla\Big)\mathbf{A}. \tag{2.48}$$

Wykorzystamy także wzór na pełną pochodną po czasie

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla)\mathbf{A}. \tag{2.49}$$

Podstawiając w końcu (2.48) i (2.49) oraz związki między polami i potencjałami (2.15), (2.17) do równania (2.47) otrzymujemy równanie (2.44). Oznacza to, że funkcja Lagrange'a (2.45) została wybrana poprawnie.

2.3.2 Pęd kinetyczny i funkcja Hamiltona

Trzy składowe pędu uogólnionego związanego z funkcją Lagrange'a (2.45) tworzą wektor $\mathbf{P}$ zwany *pędem kanonicznym* w odróżnieniu od *pędu kinetycznego* $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$. Wykorzystując definicję pędów uogólnionych otrzymujemy

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}. \tag{2.50}$$

Funkcja Hamiltona może być zapisana w postaci wektorowej w następujący sposób

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t). \tag{2.51}$$

gdzie

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t). \tag{2.52}$$

Po podstawieniu do (2.51) funkcji Lagrange'a (2.45) oraz $\mathbf{v} = \frac{1}{m}(\mathbf{P} - q\mathbf{A})$ otrzymujemy postać funkcji Hamiltona dla nierelatywistycznej naładowanej cząstki oddziałującej z zewnętrznym polem elektromagnetycznym

$$H = \frac{1}{2m}\Big(\mathbf{P} - q\mathbf{A}\Big)^2 + q\Phi. \tag{2.53}$$

Można więc sformułować przepis na wprowadzanie oddziaływania z polem elektromagnetycznym. We wzorze na energię cząstki swobodnej (w tym przypadku $E = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2$) wyrażamy pęd kinetyczny przez kanoniczny zgodnie z (2.50) i dodajemy energię potencjalną $q\Phi$. Stosując tę regułę do cząstki relatywistycznej o energii $E = \sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4}$ otrzymamy hamiltonian naładowanej cząstki relatywistycznej w zewnętrznym polu elektromagnetycznym

$$H = \sqrt{c^2\Big(\mathbf{P} - q\mathbf{A}\Big)^2 + m^2c^4} + q\Phi. \tag{2.54}$$

Wyrażenia (2.53) i (2.54) będą punktem wyjścia dla konstrukcji kwantowych równań opisujących takie układy fizyczne.

2.4 Relatywistyczna postać równań elektrodynamiki

Równania elektrodynamiki, czy to w postaci równań Maxwella czy równań opisujących potencjały, powinny obowiązywać w dowolnym inercjalnym kartezjańskim układzie odniesienia. Zostało to potwierdzone w licznych eksperymentach zaczynając od słynnego doświadczenia Michelsona-Morleya. Jak łatwo sprawdzić równania Maxwella nie są niezmiennicze względem transformacji Galileusza co doprowadziło do stworzenia przez Einsteina nowej koncepcji czasoprzestrzeni (przestrzeni Minkowskiego), w której czas nie jest absolutny ale podlega transforma-

cji wraz ze współrzędnymi a przejście z jednego układu inercjalnego do drugiego jest opisywane transformacjami Lorentza. Przypominamy, że zdarzenie jest opisane przez cztery współrzędne w przestrzeni Minkowskiego: czas – $x^0 \equiv ct$, trzy kartezjańskie współrzędne przestrzenne – $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$. Położenie w czasoprzestrzeni będziemy oznaczać przez x^μ lub po prostu x. Interwał czasoprzestrzenny dla dwóch bliskich zdarzeń $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu\, dx^\nu$ (stosujemy konwencję sumacyjną Einsteina) jest niezmiennikiem (skalarem) dla transformacji Lorentza a także dla translacji w przestrzeni i w czasie. Tensor metryczny $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \equiv \mathrm{diag}[1, -1, -1, -1]$ w każdym inercjalnym układzie odniesienia. Wielkość o czterech składowych A^μ transformująca się jak dx^μ nazywana jest 4-wektorem kontrawariantnym a wielkość B_μ transformująca się jak operator 4-gradientu $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ nazywamy 4-wektorem kowariantnym. Można zawsze przejść od jednej do drugiej formy 4-wektora używając tensora metrycznego, np. $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$. Pamiętamy również, że zmiana ta polega jedynie na zmianie znaku części przestrzennej 4-wektora. Iloczyn skalarny dla pary 4-wektorów A^μ, B_μ definiujemy jako sumę $A^\mu B_\mu$.

2.4.1 Relatywistyczne równania dla potencjałów

Teoria jest niezmiennicza względem przejścia z jednego inercjalnego układu odniesienia do drugiego gdy jej równania można zapisać w postaci kowariantnej tzn. używając wielkości o określonej regule transformacji jak relatywistyczne skalary, wektory czy tensory. Zaczniemy od równania ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \tag{2.55}$$

które możemy zapisać w postaci kowariantnej

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \tag{2.56}$$

gdzie $j^0 \equiv \rho c$ wraz ze składowymi trójwymiarowego wektora gęstości prądu $\mathbf{j}$ tworzą kontrawariantny 4-wektor prądu j^μ. Układ równań dla potencjału skalarnego i wektorowego

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{2.57}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}, \tag{2.58}$$

także można zapisać w zwartej postaci jako

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \mu_0\, j^\mu, \tag{2.59}$$

gdzie $A^0 \equiv \frac{1}{c}\Phi$ i $\mathbf{A}$ tworzą 4-wektor kontrawariantny A^μ. Należy pamiętać, że równania falowe dla potencjałów są spełnione przy założeniu cechowania Lorentza (2.19), które też można zapisać w postaci kowariantnej

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{2.60}$$

2.4.2 Tensor pola i równania Maxwella

Natężenie pola elektrycznego $\mathbf{E} \equiv (E^1, E^2, E^3)$ i indukcja magnetyczna $\mathbf{B} \equiv (B^1, B^2, B^3)$, które są polami wektorowymi w geometrii trójwymiarowej stają się (z dokładnością do stałej $\frac{1}{c}$) składowymi antysymetrycznego relatywistycznego tensora pola elektromagnetycznego $F_{\mu\nu}$ zdefiniowanego jako

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{2.61}$$

Tensor taki posiada sześć niezależnych składowych. I tak zgodnie z (2.17) i pamiętając, że $A_\mu = (A_0, -\mathbf{A})$ otrzymujemy $(k, l, m = 1, 2, 3)$

$$F_{0k} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{1}{c}\Big(-\frac{\partial A^k}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}\Big) = \frac{1}{c}E^k. \tag{2.62}$$

$$F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k = -\partial_k A^l + \partial_l A^k = -B^m, \tag{2.63}$$

gdzie klm to cykliczne permutacje ciągu 123.

Podstawiając definicję (2.61) łatwo sprawdzić, że spełniona jest następująca tożsamość

$$\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} = 0. \tag{2.64}$$

Podstawiając składowe pól zgodnie z (2.63) do (2.64), oprócz trywialnych tożsamości, otrzymujemy dla $\sigma = 1, \mu = 2, \nu = 3$ równanie Maxwella (2.13) a dla $\sigma = 0, \mu = k, \nu = l$ równanie (2.12). Postępując podobnie można łatwo pokazać, że układ równań

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 j^\mu \tag{2.65}$$

jest równoważny pozostałej parze równań Maxwella zawierającej źródła (2.11),(2.14).

2.4.3 Fala płaska i efekt Dopplera

Składowe potencjału A^μ lub tensora pola $F^{\mu\nu}$ dla pola elektromagnetycznego z dala od źródeł spełniają równanie falowe postaci

$$\partial_\nu \partial^\nu \Psi(x) = 0. \tag{2.66}$$

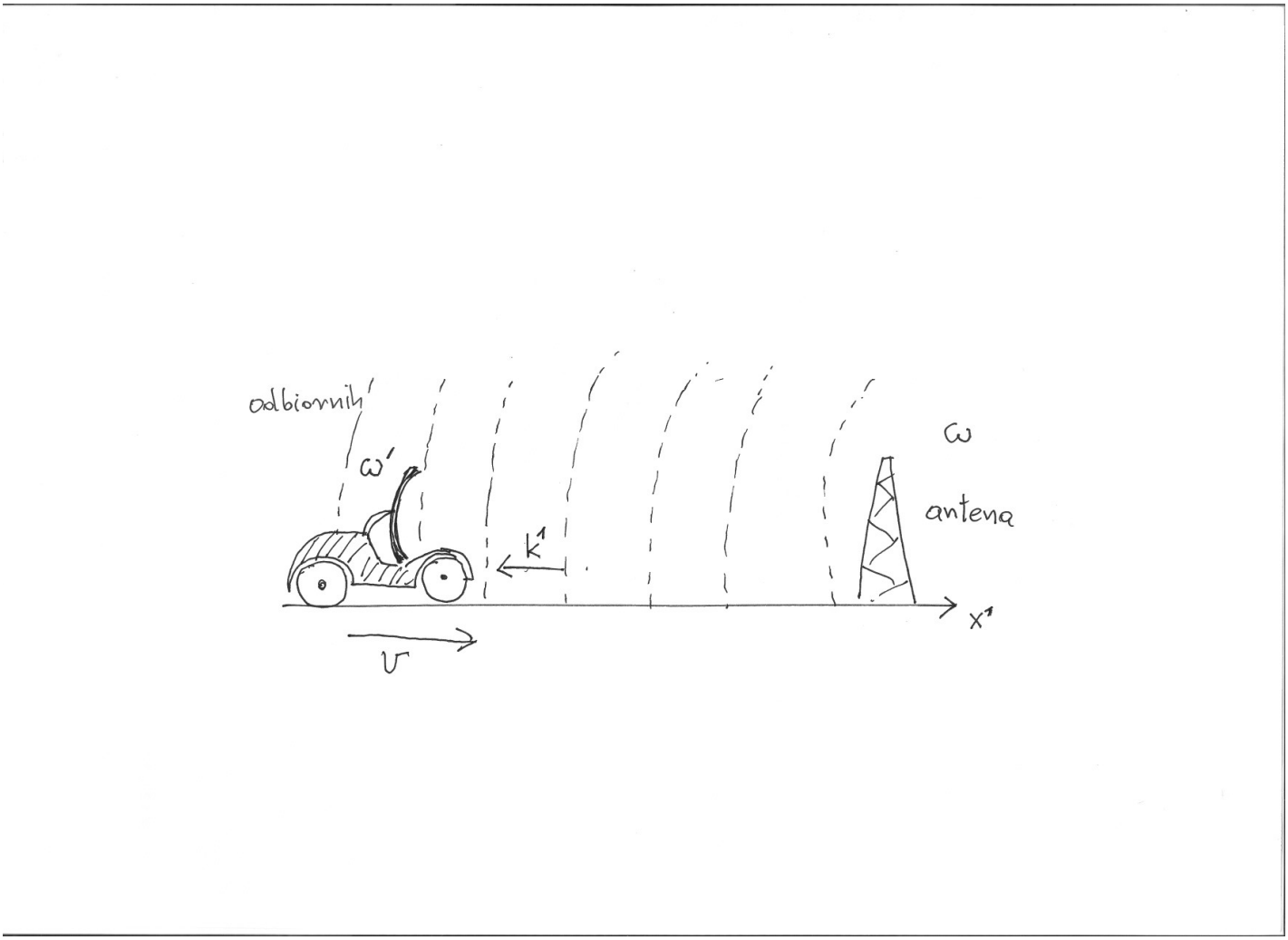
Jego (zespolone) rozwiązanie opisujące falę płaską można zapisać w postaci kowariantnej

$$\Psi_k(x) = \Psi_0\, e^{ik_\mu x^\mu} \tag{2.67}$$

gdzie po podstawieniu do (2.66) otrzymujemy związek

$$k_\mu k^\mu = 0. \tag{2.68}$$

Kontrawariantny 4-wektor zbudowany z częstości kołowej i wektora falowego $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$ nazywamy *4-wektorem falowym* a tożsamość (2.68) jest równoważna relacji (2.27).



Rysunek 2.1: Efekt Dopplera. Odbiornik rejestruje wyższą częstość od częstości nadajnika.

Możemy teraz wykorzystać transformacje Lorentza jakim podlega 4-wektor falowy do opisu *efektu Dopplera*. Wyobraźmy sobie obserwatora poruszającego się z prędkością v w kierunku odległego, spoczywającego źródła promieniowania elektromagnetycznego o częstości kołowej ω (Rys.2.1).

Przyjmując, że ruch obserwatora odbywa się w kierunku osi 1 układu, w którym źródło spoczywa, wektor falowy promieniowania ma w tym układzie postać $\mathbf{k} = (-\frac{\omega}{c}, 0, 0)$. Pamiętając, że składowe 4-wektora falowego w układzie poruszającym się dają się przedstawić używając transformacji Lorentza

$$\begin{aligned} k^{0'} &= \frac{k^0 - \left(\frac{v}{c}\right)k^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ k^{1'} &= \frac{k^1 - \left(\frac{v}{c}\right)k^0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \\ k^{2'} &= k^2, \\ k^{3'} &= k^3, \end{aligned} \tag{2.69}$$

oraz podstawiając $k^1 = -\frac{\omega}{c}$, $k^2 = k^3 = 0$ otrzymujemy częstość kołową fali $\omega' = ck^{1'}$ jaką zmierzy poruszający się obserwator

$$\omega' = \frac{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)\right]\omega}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.70}$$

Częstość ta jest wyższa od ω i jak łatwo zauważyć staje się niższa gdy źródło oddala się się od obserwatora. Wtedy $k^1 = \frac{\omega}{c}$, a stąd

$$\omega' = \frac{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)\right]\omega}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.71}$$

Dla prędkości $v << c$ można używać przybliżonego wzoru

$$\omega' \simeq \left[1 \pm \left(\frac{v}{c}\right)\right]\omega. \tag{2.72}$$

Obserwowana przez obserwatora, poruszającego się względem źródła, zmiana częstości fali nazywana jest *efektem Dopplera*. Po raz pierwszy efekt ten był badany dla fal akustycznych, dla których stosujemy nierelatywistyczny wzór (2.72) zamieniając prędkość światła na prędkość dźwięku.

Efekt Dopplera dla fal elektromagnetycznych ma szerokie zastosowania. Można tu wymienić pomiary prędkości ciał wysyłających lub odbijających promieniowanie. I tak *radary dopplerowskie* stosowane są w meteorologii do śledzenia chmur i ruchu mas powietrza, pozwalają policji mierzyć prędkość pojazdów a armie używają ich do śledzenia samolotów i rakiet. Dopplerowskie przesunięcia linii widmowych pozwalają określić ruchy gwiazd i całych galaktyk. Dzięki efektowi Dopplera funkcjonuje tzw. *chłodzenie laserowe* gazów aktywnych optycznie, które z kolei jest niezbędne dla współczesnych badań nad *kondensatem Bosego-Einsteina*.

Najważniejszym zastosowaniem efektu Dopplera w dziedzinie fal akustycznych jest tzw. *dopplerowskie USG*. Obecnie jest to jedno z podstawowych badań w diagnostyce chorób układu krążenia. Fala ultradźwiękowa odbita od poruszających się krwinek ma zmienioną częstość zależnie od ich wektora prędkości. Pozwala to na ocenę przepływu krwi w dużych tętnicach i żyłach.

Rozdział 3

Zasady zachowania w elektrodynamice

Jak w każdej fundamentalnej teorii fizycznej również w elektrodynamice spodziewamy się, że równania ruchu implikują zasadę zachowania energii i pędu. Rozpoczniemy od zasady zachowania energii często nazywanej *twierdzeniem Poyntinga* a następnie sformułujemy zasadę zachowania pędu.

3.1 Zasada zachowania energii

Ponieważ pole elektromagnetyczne ma charakter ośrodka ciągłego to zasada zachowania powinna mieć postać następującego równania ciągłości dla gęstości energii pola $\mathcal{E}$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \tag{3.1}$$

gdzie $\mathbf{S}$ będzie wektorem gęstości strumienia energii opisującym przepływ energii pola. Po prawej stronie równania (3.2) pojawił się człon opisujący gęstość mocy, czyli pracę na jednostkę czasu i jednostkę objętości, jaką wykonuje pole działające na ładunki elektryczne opisane gęstościa prądu elektrycznego $\mathbf{j}$. Rzeczywiście, moc siły Lorentza działającej na ładunek q jest równa $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ (pole magnetyczne nie wykonuje pracy). Pamiętając, że prąd wywołany ruchem ładunku to $q\mathbf{v}$ oraz wprowadzając gęstość ładunku $q = \rho\, d^3\mathbf{r}$ i gęstość prądu $\mathbf{j} = \rho\, \mathbf{v}$ otrzymujemy ostatecznie gęstość mocy $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. Znak minus po prawej stronie równania (3.2) oznacza, że praca wykonana przez siłę Lorentza odbywa się kosztem energii pola. Postać gęstości energii może nam zasugerować analogia między równaniami pola a równaniami dla oscylatora harmonicznego z siłą wymuszającą. Jeśli źródła pola to odpowiednik siły zewnętrznej to pola $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ to odpowiednik położeń i pędów oscylatora gdyż łączą je podobne liniowe zależności między ich wartościami i wartościami pochodnych po czasie (patrz równania Maxwella). Można więc zaproponować analogiczną kwadratową postać gęstości energii uwzględniającą jednostki

$$\mathcal{E} \equiv \frac{1}{2}\Big(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2\Big) \tag{3.2}$$

Wykorzystamy teraz równania Maxwella (2.12) i (2.14) oraz tożsamość

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \tag{3.3}$$

dla obliczenia pochodnej po czasie gęstości energii

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{3.4}$$

Możemy teraz zdefiniować gęstość strumienia energii pola elektromagnetycznego zwaną *wektorem Poyntinga*

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{3.5}$$

i po podstawieniu do (3.4) otrzymujemy zasadę zachowania energii w postaci (3.2), którą można wyrazić następującymi słowami:

Suma zmiany energii pola elektromagnetycznego na jednostkę czasu w pewnej objętosci i energii wypływającej przez powierzchnię tej objętości w jednostce czasu jest równa minus pracy wykonanej na ładunkach elektrycznych znajdujących sie w tym obszarze w jednostce czasu.

3.2 Zasada zachowania pędu

Przepływ energii pola elektromagnetycznego opisywany wektorem Poyntinga $\mathbf{S}$ (patrz (3.5)) można sobie wyobrazić jako manifestację pędu pola o gęstości pędu proporcjonalnej do $\mathbf{S}$

$$\mathbf{g} \equiv \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \tag{3.6}$$

Możemy teraz zdefiniować całkowity pęd układu fizycznego składającego się z N naładowanych cząstek o ładunkach q_j i pola elektromagnetycznego

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{czastki} + \mathbf{P}_{pole} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{p}_j + \iiint \mathbf{g}\, d^3\mathbf{r} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{p}_j + \epsilon_0 \iiint (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\, d^3\mathbf{r}. \tag{3.7}$$

Zakładając, że jedyne siły działające na cząstki to siły Lorentza możemy napisać

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}_{czastki} = \sum_{j=1}^{N} q_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}) = \iiint (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})\, d^3\mathbf{r}, \tag{3.8}$$

gdzie w ostatniej równości przechodzimy do ciągłego opisu układu cząstek używając gęstości ładunku ρ i gęstości prądu $\mathbf{j} = \rho\, \mathbf{v}$.

Obliczmy teraz pochodną po czasie pędu pola wykorzystując równania Maxwella i tożsamość

$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A}^2) - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{P}_{pole} &= \epsilon_0 \iiint \Big(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big) \, d^3\mathbf{r} \\
&= \epsilon_0 \iiint \Big[-\frac{1}{\epsilon_0}\mathbf{j} \times \mathbf{B} + c^2(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \Big] \, d^3\mathbf{r} \\
&= -\iiint \Big[\rho\, \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nabla\Big(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2 \Big) \Big] \, d^3\mathbf{r}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Dodając stronami równania (3.8) i (3.9) i zakładając, że układ cząstek znajduje się w pewnej objętości V ograniczonej powierzchnią ∂V możemy napisać

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = \iiint_V \nabla\Big(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2 \Big) \, d^3\mathbf{r} = \iint_{\partial V} \mathcal{P} d\mathbf{s}, \qquad (3.10)$$

gdzie

$$\mathcal{P} = \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2 \qquad (3.11)$$

nazywamy *ciśnieniem pola*. Wykorzystaliśmy tu twierdzenie Gaussa w formie zastosowanej do wzoru na siłę wywieraną na powierzchnię ∂V przez ciśnienie $\mathcal{P}$ (patrz (1.10) i (1.11)). Równanie (3.10) mówi nam, że:

Pochodna całkowitego pędu układu cząstek i pola w pewnym obszarze jest równa sile wywieranej przez ciśnienie pola na powierzchnię tego obszaru. W szczególności, gdy rozważamy całą przestrzeń, to ponieważ pola $\mathbf{E}$ *i* $\mathbf{B}$ *znikają w nieskończoności to również ciśnienie znika na granicach takiego obszaru i całkowity pęd jest zachowywany.*

Rozdział 4

Wybrane zagadnienia elektrostatyki i magnetostatyki

Z punktu widzenia matematycznego znalezienie pól elektrycznych i magnetycznych przy zadanych niezależnych od czasu gęstości ładunku i gęstości prądu sprowadza się do obliczenia całek po prawej stronie równań (2.36), (2.37). Często jednak wykorzystujemy analityczne formuły o przybliżonym charakterze lub rozwiązania dla układów o specyficznej symetrii co pozwala w prosty sposób wykorzystać całkową postać równań Maxwella.

4.1 Elektrostatyka

Opiszemy kilka najprostrzych przykładów ważnych w zastosowaniach a na końcu tego paragrafu omówimy mechanizm powstawania różnicy potencjałów elektrostatycznych dla membran komórkowych.

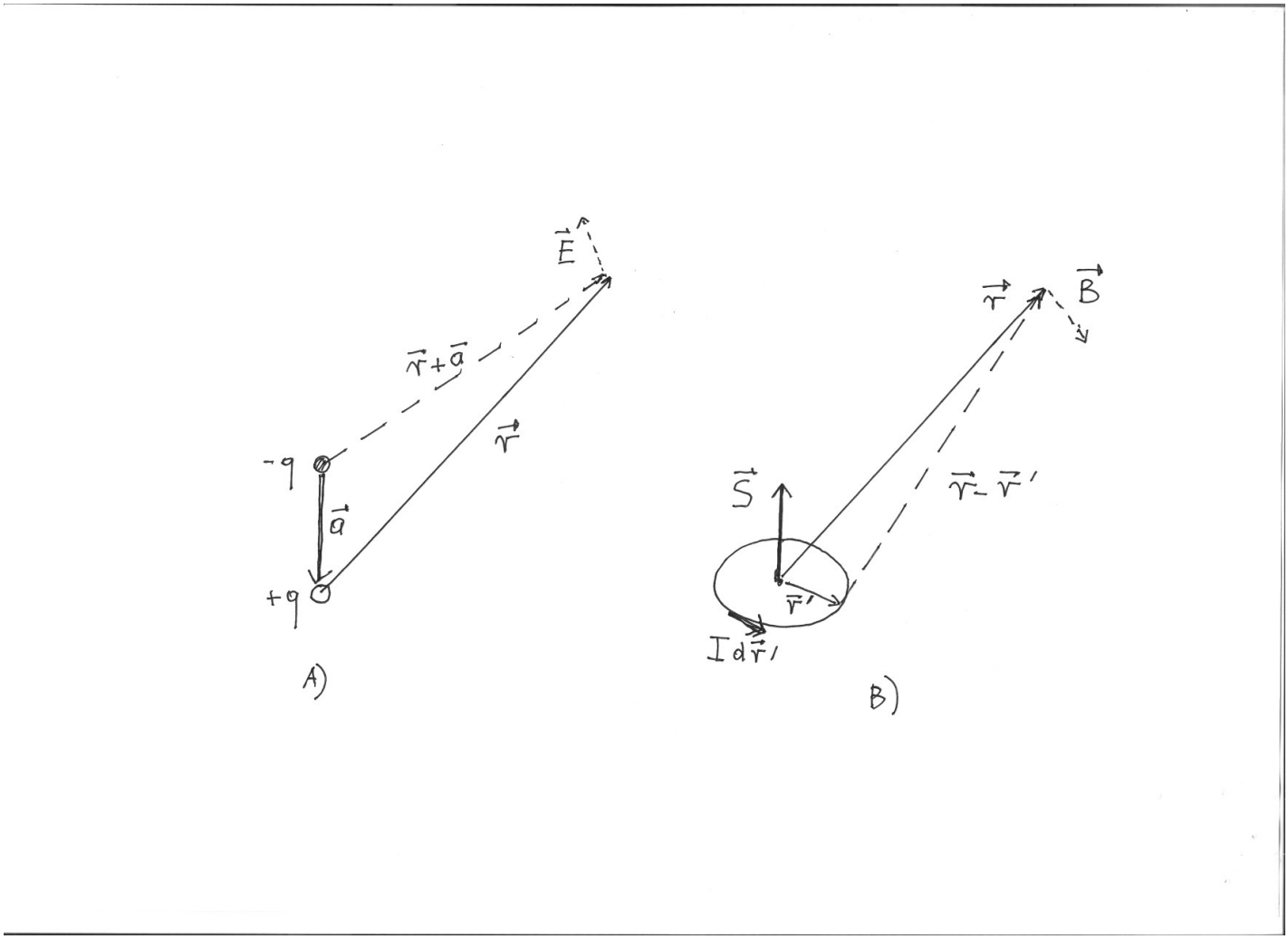
4.1.1 Pole ładunku punktowego

Najprostrzy przykład to pole wytwarzane przez ładunek punktowy q umieszczony w środku kartezjańskiego układu współrzędnych. Wykorzystując bezpośrednio prawo Gaussa w całkowej postaci otrzymujemy natężenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie $\mathbf{r} \neq 0$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad r \equiv |\mathbf{r}|. \tag{4.1}$$

Pole te nazywamy *polem kulombowskim*. Odpowiedni potencjał $\Phi(r)$ spełniający równanie $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ i przyjmujący wartość zero w nieskończoności jest zależny wyłącznie od odległości od ładunku i nazywany *potencjałem kulombowskim*

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}. \tag{4.2}$$



Rysunek 4.1: Dipol elektryczny (A) i magnetyczny (B).

4.1.2 Pole dipola elektrycznego

Następnym ważnym przykładem jest *dipol elektryczny* czyli para ładunków $-q$ i $q > 0$ połączonych wektorem $\mathbf{a}$ o długości a (Rys.4.1).

Przyjmując, że ładunek q znajduje się w środku układu współrzędnych można przedstawić potencjał elektrostatyczny takiego układu jako sumę potencjałów kulombowskich

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}+\mathbf{a}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}. \tag{4.3}$$

Zwykle interesuje nas potencjał w odległości od dipola znacznie większej niż a co pozwala zastosować następujące przybliżenie oparte na rozwinięciu Taylora funkcji $\frac{1}{|\mathbf{r}|}$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}+\mathbf{a}|} \simeq \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \mathbf{a}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^3}. \tag{4.4}$$

Po podstawieniu (4.4) do (4.3) otrzymujemy ostatecznie postać potencjału dipola elektrostatycznego

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{r^3}. \tag{4.5}$$

gdzie $\mathbf{d} = q\mathbf{a}$ nazywamy *elektrycznym momentem dipolowym*. Zauważmy, że potencjał dipola znika jak $\frac{1}{r^2}$ ale jest proporcjonalny do cosinusa kąta pomiędzy momentem dipolowym a wektorem $\mathbf{r}$. Mając potencjał możemy obliczyć natężenie pola elektrycznego wytwarzanego przez dipol

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\Big(\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\Big) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big\{\frac{3(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{d}}{r^3}\Big\}, \tag{4.6}$$

które maleje z odległością jak $\frac{1}{r^3}$.

Jeśli umieścimy dipol w polu elektrostatycznym $\Phi(\mathbf{r})$, to jego energia potencjalna wynosi

$$U(\mathbf{r}) = q\Big(\Phi(\mathbf{r}+\mathbf{a}) - \Phi(\mathbf{r})\Big) \simeq \mathbf{d}\cdot\nabla\Phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}). \tag{4.7}$$

Energia ta jest minimalna gdy kierunek dipola jest zgodny z kierunkem natężenia pola elektrycznego i maksymalna gdy jest on przeciwnie skierowany.

4.1.3 Multipole

Potencjał pola w punkcie $\mathbf{r}$ odległym od ograniczonego obszaru V wokół środka układu współrzędnych, w którym znajdują się ładunki elektryczne opisane gęstością $\rho(\mathbf{r}')$ można wyrazić za pomocą rozwinięcia Taylora używając w tym miejscu notacji $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$ zamiast $\mathbf{r} = (x, y, z)$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-|\mathbf{r}'|}\, d^3\mathbf{r}' = \sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(\mathbf{r}), \tag{4.8}$$

gdzie

$$\Phi_n(\mathbf{r}) = (-1)^n\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n=1}^{3} M^{j_1,j_2,\ldots,j_n}\frac{\partial^n}{\partial x^{j_1}\partial x^{j_2}\ldots\partial x^{j_n}}\Big(\frac{1}{r}\Big), \tag{4.9}$$

a symetryczne tensory $M^{j_1,j_2,\ldots,j_n}$ nazywane *momentami multipolowymi rzędu* n są określone wzorem

$$M^{j_1,j_2,\ldots,j_n} = \frac{1}{n!}\iiint_V \rho(\mathbf{r})\, x^{j_1}x^{j_2}\ldots x^{j_n}\, d^3\mathbf{r}. \tag{4.10}$$

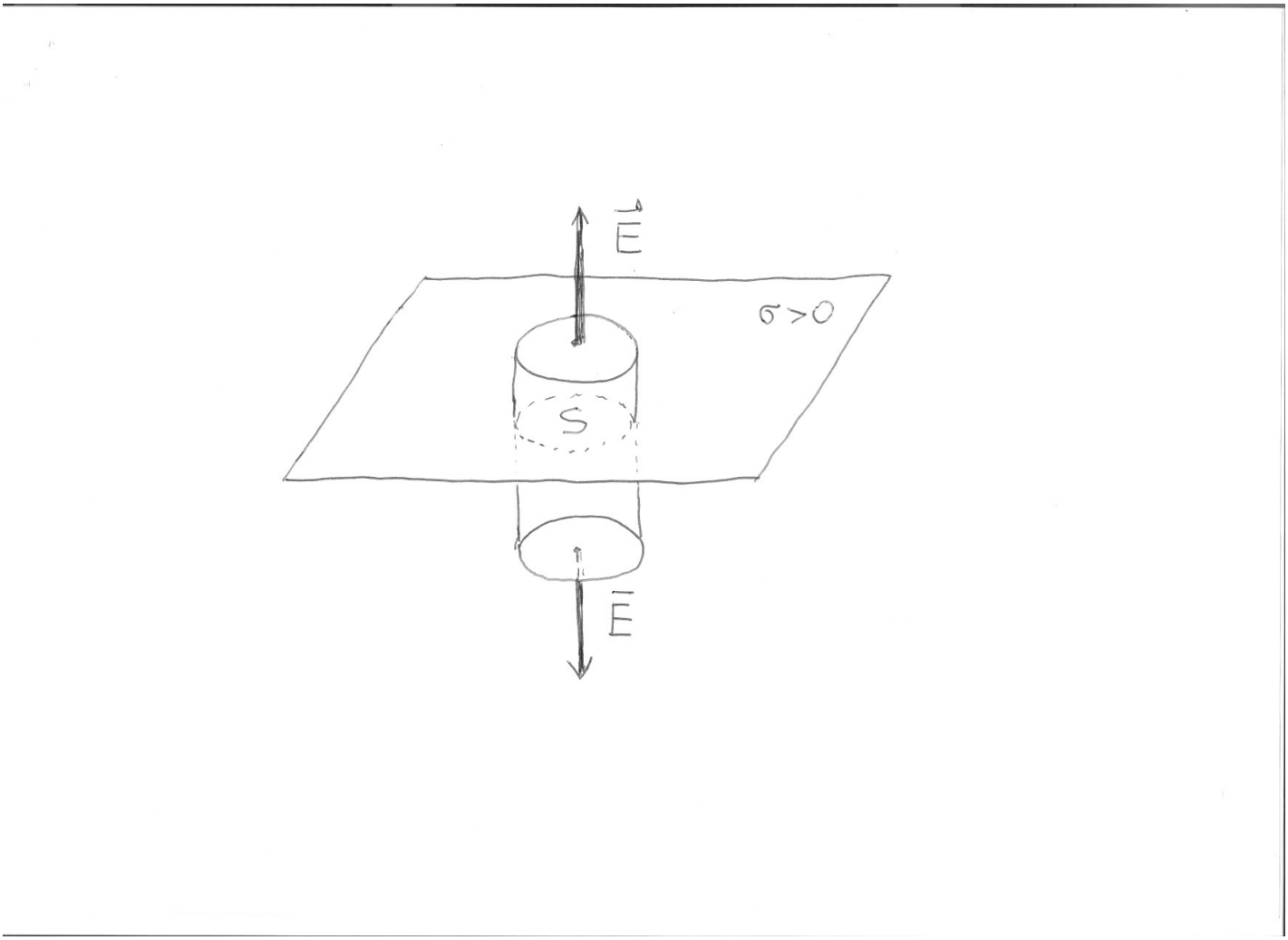
Ponieważ n-te pochodne funkcji $\frac{1}{r}$ zanikają jak $\frac{1}{r^{n+1}}$ rozwinięcie multipolowe pozwala wyodrębnić wiodący wkład do pola elektrostatycznego dla dużych odległości i określić najważniejsze poprawki wyższych rzędów. I tak moment multipolowy rzędu 0 to po prostu całkowity ładunek

$$M^0 = \iiint_V \rho(\mathbf{r})\, d^3\mathbf{r}. \tag{4.11}$$

Gdy ładunki elektryczne układu kompensują się to wiodący wkład do potencjału daje moment dipolowy, który jest wektorem o składowych

$$M^j = \iiint_V \rho(\mathbf{r})\, x^j\, d^3\mathbf{r}, \quad j = 1,2,3. \tag{4.12}$$

Często nałożone warunki symetrii (np. niezmienniczość względem transformacji $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$) implikują znikanie momentu dipolowego i wtedy wiodący wyraz zawiera moment kwadrupolowy, itd.



Rysunek 4.2: Naładowana płaszczyzna.

4.1.4 Warstwa podwójna

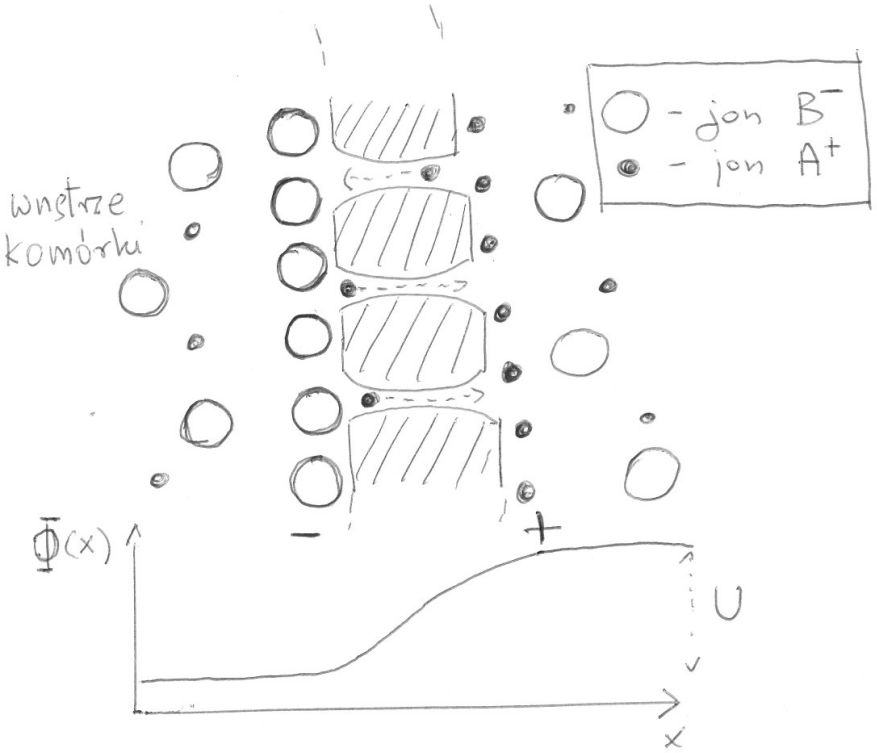
Wyobraźmy sobie cienką warstwę materiału naładowanego elektrycznie w taki sposób, że gęstość powierzchniowa jest stała i równa σ. Dla modelu nieskończonej płaszczyzny możemy bezpośrednio obliczyć natężenie pola elektrostatycznego wykorzystując prawo Gaussa w postaci całkowej.

Symetria problemu wymaga aby wytworzone pole elektrostatyczne o bezwzględnej wartości E było prostopadłe do płaszczyzny i dla $\sigma > 0$ skierowane na zewnątrz. Stosując prawo Gaussa do cylindra o przekroju S umieszczonego jak na Rys.4.2 widzimy, że strumień pola elektrycznego jest równy $2ES$ a ładunek zawarty w cylindrze $Q = S\sigma$. Stąd wartość pola nie zależy od odległości od powierzchni i wynosi

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \tag{4.13}$$

Dla dwóch równoległych warstw oddalonych od siebie na odległość a i naładowanych z gęstością $\sigma > 0$ i $-\sigma$ natężenie pola elektrycznego na zewnątrz kompensuje się a wewnątrz podwaja. Oznacza to, że wewnątrz warstwy podwójnej występuje pole elektrostatyczne o natężeniu

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \tag{4.14}$$



Rysunek 4.3: Model membrany komórkowej i przebieg potencjału elektrostatycznego.

a skok potencjału wynosi $V = \sigma\, a/\epsilon_0$. Model warstwy podwójnej dobrze opisuje pole wewnątrz kondensatora płaskiego (w przypadku gdy między okładkami kondensatora znajduje się dielektryk ϵ_0 należy zastąpić przez przenikalność dielektryczną tego materiału ϵ, patrz paragraf o polach w ośrodkach) a także omawiany poniżej model membrany komórkowej.

4.1.5 Potencjał membrany komórkowej

Różnica potencjałów między wnętrzem komórki i zewnętrzną powierzchnią błony komórkowej, tzw. *potencjał spoczynkowy*, ma ogromne znaczenie dla funkcjonowania organizmów gdyż sprawia, że komórka jest wrażliwa na działające na nią bodźce. Potencjał ten (dla komórek nerwowych rzędu -65 do -90 mV) jest skutkiem istnienia warstwy podwójnej, opisanej powyżej a złożonej z jonów ujemnych od wewnętrznej strony i jonów dodatnich od zewnętrznej strony błony komórkowej. Przedstawimy teraz prosty model wyjaśniający mechanizm powstawania takiej warstwy (Rys.4.3).

Załóżmy, że błona komórkowa jest selektywną membraną, która pozwala na transport dodatnich jonów A^+ o ładunku q_A (zwykle jony potasu) a zatrzymuje ujemne jony oznaczane zbiorczo przez B^-. Załóżmy, że początkowe stężenie jonów A^+ wewnątrz komórki jest wyższe

niż na zewnątrz. Wtedy dyfuzja (transport) jonów A^+ przez membranę będzie wyrównywać stężenia co powoduje powstanie nadmiaru ładunku ujemnego wewnątrz komórki. Ten nadmiar w postaci jonów B^- wskutek elektrostatycznego odpychania skoncentruje się na wewnętrznej stronie błony komórkowe a przyciąganie spowoduje powstanie odpowiedniej warstwy kompensującej jonów A^+ po stronie zewnętrznej. Tak wytworzona warstwa podwójna generuje skok potencjału, który będzie hamował dalszy przepływ jonów A^+, aż zostanie osiągnięty pewien stan stacjonarny.

Wyprowadzimymy teraz zależność między powstałą różnicą potencjałów a stężeniami jonów A^+ wewnątrz i na zewnątrz komórki. Zaczniemy od przypomnienia prawa Ficka (1.23), które zastosowane do naszego modelu mówi, że prąd jonów A^+ jest proporcjonalny do gradientu ich stężenia. Odpowiednie równanie zapisujemy w postaci

$$J_A^{dyf} = -D_A \frac{dc_A}{dx}, \tag{4.15}$$

gdzie c_A to stężenie jonów A^+, D_A - ich współczynnik dyfuzji, a J_A^{dyf} - gęstość prądu wywołanego dyfuzją. Z drugiej strony na poruszający się w roztworze jon działa siła lepkości proporcjonalna do prędkości jonu. Tak więc lokalne pole elektrostatyczne $E(x)$ wywołuje przepływ jonów z prędkością proporcjonalną do tego pola co można zapisać odpowiednim równaniem na prąd

$$J_A^{el} = u_a \, q_A \, c_A \, E = -u_a \, q_A \, c_A \, \frac{d\Phi}{dx}, \tag{4.16}$$

gdzie u_A jest *współczynnikiem ruchliwości* jonów A^+, który jest odwrotnie proporcjonalny do współczynnika lepkości roztworu a $\Phi(x)$ oznacza potencjał elektrostatyczny. W stanie stacjonarnym oba efekty się kompensują, czyli $J_A^{dyf} + J_A^{el} = 0$ co daje równanie

$$D_A \frac{dc_A}{dx} == -u_A \, q_A \, c_A \, \frac{d\Phi}{dx}. \tag{4.17}$$

Równanie to można zapisać jako

$$k_B T \frac{d \ln c_A}{dx} == -q_A \, \frac{d\Phi}{dx} \tag{4.18}$$

gdzie wykorzystaliśmy ogólną relację Einsteina $D = u \, k_B \, T$ łączącą stałą dyfuzji D z ruchliwością u i temperaturą cieczy T (k_B - stała Boltzmanna) [1]. Rozwiązanie równania (4.18)

$$\Phi(x_1) - \Phi(x_0) = -\frac{k_B T}{q_A} \ln \frac{c_A(x_1)}{c_A(x_0)}. \tag{4.19}$$

stosujemy dla x_0 wybranego wewnątrz a x_1 na zewnątrz komórki. Wtedy potencjał spoczynkowy $U = \Phi(x_0) - \Phi(x_1)$ spełnia *równanie Nernsta*

$$U = \frac{k_B T}{q_A} \ln \frac{c_A^z}{c_A^w}, \tag{4.20}$$

[1] Relacja Eisteina będzie dokładniej omawiana na wykładzie z termodynamiki i fizyki statystycznej.

gdzie c_A^w to stężenie jonów A^+ wewnątrz komórki a c_A^z na zewnątrz.

4.2 Magnetostatyka

Omówimy kilka najprostrzych przykładów zastosowań magnetostatyki opartych na wyprowadzonych poprzednio równaniach i przy założeniu stacjonarności prądów

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3\mathbf{r}', \quad \nabla\cdot\mathbf{A} = 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}. \tag{4.21}$$

Zauważmy, że dla ustalonego $\mathbf{r}'$ otrzymujemy tożsamość

$$\nabla\times\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \nabla\Big(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big)\times\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \tag{4.22}$$

którą można wykorzystać do obliczenia indukcji magnetycznej w oparciu o równania (4.21)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, d^3\mathbf{r}'. \tag{4.23}$$

Otrzymana równość nosi nazwę *prawa Biota-Savarta.*

4.2.1 Dipol magnetyczny

Ponieważ w odrożnieniu od ładunków elektrycznych nie istnieją monopole magnetyczne najprostrzym układem wytwarzającym pole magnetyczne jest płaska pętla przewodnika przez który płynie prąd I. Jest ona brzegiem płaskiego obszaru S i będzie oznaczana przez ∂S - krzywą zorientowaną zgodnie z kierunkiem prądu (patrz Rys.4.1). Kierunek prądu wyznacza również orientację powierzchni S, której można przyporządkować wektor do niej prostopadły $\mathbf{S} = \iint_S d\mathbf{s}$ o długości równej polu S. Jeśli interesuje nas pole magnetyczne w odległości znacznie większej od rozmiaru pętli to ponownie możemy zastosować przybliżenie

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \simeq \frac{1}{r} - \mathbf{r}'\cdot\nabla\Big(\frac{1}{r}\Big) = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3}. \tag{4.24}$$

Dla prądu liniowego zamiast trójwymiarowej całki zawierającej gęstość prądu stosujemy do obliczenia potencjału wektorowego dipola całkę liniową wzdłuż krzywej zamkniętej ∂S i przybliżenie (4.24)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\partial S}\frac{I}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d\mathbf{r}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\oint_{\partial S} d\mathbf{r}' + \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\oint_{\partial S}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'. \tag{4.25}$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie równania (4.25) jest równy zero [2] a drugi wyraz możemy przekształcić wykorzystując (18) i kładąc $f(\mathbf{r}') = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$ co daje $\nabla_{\mathbf{r}'} f(\mathbf{r}') = \mathbf{r}$ i ostatecznie

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \iint_S \mathbf{r} \times d\mathbf{s}' = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \mathbf{r} \times \iint_S d\mathbf{s}'. \tag{4.26}$$

Definiując wektor *dipolowego momentu magnetycznego* jako $\mathbf{m} \equiv I\mathbf{S}$ otrzymujemy ostateczny wzór

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \tag{4.27}$$

a stąd także postać indukcji magnetycznej dla dipola

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \Big(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \Big). \tag{4.28}$$

Na zakończenie wyprowadzimy wzór na energię dipola magnetycznego w zewnętrzym polu magnetycznym $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Jest on podobny do formuły (4.7) dla energii dipola elektrycznego

$$W(\mathbf{r}) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{4.29}$$

Zauważmy, że obie strony równania (3.2) można wycałkować po całej przestrzeni otrzymując

$$\iiint \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \, d^3\mathbf{r} = -\iiint \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, d^3\mathbf{r} \tag{4.30}$$

gdzie zastosowaliśmy twierdzenie Gaussa do części zawierającej wektor Poyntinga a także fakt znikania tego wektora w nieskończoności. Zakładając, że gęstość prądu nie zależy od czasu i używając cechowania $\Phi \equiv 0$ (co oznacza $\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}$) otrzymujemy szczególną postać prawa zachowania energii

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint (\mathcal{E} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}) \, d^3\mathbf{r} = 0, \tag{4.31}$$

Ponieważ $\mathcal{E}$ jest gęstością energii pola to równanie (4.31) opisuje zasadę zachowania sumy energii pola i prądu a stąd

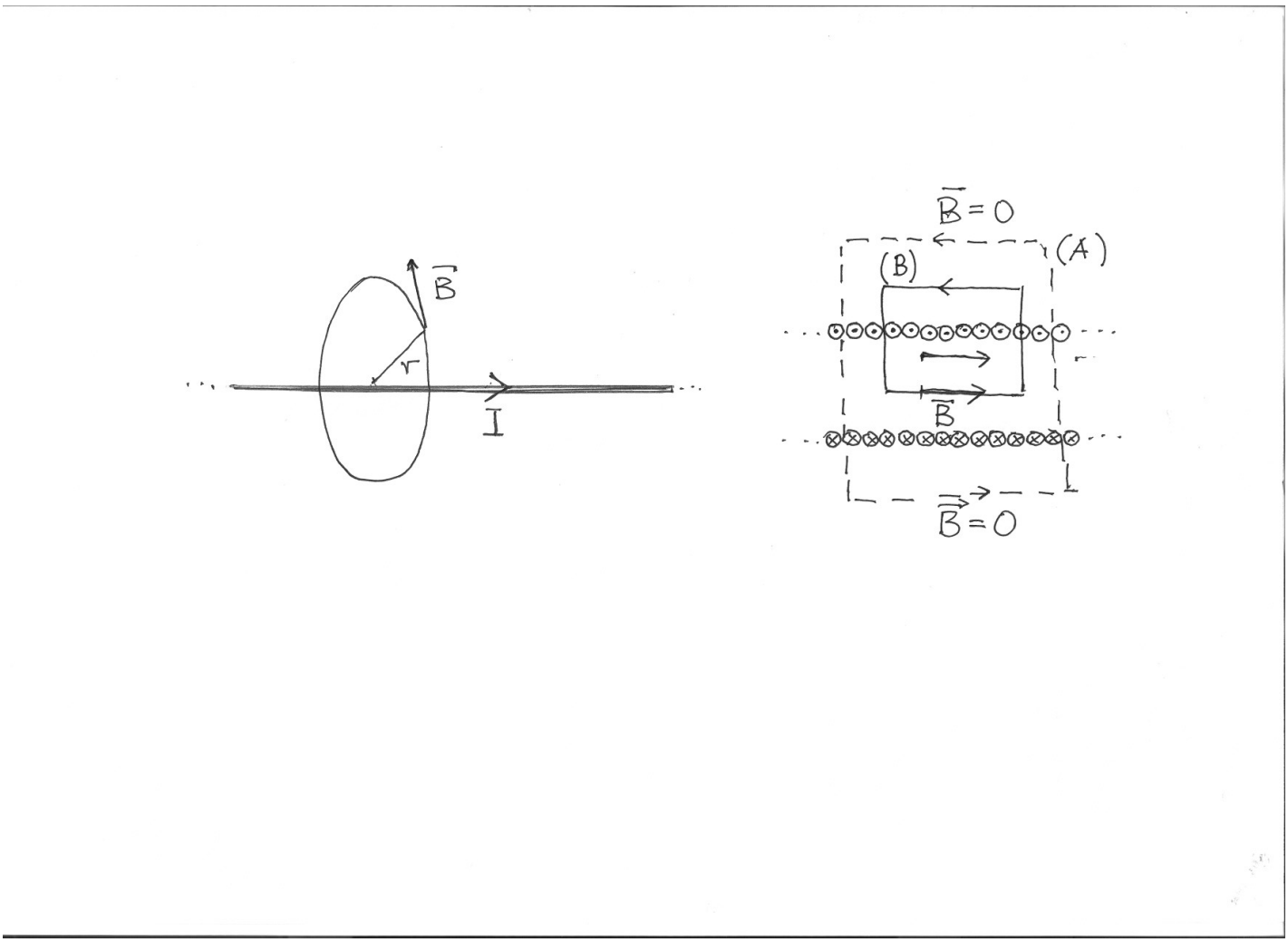
$$W = -\iiint \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \, d^3\mathbf{r} \tag{4.32}$$

można interpretować jako energię stacjonarnego prądu o gęstości $\mathbf{j}$ w polu magnetycznym danym przez potencjał wektorowy $\mathbf{A}$. Stosując (4.32) do liniowego prądu dipola magnetycznego i wykorzystując twierdzenie Stokesa oraz $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ dostajemy

$$W(\mathbf{r}) = -I \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}' = -I \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}' = -I\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S} \tag{4.33}$$

gdzie $\mathbf{r}$ jest pewnym punktem w środku pętli z prądem określającym położenie dipola magnetycznego.

[2] Całka $\int_C d\mathbf{r}$ wzdłuż krzywej C daje wektor łączący początek krzywej z jej końcem a więc zero dla krzywej zamkniętej.



Rysunek 4.4: Pole wytwarzane przez liniowy przewodnik i selenoid.

4.2.2 Multipole magnetyczne

Dla pola magnetycznego w dużej odległości od stacjonarnych prądów występujących w pewnym ograniczonym obszarze istnieje rozwinięcie multipolowe podobne do tego dla pól elektrostatycznych (patrz (4.9),(4.9)). Podstawowa różnica to ta, że wyraz odpowiadający monopolowi znika i pierwszy różny od zera wyraz odpowiada dipolowi magnetycznemu o momencie magnetycznym

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \iiint [\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})] \, d^3\mathbf{r}. \tag{4.34}$$

4.2.3 Pole liniowego przewodnika z prądem i selenoidu

Dla pewnych wyidealizowanych modeli stacjonarnych prądów można wyznaczyć wytwarzane pole magnetyczne bezpośrednio z całkowej postaci prawa Ampera wykorzystując symetrie problemu. I tak dla nieskończonego prostoliniowego przewodnika, w którym płynie prąd I spodziewamy się, że pole magnetyczne ma symetrię cylindryczną a wektor $\mathbf{B}$ leży w płaszczyźnie prostopadłej do przewodnika. Jest styczny do okręgu przez środek którego przechodzi przewodnik i ma kierunek zgodny z regułą śruby prawoskrętnej (patrz Rys.4.4).

Jego wartość bezwzględna zależy jedynie od odległości r od przewodnika i jak łatwo spraw-

dzić prawo Ampera $\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$ implikuje

$$B(r) = \frac{\mu_0 \, I}{2\pi \, r}. \tag{4.35}$$

Podobnie możemy obliczyć pole magnetyczne prostoliniowego nieskończenie długiego selenoidu (cewki) o n zwojach na jednostkę długości, przez który płynie prąd I. Symetria problemu implikuje równoległość pola magnetycznego do osi selenoidu, a wybór dwóch zamkniętych krzywych (patrz Rys.4.4) pozwala w prosty sposób zastosować prawo Ampera. Prąd przechodzący przez powierzchnię ograniczoną krzywą (A) jest równy zero z czego wynika, że pole magnetyczne na zewnątrz cewki jest też równe zero. Przez powierzchnię ograniczoną krzywą (B) przechodzi prąd $I(l) = n \, l \, I$ co oznacza, że pole magnetyczne wewnątrz cewki jest jednorodne i ma wartość

$$B = \mu_0 \, n \, I. \tag{4.36}$$

Uwagi

Silne pola magnetyczne, rzędu 1 tesli,[3] wytwarzane przez elektromagnesy w tym elektromagnesy nadprzewodzące są podstawowym elementem techniki obrazowania wykorzystującej magnetyczny rezonans jądrowy (nazwy angielskie :*magnetic resonance imaging (MRI), nuclear magnetic resonance imaging (NMRI), magnetic resonance tomography (MRT)*). Nie stwierdzono istotnego wpływu stałego pola magnetycznego na organizmy nawet dla bardzo silnych pól rzędu kilku tesli. Obserwuje się natomiast terapeutyczne efekty zmiennych pól magnetycznych o częstościach rzędu 100 Hz (*magnetoterapia zmiennoprądowa*).

4.3 Pola statyczne w ośrodkach

Równania Maxwella zawierają źródła czyli gęstości ładunków i prądów. Ze względów praktycznych często wygodnie jest podzielić je na "zewnętrzne" i "wewnętrzne". Te pierwsze możemy kontrolować zmieniając np. natężenie prądu w przewodach czy ładunek dostarczany do kondensatora. Te drugie, mikroskopowe ładunki i prądy powstałe w ośrodku nie są kontrolowane a ich precyzyjny pomiar nie jest możliwy i musimy zadowolić się wartościami uśrednionymi w pewnym obszarze i w pewnym przedziale czasowym. Rozważmy równania Maxwella dla stacjonarnych gęstości ładunku i prądu

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho + \rho', \tag{4.37}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \, (\mathbf{j} + \mathbf{j}') \tag{4.38}$$

gdzie przez ρ, $\mathbf{j}$ oznaczamy źródła zewnętrzne a przez ρ', $\mathbf{j}'$ wewnętrzne. To jak zachowują się indukowane ładunki i prądy zależy od fizycznych własności ośrodków.

[3]Dla porównania pole magnetyczne na powierzchni Ziemi jest rzędu $5 \times 10^{-5} T$.

4.3.1 Pola elektrostatyczne w dielektrykach

W ośrodkach zwanych *dielektrykami* naładowane cząstki są związane i mogą ulegać jedynie przesunięciu lub wykonywać ograniczone drgania. Efekt ten można opisać wprowadzając *wektor polaryzacji* $\mathbf{P}$ zdefiniowany wzorem

$$-\nabla \cdot \mathbf{P} = \rho'. \tag{4.39}$$

Przyjmując teraz, że w przybliżeniu polaryzacja jest proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego otrzymujemy

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}, \tag{4.40}$$

gdzie bezwymiarową wielkość χ nazywamy *podatnością elektryczną*. Definiujemy teraz nowe pole nazywane *wektorem indukcji elektrycznej* jako

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0(1+\chi)\mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \tag{4.41}$$

gdzie $\epsilon = \epsilon_0(1+\chi)$ nazywamy *przenikalnością elektryczną dielektryka*. Ostatecznie prawo Gaussa dla dielektryków ma postać

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \tag{4.42}$$

Należy tu dodać, że związek $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ jest dobrym przybliżeniem dla izotropowych dielektryków natomiast dla anizotropowych ośrodków, takich jak kryształy, zamiast stałej ϵ należy używać tensora $[\epsilon_{kl}]$ i relacji $D^k = \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{kl} E^l$. Ponadto, dla silnych pól elektrycznych liniowy związek między $\mathbf{D}$ i $\mathbf{E}$ należy zastąpić bardziej skomplikowaną nieliniową zależnością. Jeszcze inne zjawiska zachodzą w *ferroelektrykach*, dla których poniżej pewnej temperatury krytycznej pojawia się spontaniczna polaryzacja elektryczna nawet w nieobecności zewnętrznego pola.

4.3.2 Diamagnetyki, paramagnetyki i ferromagnetyki

Podobnie do pól elektrostatycznych można opisać statyczne pola w magnetykach, czyli ośrodkach, w krórych pojawiają się mikroskopowe prądy związane z orbitalnym lub wewnętrznym momentem pędu. Istnieje tu jednak istotna różnica w stosunku do zjawiska polaryzacji elektrycznej. Dodatkowe pole w dielektrykach jest zawsze skierowane przeciwnie do pierwotnego pola zewnętrznego. Magnetyki, dla których mamy podobną sytuację nazywamy *diamagnetykami*, a te, w których dodatkowe pole wzmacnia pole zewnętrzne *paramagnetykami*. Wprowadzając wektor namagnesowania $\mathbf{M}$, który pełni podobną rolę do polaryzacji $\mathbf{P}$ i jest zdefiniowany jako

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{j}', \tag{4.43}$$

możemy zdefiniować *wektor natężenia pola magnetycznego* H

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B} - \mathbf{M}). \tag{4.44}$$

Dla izotropowych magnetyków i niezbyt silnych pól zewnętrznych przyjmujemy liniową zależność

$$\mathbf{M} = \mu_0 \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}. \tag{4.45}$$

gdzie teraz bezwymiarową wielkość χ_m nazywamy *podatnością magnetyczną*, która może przyjmować zarówno wielkości dodatnie (diamagnetyki) i ujemne (paramagnetyki), μ jest *przenikalnością magnetyczną ośrodka*. Ostatecznie prawo Ampera dla takich magnetyków ma postać

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}. \tag{4.46}$$

Istnieje również trzeci rodzaj substancji magnetycznych zwanych *ferromagnetykami*. Poniżej pewnej temperatury krytycznej (*temperatura Curie*) wykazują one spontaniczne namagnesowanie. Wzmacniają one również zewnętrzne pole magnetyczne i dlatego ferromagnetyki używane są jako rdzenie w elektromagnesach.

Na zakończenie należy zauważyć, że ścisła teoria zjawisk magnetycznych w ośrodkach wymaga zastosowania mechaniki kwantowej.

4.3.3 Pole elektryczne w przewodniku

Przewodniki charakteryzują się obecnością dużej liczby swobodnych ładunków (elektronów), które poruszają się pod wpływem przyłożonego pola elektrycznego wytwarzając prąd elektryczny o gęstości $\mathbf{j}$. Wskutek zderzeń z dodatnimi jonami ośrodka ich energia kinetyczna zamieniana jest na ciepło co powoduje, że przyłożone siła $q\mathbf{E}$ równoważona jest "siłą oporu". Siła ta jest źródłem oporu elektrycznego przewodnika, który można opisać różniczkową postacią *prawa Ohma*

$$j = \sigma\mathbf{E}, \tag{4.47}$$

gdzie σ nosi nazwę *przewodnictwa właściwego ośrodka*. Jeśli umieścimy przewodnik w zewnętrznym polu elektrycznym, to ruch ładunków w postaci prądów trwa do momentu osiągnięcia pewnego równowagowego rozkładu ładunku elektrycznego, przy którym prąd przestaje płynąć. Z równania (4.47) wynika, że w stanie równowagi pole elektryczne wewnątrz przewodnika znika, a na jego powierzchni jest do niej prostopadłe. Ponadto jeśli pewien obszar otoczymy zamkniętą powierzchnią wykonaną z przewodnika to do wnętrza tego obszaru nie wnika zewnętrzne pole elektryczne (*zjawisko ekranowania, klatka Faradaya*).

Rozdział 5

Fale elektromagnetyczne

Wracamy do opisu pola elektromagnetycznego w próżni, czyli w obszarze gdzie nie występują ładunki elektryczne. Pole takie jest opisane równaniami Maxwella

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, && (5.1)\\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, && (5.2)\\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, && (5.3)\\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. && (5.4) \end{aligned}$$

Podobnie jak w przypadku ogólnym możemy wprowadzić potencjały, wektorowy i skalarny, spełniające równania

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi. \tag{5.5}$$

Wykorzystujemy swobodę w wyborze cechowania można przyjmując tzw. *cechowanie Coulomba*

$$\Phi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \tag{5.6}$$

Zauważmy, że mamy tu dwa warunki w odróżnieniu od przypadku równań Maxwella ze źródłami gdzie wprowadziliśmy jedynie warunek Lorentza (2.19). Ponieważ jednak po uwzględnieniu warunku $\Phi = 0$ otrzymujemy zamiast (5.5) związki

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{5.7}$$

istnieje ciągle swoboda definicji $\mathbf{A}$ polegająca na możliwości dodania gradientu dowolnej funkcji niezależnej od czasu

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r}). \tag{5.8}$$

Z drugiej strony podstawiając $\mathbf{E}$ dane przez (5.5) do równania Maxwella $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ widzimy, że $\nabla \cdot \mathbf{A}$ nie zmienia się w czasie a więc odpowiedni wybór funkcji $f(\mathbf{r})$ w (5.8) pozwala spełnić warunek $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Wstawiając teraz cechowanie Coulomba (5.6) do równania (2.21)

otrzymujemy równanie falowe w próżni

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = 0. \tag{5.9}$$

5.1 Monochromatyczne fala płaska

Powracamy do opisu monochromatycznej fali płaskiej tym razem używając rzeczywistego rozwiązania równania falowego (5.9) w postaci

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi), \tag{5.10}$$

gdzie długość wektora falowego $\mathbf{k}$ jest związana z częstością kołową ω relacją

$$\omega = c|\mathbf{k}| \tag{5.11}$$

a cechowanie Coulomba implikuje

$$0 = \nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_0 \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi), \tag{5.12}$$

co oznacza, że wektor falowy i potencjał wektorowy fali są prostopadłe

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_0 = 0. \tag{5.13}$$

Natężenie pola elektrycznego i indukcji magnetycznej obliczamy wykorzystując (5.5)

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\omega\mathbf{A}_0 \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi), \tag{5.14}$$

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = -\Big(\mathbf{k}\times\mathbf{A}_0\Big) \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi) = \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi). \tag{5.15}$$

Prowadzi to do następujących geometrycznych relacji między wektorami $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}_0$ i $\mathbf{B}_0$ (patrz Rys.51)

$$\mathbf{k}\perp\mathbf{E}_0, \quad \mathbf{k}\perp\mathbf{B}_0, \quad \mathbf{E}_0\perp\mathbf{B}_0, \tag{5.16}$$

oraz

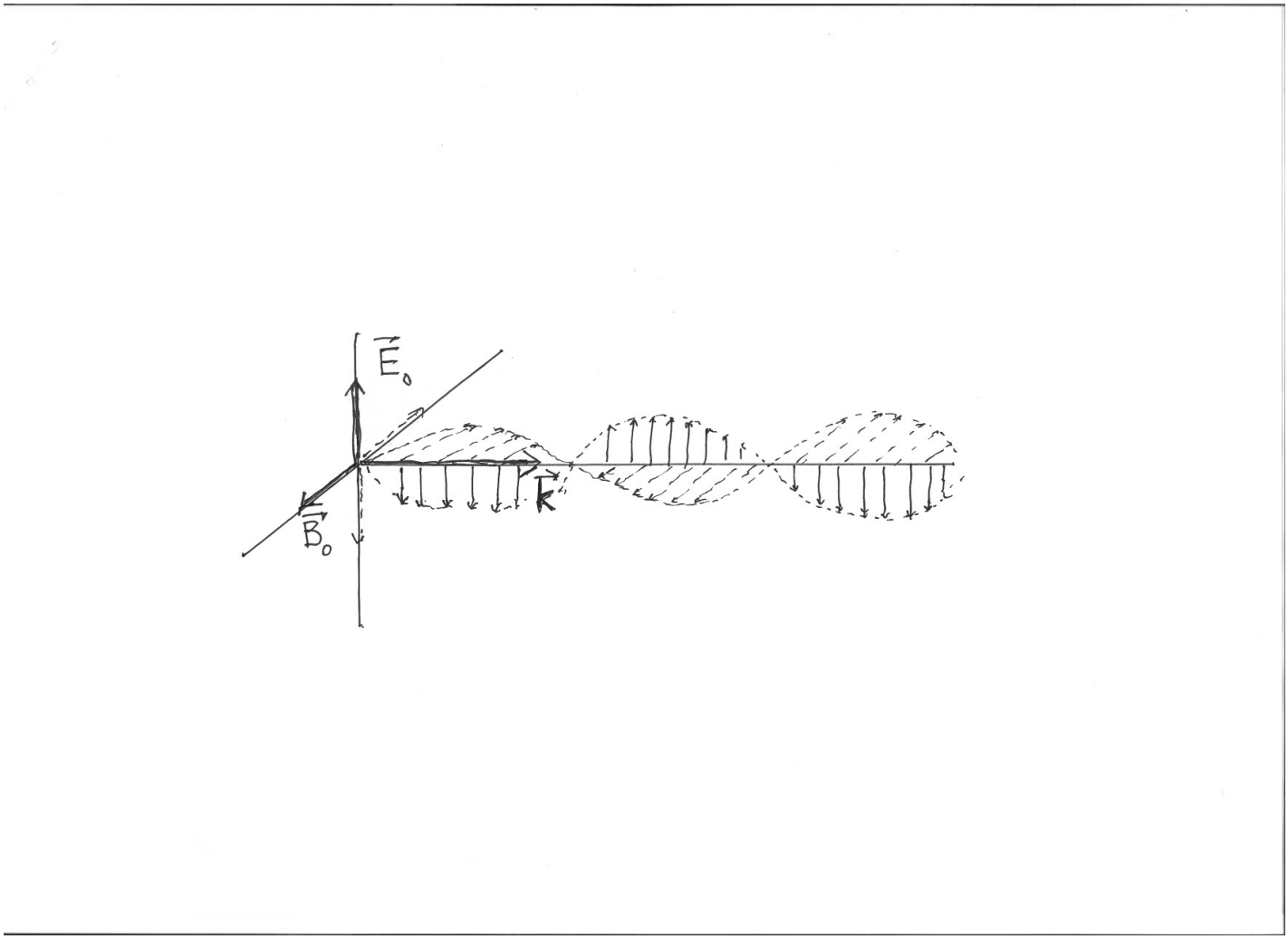
$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mathbf{k}}{\omega}\times\mathbf{E}_0, \quad |\mathbf{B}_0| = \frac{1}{c}|\mathbf{E}_0|. \tag{5.17}$$

Falę elektromagnetyczna jest więc falą poprzeczną a relacje (5.16),(5.17) opisują *polaryzację liniową* o kierunku wyznaczonym przez wektor pola elektrycznego $\mathbf{E}_0$.

5.1.1 Gęstość energii i wektor Poyntinga fali

Dla monochromatycznej fali płaskiej możemy obliczyć gęstość energii wykorzystując wzór (3.2) oraz (5.17)

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2}\Big(\mathbf{E}^2 + c^2\mathbf{B}^2\Big) = \epsilon_0\mathbf{E}_0^2 \sin^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi). \tag{5.18}$$



Rysunek 5.1: Geometria elektromagnetycznej fali płaskiej o polaryzacji liniowej.

Wyrażenie to możemy uśrednić po okresie fali (średnia wartość $\sin^2 x$ po okresie równa się $\frac{1}{2}$) co da nam mierzalną wartość gęstości energii fali płaskiej

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\epsilon_0}{2}\mathbf{E}_0^2. \tag{5.19}$$

Podobnie możemy wyznaczyć wektor Poyntinga monochromatycznej fali płaskiej wykorzystując (3.5) i (5.17)

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\big(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\big) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\big(\mathbf{E}^2\big)\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \tag{5.20}$$

co oznacza, że strumień energii opisany przez $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$ ma kierunek wektora falowego. Po uśrednieniu po okresie fali otrzymujemy

$$\mathbf{S}_0 = \frac{1}{\mu_0}\big(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\big) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\big(\mathbf{E}_0{}^2\big)\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = c\,\mathcal{E}_0\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}. \tag{5.21}$$

5.1.2 Polaryzacja eliptyczna

Rozwiązanie równania falowego w postaci monochromatycznej fali płaskiej dyskutowane w poprzednim paragrafie opisuje przypadek polaryzacji liniowej fali, gdy wektor natężenia pola elektrycznego mierzonego w ustalonym punkcie przestrzeni oscyluje wzdłuż ustalonego kierunku wyznaczonego przez wektor $\mathbf{E}_0$. Innym rozwiązaniem jest superpozycja takich fal o identycznym wektorze falowym ale różnych wektorach $\mathbf{E}_0^{(1)}$ i $\mathbf{E}_0^{(2)}$ a także różnych fazach $\phi^{(1)}$ i $\phi^{(2)}$. Wybierając oś z zgodnie z kierunkiem wektora falowego $\mathbf{k}$ a początek układu współrzędnych tak aby pierwsza faza znikała możemy pole elektryczne takiej fali opisać w następujący sposób

$$E_x = E_1 \cos(\omega t - kz), \quad E_y = E_2 \cos(\omega t - kz + \delta), \quad E_z = 0, \tag{5.22}$$

gdzie $E_1, E_2 \geqslant 0$, $k \equiv |\mathbf{k}|$ a δ jest różnicą faz. Wykorzystując tożsamość $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ i eliminując $\cos(\omega t - kz)$ z układu równań (5.22) otrzymujemy

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 - 2\cos\delta\frac{E_x E_y}{E_1 E_2} = \sin^2\delta. \tag{5.23}$$

Jest to równanie elipsy o osi tworzącej kąt ψ z osią x gdzie

$$\tan 2\psi = \left(\frac{2E_1E_2}{{E_1}^2 - {E_2}^2}\right). \tag{5.24}$$

czyli wektor pola elektrycznego krąży po elipsie z częstością fali $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Gdy przyjmiemy różnicę faz $\delta = \frac{\pi}{2}$ lub $\frac{3\pi}{2}$ wtedy osie elipsy pokrywają się z osiami współrzędnych x i y i równanie (5.23) przechodzi w standardowe równanie elipsy

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 = 1. \tag{5.25}$$

W szczególności dla równych amplitud $E_1 = E_2$ otrzymujemy równanie okręgu a odpowiednią polaryzację nazywamy *polaryzacją kołową*. Wracając do zależności czasowych (5.22) można zauważyć, że różnica faz $\delta = \frac{\pi}{2}$ daje rotację wektora $\mathbf{E}$ względem wektora falowego (osi z), która jest zgodna z regułą śruby prawoskrętnej a $\delta = \frac{3\pi}{2}$ - przeciwną. Oczywiście polaryzacja eliptyczna daje ogólne rozwiązanie w przypadku fali płaskiej a polaryzacje liniowa i kołowa stanowią jej szczególne przypadki.

5.1.3 Światło częściowo spolaryzowane

Fale elektromagnetyczne, w szczególności światło, bardzo rzadko mają charakter monochromatycznej fali płaskiej o ustalonej polaryzacji. Nawet jeśli źródło promieniowania emituje falę, która w dużej odległości od niego miałaby taki charakter to zjawiska pochłaniania, odbicia i inne zmiany zachodzące przy przechodzeniu promieniowania przez materię modyfikują stan polaryzacji. Można je opisać traktując parametry E_1, E_2 i δ w równaniu (5.22) jako wielkości podlegające przypadkowym fluktuacjom i dokonać odpowiedniego uśrednienia oznaczanego

symbolem $\langle \dots \rangle$. Dogodny opis takiego stanu polaryzacji dają *parametry Stokesa* zdefiniowane w następujący sposób

$$s_0 = \frac{1}{2}\Big(\langle E_1^2\rangle + \langle E_2^2\rangle\Big), \tag{5.26}$$

$$s_1 = \frac{1}{2}\Big(\langle E_1^2\rangle - \langle E_2^2\rangle\Big), \tag{5.27}$$

$$s_2 = \langle E_1\, E_2\rangle\langle\cos\delta\rangle, \tag{5.28}$$

$$s_3 = \langle E_1\, E_2\rangle\langle\sin\delta\rangle. \tag{5.29}$$

Zauważmy, że s_0 jest proporcjonalne do gęstości energi a także strumienia energii fali co oznacza, że można ten parametr unormować do natężenia światła w wybranych jednostkach a za nim odpowiednio unormować pozostałe parametry Stokesa.

Wykorzystując nierówność Schwarza $\langle E_1\, E_2\rangle^2 \leqslant \langle E_1^2\rangle\langle E_1^2\rangle$ oraz podobną nierówność $\langle\sin\delta\rangle^2 + \langle\cos\delta\rangle^2 \leqslant 1$ można łatwo pokazać, że

$$s_0^2 \geqslant s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \tag{5.30}$$

Gdy nierówność jest ostra to światło takie nazywamy *częściowo spolaryzowanym*. Równość zachodzi wyłącznie wtedy gdy wielkości E_1, E_2 i δ nie podlegają fluktuacjom i wtedy światło jest *całkowicie spolaryzowane*. Parametry Stokesa dają elegancki geometryczny opis stanu polaryzacji światła za pomocą trójwymiarowego wektora (s_1, s_2, s_3) leżącego wewnątrz kuli o promieniu s_0. Wektory leżące na powierzchni kuli opisują światło całkowicie spolaryzowane, a wektor zerowy światło całkowicie zdepolaryzowane. Wiele zjawisk powodujących zmianę stanu polaryzacji światła i oparte na nich elementy optyczne można opisać za pomocą liniowych transformacji parametrów Stokesa, czyli za pomocą odpowiednich rzeczywistych macierzy 4×4 zwanych *macierzami Muellera*.

5.1.4 Zastosowania

Polaryzacja światła jest wykorzystywana w praktyce, oto kilka przykładów.

1) Okulary polaryzacyjne pochłaniają silnie spolaryzowane światło odbite od płaskich poziomych powierzchni.

2) W wyświetlaczach ciekłokrystalicznych (LCD) przyłożone napięcie zmienia orientację molekuł ciekłego kryształu umieszczonych między skrzyżowanymi polaryzatorami co powoduje zmianę natężenia przechodzącego swiatła.

3) Niektóre systemy kina 3D wykorzystują fakt, że prawe oko odbiera inny obraz niż lewe dzięki odpowiednim okularom z filtrami polaryzacyjnymi.

4) Polarymetria pozwala mierzyć stężenia roztworów substancji optycznie czynnych, które wywołują skręcenie płaszczyzny polaryzacji przechodzącego światła.

5) Mikroskop polaryzacyjny jest przystosowany do obserwacji obiektów w świetle spolaryzowanym, co szczególnie nadaje się do badania ciał anizotropowych, np. minerałów.

6) W diagnostyce chorób skóry wykorzystuje się zdjęcia wykonane w świetle spolaryzowanym.

O ile światło bezpośrednio odbite od powierzchni skóry pozostaje spolaryzowane, to ta część światła, która wniknęła głębiej ulega częściowej depolaryzacji dostarczając informacji o budowie głębiej położonych tkanek.
7) Na rynku urządzeń medycznych dostępne są aparaty do biostymulacji tkanek za pomocą światła spolaryzowanego. Mechanizmy odpowiedzialne za obserwowane terapeutyczne efekty nie są do końca poznane.

5.2 Promieniowanie dipola elektrycznego

W wielu przypadkach źródło fal elektromagnetyczny można traktować w przybliżeniu jako oscylujący dipol elektryczny. Przykładem mogą być zarówno fale radiowe wytwarzane przez liniową antenę jak i promieniowanie atomu wynikające z tzw. elektrycznych przejść dipolowych. Aby wyznaczyć pola elektryczne i magnetyczne takiej fali w odległości od źródła dużo większej niż rozmiary dipola zastosujemy wzór na potencjał wektorowy (2.43) (pomijamy falę nadbiegającą $\mathbf{A}_0$)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mu_0 \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3\mathbf{r}' \simeq \frac{\mu_0}{r} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}', t-r/c)\, d^3\mathbf{r}', \tag{5.31}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, iż prąd związany z oscylacjami dipola jest skoncentrowany w pobliżu środka układu współrzędnych a stąd $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \simeq |\mathbf{r}| \equiv r$. Wykonując całkowanie przez części i wykorzystując równanie ciągłości (2.10) otrzymujemy

$$\iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}', t-r/c)\, d^3\mathbf{r}' == -\iiint \mathbf{r}' \Big(\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t-r/c)\Big)\, d^3\mathbf{r}' = \frac{d}{dt} \iiint \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t-r/c)\, d^3\mathbf{r}'. \tag{5.32}$$

Zauważmy, że $\iiint \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}', t-r/c)\, d^3\mathbf{r}'$ jest momentem dipolowym dla rozkładu ładunku o gęstości ρ co pozwala, w przypadku oscylującego dipola, zastąpić go przez $\mathbf{d}\sin(\omega t - kr)$, gdzie $k = \frac{\omega}{c}$. Ostatecznie więc otrzymujemy potencjał wektorowy w postaci

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0\, \omega\, \cos(\omega t - kr)}{r}\, \mathbf{d}. \tag{5.33}$$

Możemy teraz znaleźć pole magnetyczne w obszarze dalekim od źródła wykorzystując $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ i pomijając wyraz zanikający jak $\frac{1}{r^2}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \Big(\mathbf{n} \times \mathbf{d}\Big) \frac{\mu_0\, c\, k^2\, \sin(\omega t - kr)}{r}. \tag{5.34}$$

gdzie $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$. W tym samym obszarze pole promieniowania wygląda lokalnie jak fala płaska i możemy wykorzystać relacje ortogonalności (5.16) i (5.17) dla wyznaczenia pola elektrycznego

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = c\, \mathbf{B} \times \mathbf{n} = \Big(\mathbf{n} \times \mathbf{d}\Big) \times \mathbf{n}\, \frac{\mu_0\, c^2\, k^2\, \sin(\omega t - kr)}{r}. \tag{5.35}$$

Moc promieniowania emitowanego przez dipol obliczamy wykorzystując wektor Poyntinga

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\big(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\big) = \Big[\frac{\mu_0\,\mathbf{d}^2\,\omega^4}{c\,r^2}\sin^2(\omega t - kr)\,\sin^2\Theta\Big]\mathbf{n} \tag{5.36}$$

gdzie kierunek dipola $\mathbf{d}$ pokrywa się z osią z a Θ to kąt między osią z a wektorem $\mathbf{r}$. Całkując strumień energii (wektor Poyntinga) po powierzchni kuli o promieniu R i uśredniając po okresie fali otrzymujemy ostatecznie średnią moc promieniowania dipola

$$\bar{P} = \frac{\mu_0\,\mathbf{d}^2\,\omega^4}{2c}2\pi\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3\Theta\,d\Theta = \frac{4\pi}{3}\mu_0\,c^{-1}\,\mathbf{d}^2\,\omega^4. \tag{5.37}$$

Zwraca uwagę silna zależność mocy od częstości. Jeśli traktujemy dipol jako mechaniczny oscylator to emisja promieniowania wytwarza *siłę tarcia promienistego*, która musi być kompensowana przez zewnętrzne zasilanie.

5.3 Pole elektromagnetyczne we wnęce

Do tej pory rozważaliśmy fale elektromagnetyczne w nieskończonej przestrzeni. Wyobraźmy sobie teraz promieniowanie elektromagnetyczne zamknięte we wnęce o idealnie przewodzących ściankach. Brak oporu elektrycznego zapobiega utracie energii przez pole a także wymusza znikanie pola elektrycznego $\mathbf{E}$ na ściankach wnęki. Załóżmy, dla prostoty, że wnęka ta ma kształt sześcianu o boku L umieszczonego zgodnie z osiami układu współrzędnych x, y, z. Wtedy dowolne pole elektromagnetyczne spełniające założone warunki brzegowe można zapisać w postaci superpozycji fal stojących

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sqrt{\frac{8}{\epsilon_0 L^3}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\lambda=1}^{2} q_{\mathbf{k},\lambda}(t)\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\,\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}, \tag{5.38}$$

gdzie czynnik $\sqrt{\frac{8}{\epsilon_0 L^3}}$ został wybrany ze względów normalizacyjnych. Sumowanie wykonane jest po dyskretnym zbiorze wektorów falowych $\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z]$, które pozwalają spełnić warunki brzegowe, tzn. znikanie pola na ściankach. Wektory te mają postać

$$\mathbf{k} = \Big[\frac{\pi n_x}{L}, \frac{\pi n_y}{L}, \frac{\pi n_z}{L}\Big], \quad n_x,\, n_y,\, n_z = 1, 2, 3, ... \tag{5.39}$$

Dwa kierunki polaryzacji prostopadłe do wektora $\mathbf{k}$ (porównaj z (5.22)) wyznaczone są przez unormowane do jedynki wektory $\mathbf{e}_{\mathbf{k},1}$ i $\mathbf{e}_{\mathbf{k},2}$.
Funkcje

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{8}{L^3}}\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z) \tag{5.40}$$

są liniowo niezależne i spełniają warunek ortogonalności, który można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem

$$\iiint_{L^3} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r})\,d^3\mathbf{r} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \tag{5.41}$$

Podstawiając teraz wyrażenie (5.38) do równania falowego (5.9) i wykorzystując liniową niezależność funkcji $u_{\mathbf{k}}$ otrzymujemy następujące równania dla zależnych od czasu amplitud $q_{\mathbf{k},\lambda}(t)$

$$\ddot{q}_{\mathbf{k},\lambda} + \omega^2_{\mathbf{k},\lambda}\, q^2_{\mathbf{k},\lambda} = 0 \tag{5.42}$$

gdzie częstość kołowa $\omega_{\mathbf{k},\lambda} = c\,|\mathbf{k}|$. Widzimy więc, że równania ruchu dla pola elektromagnetycznego we wnęce są równoważne układowi równań Newtona dla zbioru niezależnych oscylatorów harmonicznych numerowanych indeksem $(\mathbf{k}, \lambda)$. Analogię tę można dalej rozwinąć obliczając energię H pola we wnęce wykorzystując wzór na gęstość energii (3.2)

$$H = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{L^3} \left(\mathbf{E}^2 + c^2\mathbf{B}^2\right) d^3\mathbf{r} = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{L^3} \Big[\Big(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\Big)^2 + c^2\Big(\nabla \times \mathbf{A}\Big)^2\Big]\, d^3\mathbf{r}. \tag{5.43}$$

Podstawiając teraz wyrażenie (5.38) dla potencjału wektorowego we wnęce i wykonując całkowanie z wykorzystaniem relacji ortogonalności (5.41) możemy wyrazić energię pola za pomocą amplitud $q_{\mathbf{k},\lambda}$ i ich pochodnych po czasie

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \Big(\dot{q}^2_{\mathbf{k},\lambda} + \omega^2_{\mathbf{k},\lambda}\, q^2_{\mathbf{k},\lambda}\Big). \tag{5.44}$$

Powyższe wyrażenie odpowiada znowu funkcji Hamiltona układu niezaleznych oscylatorów harmonicznych. Przedstawiona tu równoważność promieniowania elektromagnetycznego we wnęce i układu oscylatorów jest wykorzystywana do opisu promieniowania ciała doskonale czarnego a przede wszystkim dla kwantowania pola elektromagnetycznego. Wszystkie powyższe wyniki można uogólnić na wnęki o dowolnym kształcie. W ogólnej sytuacji szczególna postać fali stojącej (5.40) jest zastępowana rozwiązaniem równania własnego operatora Laplace'a $\Delta \equiv \nabla^2$ z warunkami brzegowymi odpowiadającymi kształtowi wnęki

$$\Delta u_\alpha(\mathbf{r}) = -\omega^2_\alpha\, u_\alpha(\mathbf{r}) \tag{5.45}$$

gdzie α jest nowym indeksem zastępującym $(\mathbf{k}, \lambda)$. Takie rozwiązania równania (5.45) z uwzględnieniem polaryzacji fali danej przez $\mathbf{e}_\alpha$ nazywamy *modami* i zgodnie z powyższymi rozważaniami każdy mod promieniowania można traktować jako oscylator harmoniczny o częstości ω_α.

5.4 Falowody

Szczególnym przypadkiem wnęki z promieniowaniem jest *falowód*, np. w postaci długiej rury wykonanej z metalu. Falowody pozwalają przesyłać energię lub sygnały w sposób bardziej efektywny niż przez propagację w otwartej przestrzeni. Typowe falowody służą do przesyłania promieniowania w zakresie mikrofal i mają wiele praktycznych zastosowań (kuchenki mikrofalowe, radary, urządzenia pomiarowe, w tym także używane w diagnostyce medycznej). Odpowiednikiem falowodów dla częstości optycznych są *światłowody* stosowane w telekomunikacji (telewizja kablowa, sieci telefoniczne , sieci komputerowe, itp), a także w medycynie jako optyczne pro-

wadnice lasera w chirurgii laserowej czy w endoskopii do oświetlania i przekazywania obrazu (wzierniki).

Podstawowa zasada działania falowodu opiera się na zjawisku "uwięzienia" promieniowania wynikającym z warunków brzegowych jakie musi spełniać pole elektromagnetyczne na ściankach granicznych. Fala może się propagować jedynie wzdłuż falowodu ale i tu pojawiają się ograniczenia na dopuszczalne częstości fal.

Opiszemy teraz pewne własności fal propagujących się w falowodach na najprostrzym przykładzie nieskończonego falowodu o przekroju prostokąta i wykonanego z idealnego przewodnika. Oś falowodu i jego boki o długościach a i b pokrywają się z osiami z oraz x, y. Interesują nas rozwiązania równań Maxwella w postaci monochromatycznej fali biegnącej wzdłuż falowodu. Wtedy wszystkie składowe pól $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ mają taką samą postać

$$\Psi(x,y,z,t) = \tilde{\Psi}(x,y)\cos(\omega t - kz + \psi). \tag{5.46}$$

Wykorzystamy teraz dwa równania Maxwella

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \tag{5.47}$$

które po podstawieniu pól w postaci (5.46) można zapisać jako

$$\omega\tilde{B}_y \sin\alpha_{By} - k\tilde{E}_x \sin\alpha_{Ex} = -\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x}\cos\alpha_{Ez}, \quad \frac{\omega}{c^2}\tilde{E}_z \sin\alpha_{Ex} - k\tilde{B}_y \sin\alpha_{By} = \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial x}\cos\alpha_{Bz} \tag{5.48}$$

gdzie użyliśmy uproszczonej notacji $\alpha_K = (\omega t - kz + \psi_K)$. Dobierając odpowiednio różnice faz możemy uprościć oscylujące funkcje po obu stronach równań (5.48) i wartości poprzecznych składowych $\tilde{E}_x$, $\tilde{B}_y$ (a także, zupełnie analogicznie dla $\tilde{E}_y$, $\tilde{B}_x$) można przedstawić jako funkcje podłużnych składowych $\tilde{E}_z$ i $\tilde{B}_z$. Wystarczy więc dalej rozważać rozwiązania równania falowego (mody) dla poddłużnych składowych przy odpowiednio wybranych warunkach brzegowych. Ogólnie mody te można podzielić na trzy klasy:
1) Mody TEM (*transverse electromagnetic*) opisują falę poprzeczną czyli sytuację gdy $E_z = B_z = 0$. Dla naszego modelu falowodu równania (5.48) i analogiczne dla pozostałych składowych poprzecznych implikują znikanie składowych poprzecznych a więc całego pola. Takie fale nie mogą rozchodzić się w pustych cylindrach metalowych ale istnieją np. w kablach koncentrycznych.
2) Mody TE (*transverse electric*) Fale poprzeczne elektryczne spełniają warunki

$$E_z = 0 \quad \text{wszędzie}, \quad 2\text{D} - \text{wektor}[\frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_z}{\partial y}] \quad \text{styczny do powierzchni falowodu}, \tag{5.49}$$

3) Mody TM (*transverse magnetic*). Fale poprzeczne magnetyczne spełniają warunki

$$B_z = 0 \quad \text{wszędzie}, \quad E_z = 0 \quad \text{na powierzchni falowodu}. \tag{5.50}$$

Rozważmy mod TE dla prostokątnego falowodu

$$\tilde{E}_z(x,y) = E_0 \cos\Big(\frac{m\pi x}{a}\Big)\cos\Big(\frac{n\pi y}{b}\Big) \tag{5.51}$$

spełniający przedstawione powyżej warunki brzegowe dla wszystkich $m, n = 1, 2, 3, ...$, a także gdy tylko jedna z liczb m lub n równa się zero. Po podstawieniu pełnej formuły postaci (5.46) do równania falowego $(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2)E_z = 0$ otrzymujemu związek dyspersyjny

$$\omega = \sqrt{c^2k^2 + {\omega_{mn}}^2}, \quad \omega_{mn} = c\sqrt{\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^2}. \tag{5.52}$$

Częstości dla danego typu modu muszą być wyższe niż częstość graniczna ω_{mn}. W szczególności, przyjmując $a \geqslant b$ najniższą częstością graniczną jest $\omega_{10} = c\,\frac{\pi}{a}$. Podobne wyniki otrzymujemy dla modów TM.

Jeśli próbujemy wprowadzić do falowodu promieniowanie o częstości niższej od najniższej częstości granicznej to równanie (5.52) może być spełnione tylko dla urojonych wartości $k = \pm i\sqrt{\omega_{01}^2 - \omega^2}/c$. Pamiętając, że $\cos(kx) = (e^{ikx} + e^{-ikx})/2$ urojona wartość k oznacza, że taka fala ulega eksponencjalnemu tłumieniu wewnątrz falowodu (rozwiązanie odpowiadające wzmacnianiu fali odrzucamy jako niefizyczne).

Zauważmy, że na mocy wzoru (5.52) *prędkość fazowa* fali w falowodzie v_f jest wyższa od prędkości światła,

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1 + \frac{{\omega_{mn}}^2}{c^2\,k^2}} > c. \tag{5.53}$$

Nie prowadzi to jednak do konfliktu ze szczególną teorią względności ponieważ energia i informacja są przesyłane z *prędkością grupową*

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{{\omega_{mn}}^2}{c^2\,k^2}}}\right] < c. \tag{5.54}$$

Uwaga

Dla przypomnienia pojęcia prędkości grupowej rozważmy superpozycję dwóch fal o bardzo bliskich wektorach falowych

$$\cos\Big[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x)\Big] + \cos(\omega t - kx) \simeq 2\cos\Big[\frac{\delta k}{2}(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t)\Big]\cos(\omega t - kx), \tag{5.55}$$

gdzie wykorzystaliśmy tożsamość $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, oraz założenie, że $|\Delta k| << |k|$ a $\omega = \omega(k)$ jest różniczkowalną funkcją k co daje $\Delta\omega \simeq \frac{d\omega}{dk}\Delta k$. Pierwszy, wolnozmienny w czasie i przestrzeni człon $2\cos\Big[\frac{\Delta k}{2}(x - \frac{d\omega}{dk}t)\Big]$ opisuje obwiednię fali, która przesuwa się z prędkością grupową $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

5.5 Fale elektromagnetyczne w ośrodkach

Będziemy rozważać propagację fal w dielektrykach, co oznacza brak swobodnych nośników ładunku spełniających prawo Ohma (4.47). Dla uproszczenia przyjmujemy, że ośrodek jest izotropowy i opisany przez dwa fenomenologiczne parametry: przenikalność elektryczną ϵ i przenikalność magnetyczną μ. Interesuje nas pole daleko od zewnętrznych źródeł co oznacza, że odpowiednie równania Maxwella mają taką samą postać jak równania w próżni (5.1) - (5.4). Jedyna różnica to zastąpienie prędkości światła w próżni $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ prędkościa światła w ośrodku $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$. Oznacza to, że także równania falowe są takie same jak w próżni, a jedynie c zastępujemy przez v. Dla dielektryków zwykle $\mu \simeq \mu_0$ a $\epsilon > \epsilon_0$ co daje prędkość rozchodzenia się fali elektromagnetycznej niższą niż w próżni. Stosunek $\frac{c}{v} \equiv n$ nazywamy *współczynnikiem załamania światła*, gdyż jego zmiana na granicy dwóch ośrodków powoduje zjawisko załamania światła opisywane *prawem Sneliusa*.

Przyjęcie prostych liniowych relacji (4.41), (4.44) dla ośrodków izotropowych, jak to zrobiliśmy w przypadku pól statycznych, jest dla zmiennych w czasie pól jeszcze bardziej problematyczne. Dla fal krótszych od fal radiowych należy uwzględnić zależność $\epsilon(\omega)$ i $\mu(\omega)$ od częstości co implikuje także zależność współczynnika załamania światła od ω. Związek ten wyjaśnia zjawisko rozszczepienia światła przez pryzmat, powstawanie tęczy, itp. Co więcej, fale elektromagnetyczne są pochłaniane przez ośrodki co można opisać przez dodanie urojonych części do zależnych od częstości współczynników $\epsilon(\omega)$ i $\mu(\omega)$ podobnie jak urojona część "częstości" oscylatora harmonicznego opisywała jego tłumienie.

Dalsze komplikacje wprowadza anizotropowość ośrodka, która cechuje np. kryształy. Zespolone i zależne od częstości przenikalności elektryczne i magnetyczne stają się teraz tensorami co powoduje, że np. prędkość propagacji fali elektromagnetycznej zależy nie tylko od jej częstości ale także od kierunku wektora falowego i polaryzacji. Przykładem efektów anizotropowych jest zjawisko *dwójłomności* stosowane w urządzeniach wykorzystujących polaryzację światła (np. pryzmat Nicola).

Literatura

L. Landau, E. Lifszyc *Teoria pola* PWN, Warszawa, 1972.

R.S. Ingarden, A. Jamiołkowski *Elektrodynamika klasyczne*, PWN, Warszawa, 1980.