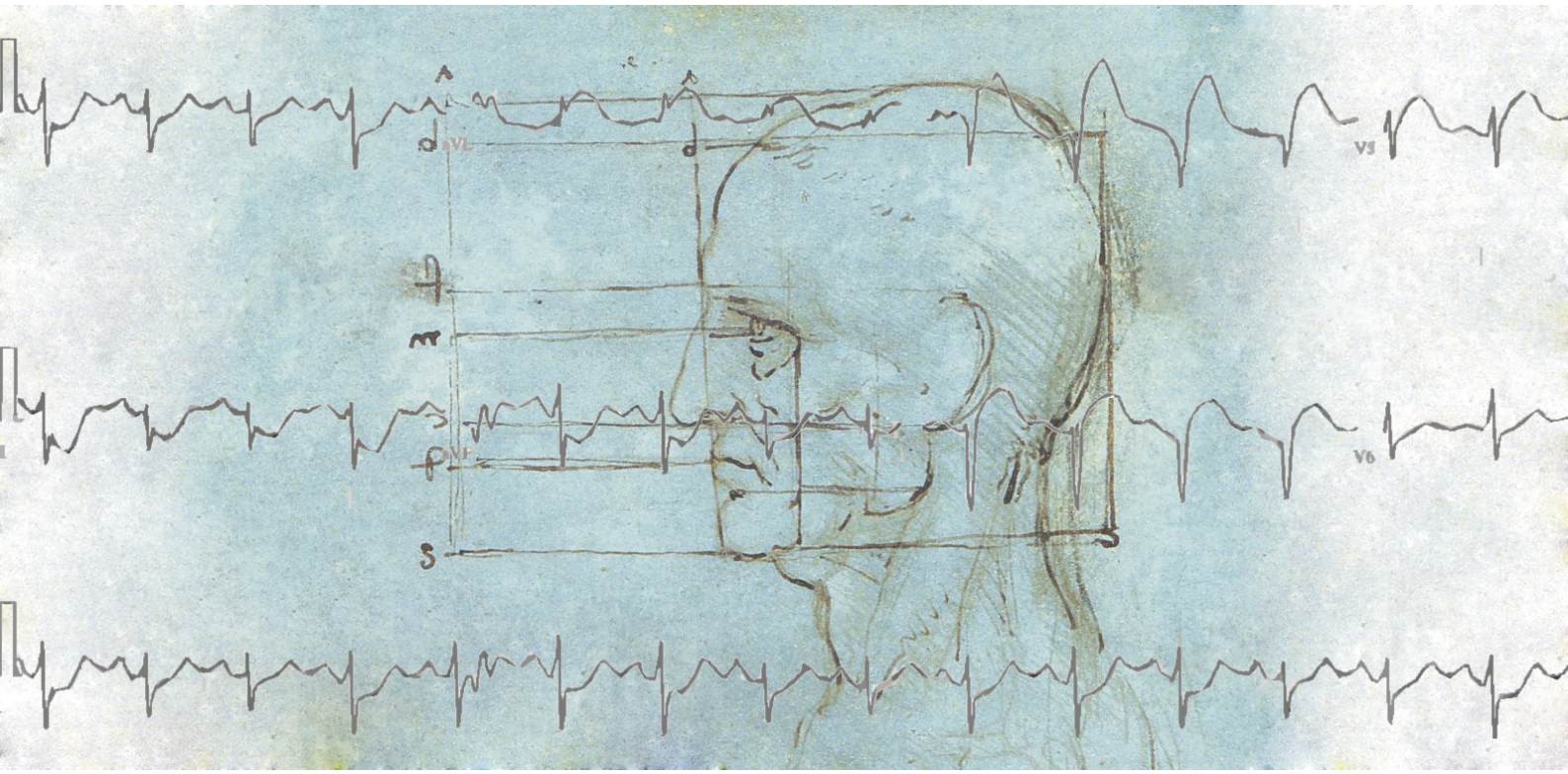


Podstawy fizyki dla fizyki medycznej II

laboratorium

Janina Heldt, Marek Józefowicz

Gdańsk, 2012

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytetu Gdańskiego

Skrypt powstał w ramach projektu „Kształcimy profesjonalistów – kompleksowy program kształcenia skierowany do studentów, absolwentów oraz studentów niepełnosprawnych Uniwersytetu Gdańskiego” współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach środków Europejskiego Funduszu Społecznego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET GDAŃSKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

POJĘCIA PODSTAWOWE

Pomiarem nazywamy zespół czynności mający na celu ustalenie wartości liczbowej określonej wielkości fizycznej. Pomiary wielkości fizycznych dzielimy na dwie zasadnicze grupy:

- **pomiary bezpośrednie** – wykonywane za pomocą przyrządu pomiarowego (linijka, termometr, stoper, woltomierz …), gdzie miarę wielkości fizycznej otrzymujemy jako wynik bezpośredniego porównania mierzonej wielkości z wzorcem;
- **pomiary pośrednie** (**pomiary wielkości złożonej**) tj. takie, gdy wartość badanej wielkości fizycznej (z) wyznaczona jest na podstawie pomiarów bezpośrednich innych wielkości fizycznych ($x_1, x_2, ...x_N$), które są z nią związane znanym prawem fizycznym ($z = f(x_1, x_2, ...x_N)$).

Przykład:

Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego (g) za pomocą wahadła matematycznego.

Jak wiadomo, okres drgań wahadła dla małych wychyleń opisuje zależność:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{1}$$

a więc:

$$g(l,T) = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \ . \tag{2}$$

W celu wyznaczenia wartości przyspieszenia ziemskiego bezpośrednio mierzymy długość wahadła (l) oraz jego okres (T).

Jak wynika z codziennego doświadczenia, dokonując pomiaru wielkości fizycznej (niezależnie od tego jak starannie go wykonamy) nigdy nie otrzymujemy dokładnej wartości mierzonej wielkości fizycznej. Ze swej natury wynik pomiaru ma wartość przybliżoną (x_0) a wartość rzeczywista mieści się w przedziale $x_0 \pm \Delta x$. Innymi słowy, każdy pomiar jest obarczony **niepewnością pomiarową**[1] będącą ilościową miarą wątpliwości dotyczącej wartości liczbowej wyniku pomiarowego. Niepewność pomiarową można zmniejszyć stosując dokładniejsze przyrządy pomiarowe oraz lepsze metody, lecz nie można jej całkowicie wyeliminować.

[1] W literaturze spotykany jest również termin „błąd pomiarowy". Zgodnie z normami zawartymi w „*Guide to the expression of uncertainty in measurement*" pojęcie błędu należy zarezerwować tylko do pomyłek eksperymentatora (patrz błędy grube) lub niewłaściwej metody pomiarowej.

KLASYCZNY PODZIAŁ NIEPEWNOŚCI POMIAROWYCH[2]

Niepewności pomiarowe ze względu na sposób, w jaki wpływają na wyniki pomiarów możemy podzielić na:

- **przypadkowe** (**statystyczne**) – niepewności doświadczalne, które mogą być ujawnione poprzez wielokrotne powtarzanie pomiaru. W przypadku, gdy niepewności systematyczne (omówione poniżej) można pominąć, otrzymujemy pewien statystyczny rozrzut wyników wokół wartości rzeczywistej. Istnieją różne przyczyny-źródła rozrzutu statystycznego: natura zjawiska, wpływ czynników zewnętrznych, które mogą ulegać zmianom podczas pomiarów.
- **systematyczne** – związane głównie ze skończoną dokładnością aparatury, wyborem metody pomiaru, a niekiedy z przybliżeniem modeli teoretycznych używanych w analizie. Dominują wtedy, gdy w kolejnych pomiarach uzyskuje się identyczne wyniki (brak statystycznego rozrzutu wyników). Niektórych niepewności systematycznych, w przeciwieństwie do niepewności przypadkowych, możemy uniknąć zaś wpływ innych zminimalizować.
- **błędy grube** (**omyłki**) – powstają one zazwyczaj w wyniku: omyłek w odczytaniu wskazań przyrządów pomiarowych, użycia wadliwie wykonanych przyrządów, niedbałego wykonywania pomiarów, uszkodzeń aparatury pomiarowej. Błędów grubych możemy uniknąć eliminując przyczyny ich występowania.

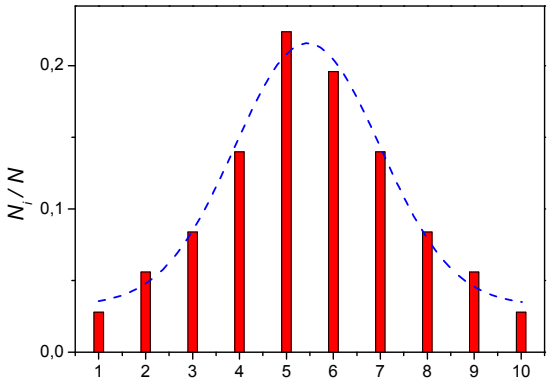
ANALIZA STATYSTYCZNA NIEPEWNOŚCI PRZYPADKOWYCH

Do analizy wyników wykazujących rozrzut statystyczny (przy założeniu, że niepewności systematyczne są zaniedbywalne) stosuje się metody statystyki matematycznej. Wykonując serię N pomiarów tej samej wielkości fizycznej x otrzymujemy ciąg jej wartości $x_1, x_2, ..., x_N$. Częstość występowania wyniku o wartości x_i wyraża stosunek N_i/N, gdzie N_i jest liczbą pomiarów dających wynik x_i, zaś N jest całkowitą liczbą pomiarów (Rys. 1). Przy bardzo dużej liczbie pomiarów ($N \to \infty$) zależność gęstości prawdopodobieństwa od wielkości mierzonej (tj., N_i/N w funkcji x_i) określona jest rozkładem Gaussa zwanym również rozkładem normalnym:

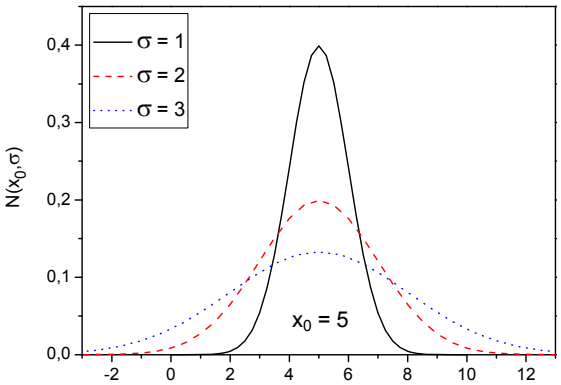
$$\varphi(x) = N(x_0, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2} \right) \tag{3}$$

[2] W niniejszym skrypcie będziemy używali klasycznego podziału niepewności pomiarowych pamiętając również, iż istnieje inna klasyfikacja niepewności pomiarowych, która rozróżnia analizę niepewności wyników pomiarowych opartych ściśle na rozkładzie normalnym (**określenie niepewności metodą typu A**) od innych metod oceny (**określenie niepewności metodą typu B**).

Funkcja rozkładu normalnego jest jednoznacznie określona dwoma parametrami charakteryzującymi mierzony obiekt; x_0 - oznacza wartość oczekiwaną i jest liczbą określającą położenie maksimum krzywej, a σ jest odchyleniem standardowym i charakteryzuje szerokość krzywej dzwonowej (patrz Rys. 2). Niestety z reguły parametrów tych nie znamy a ich wartości przybliżone, zwane estymatorami, obliczamy z próby. Poniżej przedstawiono rozkład Gaussa dla wartości oczekiwanej $x_0 = 5$ oraz $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ i $\sigma = 3$. Z analizy Rys. 2 wynika, iż szerokość krzywej dzwonowej silnie zależy od wartości σ. Im mniejsza wartość parametru σ, tym funkcja jest bardziej "skupiona" wokół wartości oczekiwanej.



Rys. 1
Przykład rozkładu zmiennej losowej skokowej oraz zmiennej losowej ciągłej (rozkład graniczny – rozkład Gaussa)



Rys. 2
Rozkład Gaussa dla wartości oczekiwanej $x_0 = 5$ oraz $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ i $\sigma = 3$

Wielkością najbardziej prawdopodobną (wokół której grupują się wyniki pomiaru) dla skończonej liczby pomiarów jest **<u>średnia arytmetyczna</u>** dana zależnością:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \,, \tag{4}$$

gdzie i jest numerem pomiaru a x_i wynikiem i-tego pomiaru.

Miarą niepewności i-tego wyniku pomiaru jest odchylenie standardowe (σ), którego estymatorem jest **<u>odchylenie standardowe (niepewność standardowa) eksperymentalne</u>**[3] serii pomiarów dane zależnością:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \,. \tag{5}$$

Miarą niepewności wartości średniej $\bar{x}$ jest **<u>odchylenie standardowe (niepewność standardowa) średniej arytmetycznej</u>** serii pomiarów wyrażone zależnością:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \,. \tag{6}$$

[3] W literaturze spotykany jest również termin odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru.

ROZKŁAD GAUSSA – DALSZE ZASTOSOWANIA

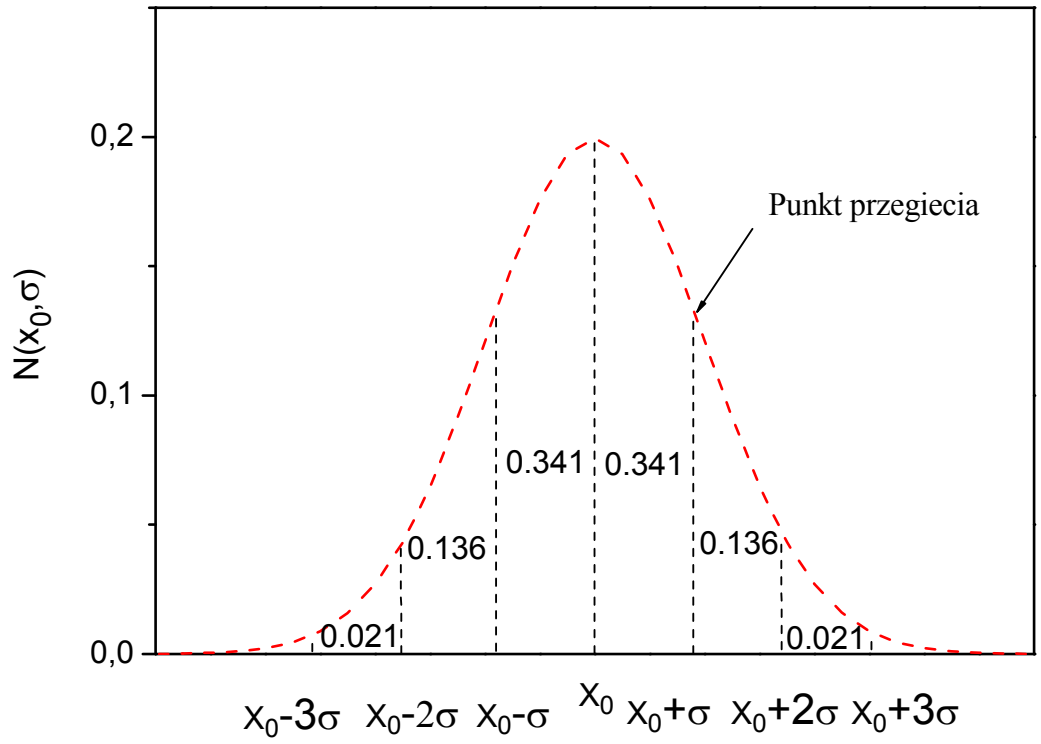
Prawdopodobieństwo tego, że w wyniku pomiaru otrzymamy wartość zawartą w nieskończenie wąskim przedziale między x a $x+dx$ równe jest $dP(x)=\varphi(x)\,dx$. Mając na uwadze powyższy fakt, wyznaczenie prawdopodobieństwa tego, że wynik pomiaru będzie zawarty w dowolnym przedziale $a \le x \le b$ sprowadza się do obliczenia poniższej całki[4]:

$$P(a \le x \le b)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)dx \tag{7}$$

Szczególnie interesujące informacje niesie ze sobą wielkość $P(x_0-\sigma \le x \le x_0+\sigma)$ tzn., prawdopodobieństwo tego, że wynik pomiaru będzie zawarty w przedziale $\langle x_0-\sigma, x_0+\sigma\rangle$. Obliczenie w sposób numeryczny powyższej całki w granicach $x_0-\sigma$, $x_0+\sigma$ daje wynik 0.6827, co oznacza, że jeżeli wykonamy serię N pomiarów to 68.27% wyników będzie zawarte w przedziale $\langle x_0-\sigma, x_0+\sigma\rangle$. Pozostałe 31.73% wyników pomiarów da nam wartości mniejsze niż $x_0-\sigma$ lub większe od $x_0+\sigma$.

Rys. 3 przedstawia przykładową funkcję rozkładu normalnego $\varphi(x)=N(x_0,\sigma)$. W celu ułatwienia analizy, na rysunku zaznaczono również przedziały $\langle x_0-3\sigma, x_0-2\sigma\rangle$,…, $\langle x_0+2\sigma, x_0+3\sigma\rangle$ oraz podano wartości całek dla poszczególnych przedziałów. Innymi słowy, podano prawdopodobieństwa tego, że w wyniku pomiaru wielkości fizycznej x otrzymamy jej wartość w danym przedziale. Jak łatwo zauważyć w przedziale $\langle x_0-3\sigma, x_0+3\sigma\rangle$ są zawarte prawie wszystkie wyniki pomiarów.

[4] Całki tej nie możemy obliczyć analitycznie, można jednak jej wartość obliczyć numerycznie. Warto również przypomnieć w tym miejscu, że obliczenie tej całki równoważne jest znalezieniu wartości pola powierzchni pod krzywą $\varphi(x)$ w przedziale $<a,b>$.



Rys. 3
Przykładowa funkcja rozkładu normalnego $\varphi(x)=N(x_0,\sigma)$ *wraz z wartościami całek dla poszczególnych przedziałów.*

Zgodnie z tym co powiedziano wcześniej, do analizy wyników wykazujących rozrzut statystyczny stosujemy metody statystyki matematycznej, które pozwalają wyznaczyć m.in. wynik końcowy oraz odchylenie standardowe. Dotychczas prowadzone przez nas rozważania dotyczyły wyników bardzo dużej serii pomiarów[5]. W sytuacji, gdy liczba pomiarów jest niewielka ($N \le 30$, a szczególnie, gdy $N \le 10$), wówczas do analizy wyników stosuje się rozkład Studenta. Należy w tym miejscu wspomnieć, że krzywa Studenta jest bardziej „spłaszczona" niż krzywa rozkładu Gaussa. W związku z tym odchylenie standardowe w rozkładzie Studenta jest $t_{N,\alpha}$ razy większe od odchylenia standardowego obliczonego w rozkładzie normalnym.

$$S_{kt} = t_{N,\alpha} S_x . \tag{8}$$

Wartość współczynnika $t_{N,\alpha}$ zależy od liczby pomiarów (N) oraz od przyjętego poziomu ufności $(1-\alpha)$, a jego wartość można znaleźć w Tabeli 1. Poziom ufności $(1-\alpha)$ to prawdopodobieństwo, z jakim wyznaczony przedział $\left\langle \bar{x} - t_{N,\alpha} S_{\bar{x}}, \bar{x} + t_{N,\alpha} S_{\bar{x}} \right\rangle$ zawiera wartość rzeczywistą mierzonej wielkości.

[5] Ze względu na liczbę N wykonanych pomiarów wyróżniamy następujące próby: (1) bardzo mała – $N < 10$, (2) mała – $10 \le N < 30$, (3) duża – $30 \le N < 100$, (4) bardzo duża – $N \ge 100$.

NIEPEWNOŚCI SYSTEMATYCZNE

W przypadku pomiarów, w których nie mamy do czynienia z rozrzutem statystycznym, w celu właściwego określenia **maksymalnej niepewności systematycznej** należy dokonać wstępnej oceny wszystkich typów niepewności systematycznych tj., **działki elementarnej** $\Delta_d x$ (producent na obowiązek zagwarantowania takiej dokładności przyrządu, by wynik pomiaru nie różnił się od wzorca więcej niż o jedną działkę elementarną, równą odstępowi ($\Delta_d x$) sąsiadujących kresek podziałki), **klasy przyrządu** $\Delta_k x$ (dokładność wzorcowania fabrycznego przyrządu zdefiniowana jest jako $\Delta_k x = \frac{klasa \cdot zakres}{100}$) oraz **niepewności eksperymentatora** $\Delta_e x$ (jest to ilościowa ocena niepewności wyniku dokonana przez osobę wykonującą pomiar (np. drgania wskazówki przyrządu analogowego, zła widoczność skali, wahania wskazań przyrządu cyfrowego itp.).

Posiadając informację na temat wszystkich typów niepewności systematycznej możemy wyznaczyć **maksymalną niepewność systematyczną** jako sumę poszczególnych składników:

$$\Delta x = \Delta_d x + \Delta_k x + \Delta_e x \,. \tag{9}$$

Warto również nadmienić, iż dla wyznaczonych niepewności systematycznych $\Delta_d x$ oraz $\Delta_k x$ możemy przyjąć jednostajny (prostokątny) rozkład prawdopodobieństwa, w którym odchylenie standardowe (a tym samym niepewność standardowa) wyraża się wzorami:

$$S_{\bar{x}_d} = \frac{\Delta_d x}{\sqrt{3}},\; S_{\bar{x}_k} = \frac{\Delta_k x}{\sqrt{3}} \,. \tag{10}$$

CAŁKOWITA NIEPEWNOŚĆ POMIAROWA

W przypadku pomiarów bezpośrednich, na **całkowitą niepewność pomiarową** składa się zarówno niepewność wynikająca z rozrzutu (niepewność statystyczna), jak również niepewność systematyczna. Musimy również pamiętać, że w statystyce matematycznej addytywne są wariancje (kwadraty odchyleń standardowych), dlatego też **niepewność standardowa** (**całkowita**) wyraża się następującą zależnością:

$$u(x) = \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + \frac{1}{3}\left(\Delta_d x\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\Delta_k x\right)^2 + \left(\Delta_e x\right)^2} \,. \tag{11}$$

ZAOKRĄGLANIE I ZAPIS WYNIKÓW POMIARÓW ORAZ ICH NIEPEWNOŚCI

Współczesne metody obliczeniowe pozwalają na wyznaczenie miary wielkości fizycznej, jak również wielkości niepewności pomiarowej do dowolnie dalekiego rozwinięcia dziesiętnego. W związku z tym, że wielkość Δx jest wielkością szacowaną, jak również ze względu na fakt, iż zapis wyniku musi ujawniać jego dokładność nie ma potrzeby podawania wszystkich cyfr otrzymanych z obliczeń. Podobnie nie ma sensu podawanie wszystkich cyfr, które otrzymujemy obliczając wartość x_0.

Przy **<u>zaokrąglaniu wyniku pomiaru i niepewności</u>** postępujemy w następujący sposób:

- sprowadzamy wynik pomiaru i niepewność do tych samych jednostek układu SI,
- zaokrąglanie rozpoczynamy od niepewności. Oszacowane niepewności zaokrąglamy zawsze w górę (*w żadnym przypadku nie można zaniżać niepewności!*) do pierwszej cyfry znaczącej. Odstępstwo od powyższej reguły stosujemy, gdy zaokrąglenie do pierwszej cyfry znaczącej powoduje wzrost niepewności większy niż 10%, wtedy niepewność zaokrąglamy do dwóch cyfr znaczących,
- wynik pomiaru zaokrąglamy na tym samym miejscu rozwinięcia dziesiętnego co niepewność. Przy zaokrąglaniu wyniku pomiaru stosujemy powszechnie przyjęte zasady zaokrągleń, tj., liczbę kończącą się cyframi:
  0-4 – zaokrąglamy w dół, tzn., nie zmieniamy cyfry poprzedzającej
  6-9 – zaokrąglamy w górę, tzn., podwyższamy cyfrę poprzedzającą o jeden
  a cyfrę 5 w dół jeżeli poprzedza ją liczba parzysta, zaś w górę gdy poprzedza ją liczba nieparzysta.

Jeżeli przez x_0 oraz Δx oznaczymy odpowiednio: wyznaczoną wielkość miary mierzonej wielkości fizycznej x i wartość maksymalnej niepewności wielkości fizycznej, wówczas poprawny zapis wyniku ma następującą postać:

$$x = \left(x_0 \pm \Delta x\right)\ [jednostka]. \tag{12}$$

W przypadku analizy wyników wykazujących rozrzut statystyczny (przy założeniu, że niepewności systematyczne są zaniedbywalne) stosuje się również powyższe metody zaokrąglania wyników pomiarów oraz ich niepewności. Jako efekt końcowy analizy musimy podać poprawnie zaokrąglony wynik końcowy ($\bar{x}$), jego niepewność (S_x lub $S_{\bar{x}}$) oraz liczbę wykonanych pomiarów (N).

OCENA NIEPEWNOŚCI W POMIARACH POŚREDNICH – REGUŁA PRZENOSZENIA NIEPEWNOŚCI

W przypadku, gdy **wielkość fizyczna złożona** z jest funkcją wielkości $x_1, x_2, ... x_N$ mierzonych bezpośrednio tzn. $z = f(x_1, x_2, ... x_N)$, wówczas wartość średnią wielkości mierzonej pośrednio opisuje zależność:

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ... \bar{x}_N) . \tag{13}$$

Miarą niepewności jest **złożona niepewność standardowa** wyrażona zależnością:

$$S_{\bar{z}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i} \right)^2_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_N} S^2_{\bar{x}_i}} . \tag{14}$$

Wyrażenie to stanowi ilościowe ujęcie tzw. **reguły przenoszenia niepewności**.

W sytuacji, gdy niepewności systematyczne pomiaru wielkości mierzonych bezpośrednio są znacząco większe niż ich największe niepewności przypadkowe lub gdy wielkości te zostały zmierzone tylko jeden raz, tzn., gdy możemy oszacować jedynie ich maksymalne niepewności systematyczne, to niepewność maksymalną wielkości złożonej wyznaczamy z zależności:

$$\Delta z = \sum_{i=1}^{N} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot \Delta x_i \right| . \tag{15}$$

Wyrażenie to stanowi ilościowe ujęcie tzw. **reguły przenoszenia niepewności maksymalnej**. Przedstawiona metoda obliczania niepewności maksymalnej nosi nazwę **metody różniczki zupełnej**.

W przypadku, gdy wielkość złożona z jest funkcją, którą można przedstawić w postaci iloczynu wielkości mierzonych bezpośrednio (x_i, $i = 1,2,..., N$), tzn.,:

$$z = A \prod_{i=1}^{N} x_i^{a_i} \quad , \tag{16}$$

gdzie A oraz a_i są stałymi. Wówczas **niepewność maksymalną względną** możemy wyznaczyć z zależności:

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| = \sum_{i=1}^{N} \left| a_i \frac{\Delta x_i}{x_i} \right| . \tag{17}$$

Ten sposób obliczania niepewności maksymalnej względnej bywa nazywany **metodą pochodnej logarytmicznej**.

REGRESJA LINIOWA

Rozważmy dowolne dwie wielkości fizyczne x i y, o których sądzimy, że są powiązane relacją liniową postaci:

$$y = ax + b \tag{18}$$

Obrazem graficznym zależności jest prosta o współczynniku kierunkowym a, przecinająca oś rzędnych w punkcie b. Wielkości a i b nazywamy **współczynnikami regresji liniowej**. Gdybyśmy zmierzyli N różnych wartości $x_1, x_2, ... x_N$ oraz odpowiadające im wartości $y_1, y_2, ... y_N$ i jeżeli nasze pomiary nie byłyby obarczone niepewnościami, wówczas każdy z punktów x_i, y_i leżałby dokładnie na prostej (18). W praktyce, każdy pomiar obarczony jest niepewnością, co powoduje, że otrzymany zbiór punktów pomiarowych nie leży dokładnie na prostej. Istnieje jednak analityczna metoda (**metoda regresji liniowej**, zwana również **metodą najmniejszych kwadratów**[6]) dopasowania funkcji liniowej do wyników doświadczalnych.

Jeżeli do zbioru punktów x_i, y_i $(i = 1, 2, ..., N)$ zastosujemy metodę najmniejszych kwadratów wówczas współczynniki a i b opisane są następującymi zależnościami[7]:

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \tag{19}$$

$$b = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} y_i - a\sum_{i=1}^{N} x_i\right). \tag{20}$$

[6] Metoda ta swoją nazwę zawdzięcza kryterium jakości dopasowania, tzn., takiego doboru parametrów prostej, by suma kwadratów różnic wartości eksperymentalnej (y) i obliczonej ($ax + b$) była jak najmniejsza.

[7] W przypadku, gdy dowolne dwie wielkości fizyczne x i y są powiązane relacją liniową postaci: $y = ax$ tzn., $b = 0$, wówczas współczynniki a oraz S_a^2 wyznaczamy z zależności:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \quad \text{oraz} \quad S_a^2 = \frac{1}{N-2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i^2}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} - a^2\right),$$

zaś współczynnik korelacji liniowej z zależności:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i^2}}.$$

Ponieważ zmierzone wartości x_i, y_i $(i=1,2,...,N)$ są obarczone niepewnościami przypadkowymi, a współczynniki a i b są funkcjami zależnymi od x_i, y_i, wobec tego wyznaczone wartości a i b będą obarczone niepewnościami, które możemy wyznaczyć z poniższych zależności:

$$S_a = \sqrt{\frac{N\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - a\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - b\sum_{i=1}^{N} y_i\right)}{(N-2)\left(N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right)}} \tag{21}$$

$$S_b = \sqrt{\frac{1}{N} S_a^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2} \tag{22}$$

Stopień zgodności punktów pomiarowych (x_i, y_i) z linią prostą określa parametr zwany współczynnikiem korelacji liniowej r:

$$r = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{\sqrt{\left(N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right)\left(N\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2\right)}} \tag{23}$$

Powyższy parametr może przyjmować wartości z przedziału $\langle -1,1 \rangle$. Im większa jest jego wartość bezwzględna, tym „silniejsza" jest korelacja, czyli tym „ściślej" jest spełniona zależność liniowa.

ŚREDNIA WAŻONA

Bardzo często spotykamy się z problemem pomiarów o niejednakowej precyzji. Jest to związane z faktem, iż niektóre wielkości fizyczne są mierzone wielokrotnie, w różnych laboratoriach lub przy użyciu różnych aparatur pomiarowych. W tej sytuacji jako wynik końcowy serii pomiarów: $x_1, x_2, \ldots, x_N$ obarczonych różnymi niepewnościami przypadkowymi $S_{\bar{x}1}, S_{\bar{x}2}, \ldots, S_{\bar{x}N}$, najbardziej prawdopodobny wynik stanowi **<u>średnia ważona</u>** wyrażona wzorem:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}, \tag{24}$$

gdzie w_i oznacza **<u>wagę statystyczną</u>**, zdefiniowaną zależnością: $w_i = \frac{1}{\left(S_{\bar{x}_i}\right)^2}$.

<u>Odchylenie standardowe średniej ważonej</u> wyraża się wzorem:

$$S_{\bar{x}_w}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_i}. \tag{25}$$

A_1 - Rezonans akustyczny

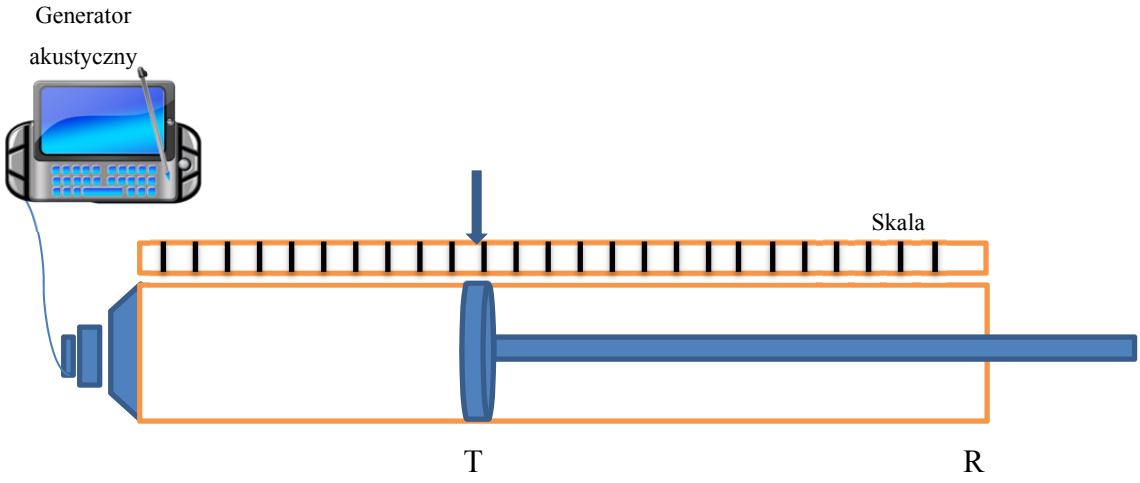
I. **Celem** zadania jest wyznaczenie prędkości dźwięku w powietrzu metodą rezonansu akustycznego.

II. **Materiał do samodzielnego przygotowania:**

Ogólne wiadomości o falach (równanie ruchu falowego, rodzaje fal, fal biegnąca, fala stojąca i jej równanie). Rezonans akustyczny. Zależność prędkości dźwięku od temperatury ośrodka

III. **Przyrządy:**

Aparatura pomiarowa składa się z rury szklanej (R) ograniczonej z jednej strony ruchomym tłokiem (T), a z drugiej głośnikiem, do którego podłączony jest generator akustyczny.



Rys. 1 Układ pomiarowy pozwalający wyznaczyć wartość prędkości dźwięku w powietrzu metodą rezonansu akustycznego.

IV. **Przeprowadzenie pomiarów:**

1. Zanotować temperaturę w pomieszczeniu.
2. Włączyć generator do sieci. Częstotliwość generatora ustawić na wartość 1000 Hz.
3. Wyznaczyć kolejne położenia tłoka, odpowiadające rezonansom na całej długości rury.
4. Powyższe czynności wykonać dla trzech różnych częstotliwości z przedziału 1000 – 3000 Hz.

V. Opracowanie wyników:

1. Obliczyć średnią wartość długości fali dla trzech wybranych częstotliwości ($\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \overline{\lambda_3}$) oraz ich odchylenia standardowe średniej ($S_{\overline{\lambda_1}}$, $S_{\overline{\lambda_2}}$, $S_{\overline{\lambda_3}}$).
2. Wyznaczyć średnią wartość prędkości dźwięku dla każdej częstotliwości ($\overline{V_1}, \overline{V_2}, \overline{V_3}$) oraz ich odchylenia standardowe ($S_{\overline{V_1}}$, $S_{\overline{V_2}}$, $S_{\overline{V_3}}$). Przy obliczaniu wartości $S_{\overline{V}}$ uwzględnić fakt, iż częstotliwość generatora obarczona jest niepewnością systematyczną 1 %, tj. $S_{\bar{f}} = \Delta f \Big/ \sqrt{3}$.
3. Wyznaczyć średnią ważoną prędkości $\overline{V_w}$ oraz jej niepewność.
4. Porównać otrzymaną wartość prędkości z wartością tablicową uwzględniając fakt, iż zależność opisująca prędkość w danej temperaturze przedstawia wyrażenie:

$$V = V_0 \sqrt{1 + \frac{T}{273.15}}$$

Literatura:

1. H. Szydłowski, Pracownia Fizyczna
2. R. Resnick, D. Halliday, Fizyka
3. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki
4. B. Jaworski, A. Dietłaf, Kurs fizyki

A_2 - Wyznaczenie progu słyszalności oraz krzywych izofonicznych

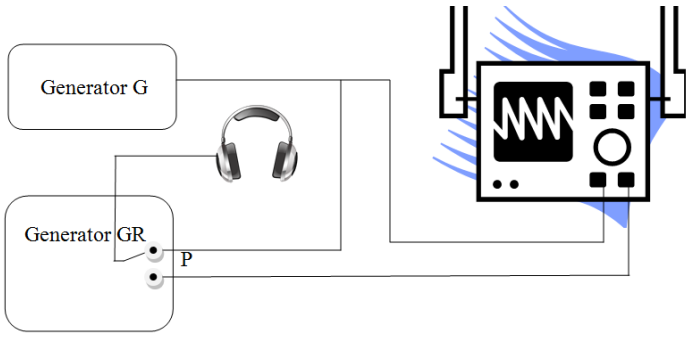
I. **Celem** zadania jest zapoznanie studentów z problematyką rozchodzenia się fali dźwiękowej w ośrodku oraz odbioru fali przez ucho ludzkie, a w szczególności wyznaczenie progu słyszalności ucha ludzkiego oraz krzywych izofonicznych.

II. **Materiał do samodzielnego przygotowania:**

Budowa i zasada działania słuchawki, mikrofonu i oscyloskopu. Podstawowe pojęcia z akustyki (równanie różniczkowe fali, prędkość rozchodzenia się fali w ośrodku sprężystym, tony, dźwięki, szumy). Próg słyszalności. Krzywe izofoniczne. Prawo Webera-Fechnera.

III. **Przyrządy:**

Układ doświadczalny stanowią dwa generatory sygnałów. Generator G wytwarza napięcie sinusoidalne o regulowanej częstotliwości w zakresie od 10 Hz do 20 kHz, zaś generator GR napięcie sinusoidalne o stałej częstotliwości 1 kHz. Napięcia z obu generatorów zasilają słuchawkę. Przełącznik elektroniczny P, wbudowany w generator GR, umożliwia zasilanie jej na przemian z jednego i drugiego generatora (w słuchawce słyszymy na zmianę ton o pewnej częstotliwości (regulowanej - z generatora G) i ton wzorcowy (1000 Hz - z generatora GR)). Możliwa jest regulacja częstości przełączania generatorów za pomocą potencjometru znajdującego się na frontowej ścianie generatora GR. Drugi potencjometr służy do regulacji głośności generatora wzorcowego.



Rys.1 Schemat aparatury do pomiarów krzywych izofonicznych

IV. **Przeprowadzenie pomiarów:**

A. **<u>Wyznaczenie krzywej czułości ucha</u>**

W tej części doświadczenia korzystamy jedynie z generatora G o regulowanej częstotliwości!

1. Nałożyć słuchawki na uszy i wyciszyć zupełnie generator GR.

2. Częstotliwość generatora G ustawić na wartość 1000 Hz. Dla tej częstotliwości ucho ludzkie jest bardzo czułe na wrażenia akustyczne.
3. Wyciszyć generator G. Następnie należy zwiększać stopniowo napięcie z generatora G aż do momentu kiedy przeprowadzający doświadczenie zarejestruje wrażenie akustyczne.
4. Przy tej samej częstotliwości zmniejszać napięcie do momentu gdy badany zgłosi brak wrażenia słuchowego.
5. Napięcie progowe dla danej częstotliwości wyznaczamy jako średnią arytmetyczną z obu pomiarów.
6. Pomiary napięcia progowego należy wykonać dla innych częstotliwości z przedziału od 20 Hz do 17 kHz.

B. <u>Wyznaczanie przebiegu krzywej izofonicznej</u>

W tej części doświadczenia korzystamy zarówno z generatora G o regulowanej częstotliwości jak i generatora wzorcowego GR!

1. Ustawić dowolną głośność generatora GR pomiędzy progiem słyszalności i progiem bólu.
2. Dla tych samych wartości częstotliwości jak w punkcie A, wyznaczyć wartość amplitudy sygnału generatora G, przy której dźwięk słyszany z generatora G jest tak samo głośny jak pochodzący z generatora GR.
3. Pomiary te wykonać dla trzech różnych głośności generatora GR.

V. Opracowanie wyników:

1. Na podstawie otrzymanej wartości napięcia U_0 dla progu słyszalności przy częstotliwości 1000 Hz wyskalować oś rzędnych w dB.
2. Na osi odciętych, w skali logarytmicznej, zaznaczyć wartości częstotliwości w Hz.
3. Wyrysować krzywą czułości ucha.
4. Zaznaczyć niepewności związane z pomiarem napięcia.
5. Wyrysować przebiegi krzywej izofonicznej o danym poziomie głośności.

Literatura:

1. R. Resnick, D. Halliday, Fizyka
2. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki
3. B. Jaworski, A. Dietłaf, Kurs fizyki

H_1 – Pomiar współczynnika lepkości cieczy za pomocą przepływowych lepkościomierzy.

I. Celem zadania jest wyznaczenie współczynnika lepkości cieczy metodą Ostwalda.

II. Materiał do samodzielnego przygotowania:

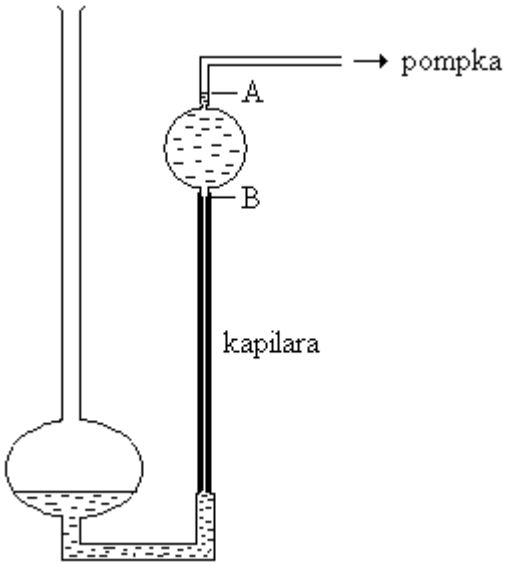
Zasada działania wiskozymetrów kapilarnych. Wyprowadzenie wzoru:

$$\frac{\eta}{\eta_w} = \frac{\rho \cdot t}{\rho_w \cdot t_w} \tag{1}$$

η - lepkość, ρ - gęstość cieczy badanej i wody ρ_w, t – czas przepływu określonej objętości badanej cieczy i wody t_w. Prawa hydrodynamiki. Jednostki lepkości.

III. Przyrządy:

wiskozymetr Ostwalda, woda destylowana, waga, piknometr.



IV. Przeprowadzenie pomiarów:

Uwaga: kontrolować stałość temperatury cieczy, nie dotykać kapilary palcami.

1. Napełnić wiskozymetr wodą destylowaną, tak aby w naczynku C było więcej niż połowa wody przy równowadze cieczy.
2. Podciągnąć przy pomocy pompki poziom wody do poziomu A.
3. Zmierzyć czas spadku objętości cieczy pomiędzy A i B.
4. Pomiaru dokonać 10-cio krotnie.
5. Odmierzyć taką samą objętość badanej cieczy i napełnić nią wiskozymetr.
6. Postąpić jak w p. 3 i 4. Wyniki zapisać w tabelce.
7. Wyznaczyć gęstość badanej cieczy za pomocą piknometru:

- Zważyć pusty piknometr m kilkakrotnie.
- Napełnić wodą destylowaną i zważyć m_w tyle samo razy.
- Napełnić badaną cieczą i zważyć m_c tyle samo razy (np. 5-cio krotnie).

Wyniki zapisać w tabelce.

V. Opracowanie wyników:

1. Wyliczyć średni (z IV.3 i 4) czas spadku przez kapilarę cieczy wzorcowej t_w i cieczy badanej t_c.
2. Wyliczyć z p. IV.6 gęstość badanej cieczy:

   $\rho_c = \frac{m_c - m}{V_p}$; oraz $\rho_w = \frac{m_w - m}{V_p}$ skąd

   $\rho_c = \frac{m_c - m}{m_w - m}$; i jej wartość średnią $\overline{\rho}_c = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(m_i - m)$ oraz jej odchylenie standardowe (z 15 wstępu).
3. Wyliczyć z zależności (1) względny współczynnik lepkości η badanej cieczy oraz jego niepewność metodą różniczki zupełnej.

Literatura:

1. H. Szydłowski, Pracownia Fizyczna, PWN 2003
2. Sz. Szczeniowski, Mechanika i akustyka, PWN Warszawa 1982
3. R. Feynmann, Wykłady z fizyki, tom II
4. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: Podstawy fizyki, T.2, PWN 2005
5. wg zaleceń prowadzącego

H_2 – Zależność współczynnika lepkości od temperatury.

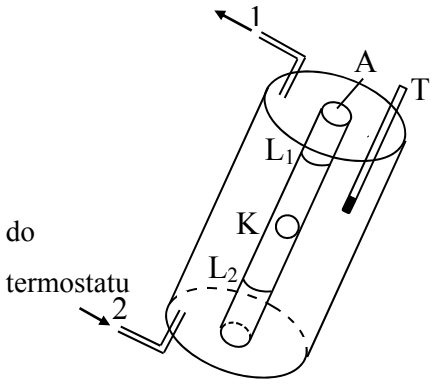
I. Celem zadania jest wyznaczenie wpływu temperatury na zmianę współczynnika lepkości cieczy η oraz z uzyskanych zależności η(T) obliczenie energii aktywacji.

II. Materiał do samodzielnego przygotowania:

Prawa hydrostatyki i hydrodynamiki. Siły działające na kulkę w cieczy. Pojęcie lepkości w ujęciu klasycznym i w oparciu o kinetyczno – molekularną teorię gazów i cieczy (lub w/g zaleceń prowadzącego).

III. Przyrządy:

Wiskozymetr Höplera z wyposażeniem, stoper, ciecz do badania. (Zasadniczym elementem wiskozymetru Höplera (rys. 1) jest kalibrowana lekko pochylona rurka z odpowiednio dobraną kulką zanurzoną w badanej, termostatowanej cieczy.)



Rys. 1 Schemat wiskozymetru Höplera

A – rurka z kulką K

L_1, L_2 – odległość jednostajnego spadku kulki K

T - termometr

1 i 2 – połączenie z termostatem

IV. Przeprowadzenie pomiarów:

1. Włożyć umytą i osuszoną kulkę. Napełnić rurkę A cieczą podaną do badania (gliceryna), zostawić trochę pustej przestrzeni (ciecz się rozszerza ze wzrostem temperatury), dokręcić tulejkę.
2. Sprawdzić szczelność przyrządu i spadek kulki.
3. Ustawić termostat na 20° C i chwilę odczekać. Sprawdzić temperaturę na termometrze T, powinno być 20° C.

4. Dokonać 10-ciu pomiarów czasu spadku kulki na odległości L_1 - L_2 uprzednio zmierzonej, zaznaczonej na wiskozymetrze. Wyniki zapisać w tabelce. Współczynnik lepkości gliceryny $\eta_{20} = 1.5$ [Pas].
5. Podnosić temperaturę co 10° C i mierzyć po 5 razy czasy spadania kulki. Wyniki zapisywać w tabelce, pomiary wykonywać do 80° C.

V. Opracowanie wyników:

1. Obliczyć średni czas spadku (dotyczy p-ktu 4) $\bar{t} = \sum_{i=1}^{10} \frac{t_i}{10}$ oraz odchylenie standardowe średniej $\bar{t}$, $S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (t_i - \bar{t})^2}{n(n-1)}}$.
2. Obliczyć stałą aparaturową C z zależności $\eta_{20} = C \cdot t$ oraz jej standardowe odchylenie średniej.

$$\eta = \frac{2 g r^2 (\rho_k - \rho_c)\, t \cos\alpha}{9 l} = C \cdot t, \qquad C = \frac{\eta_{20}}{t}$$

ρ_k, ρ_c – gęstość kulki i gęstość cieczy, r – promień kulki, t – czas spadania kulki, $l = v \cdot t$ - prędkość i czas spadania kulki

$$S_{\bar{c}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f(C)}{\partial t}\right)^2 S_{\bar{t}}^2} = \sqrt{\frac{\eta^2}{\bar{t}^4} S_{\bar{t}}^2},$$

3. Korzystając z obliczonej stałej aparaturowej C oraz wyników (pkt. 5) obliczyć współczynniki lepkości dla pomierzonych temperatur.
4. Sporządzić wykres zależności $f = \eta_t(t)$ wartości współczynnika lepkości od temperatury.
5. Z zależności:

$$\eta(T) = A(T) \cdot e^{\frac{B}{T}} \qquad (1)$$

gdzie: A – czynnik mało zależny od temperatury w porównaniu z $e^{\frac{B}{T}}$,

$B = \frac{W}{k}$, W – energia aktywacji, k – stała Boltzmanna

Wyliczyć W metodą regresji liniowej. Po zlogarytmowaniu r-nia (1) otrzymuje się r-nie (2):

$$\ln \eta = \ln A + \frac{B}{T} \qquad (2)$$

Następnie przyjmuje się nowe zmienne: $y = \ln\eta$, $x = \frac{1}{T}$, $b = \ln A$, $a = B = \frac{W}{k}$,

$$y = ax + b \qquad (2')$$

6. Wyznaczyć A i W z regresji liniowej oraz ich niepewności, jak też współczynnik korelacji liniowej r. Wyliczyć zależność $\eta(t)$ i wykreślić na poprzednim diagramie (dotyczy pkt. 4).
7. Przeanalizować i przedyskutować oba wykresy.

Literatura:

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: Podstawy fizyki, T.2, PWN 2005
2. A. Dietlaf, B. Jaworski – Kurs fizyki T. 1
3. A.K. Wróblewski, J.A. Zakrzewski – Wstęp do fizyki, T.1, PWN 1976
4. H. Szydłowski – I Pracownia fizyczna, PWN 1975
5. wg zaleceń prowadzącego

H_3 – Pomiar współczynnika lepkości cieczy metodą Stokes'a.

I. Celem zadania jest wyznaczenie gęstości kulek ρ oraz współczynnika lepkości cieczy metoda spadania kulki o znanym promieniu r i gęstości ρ.

II. Materiał do samodzielnego przygotowania:

Zasada działania wagi. Prawa opisujące ciecz w stanie równowagi. Ciecz idealna i rzeczywista. Ruch laminarny i turbulentny oraz warunki laminarności. Prawa hydrodynamiki. Lepkość i jej jednostki. Siły działające na kulkę spadającą w cieczy.

Wyprowadzić wzory na zależności:

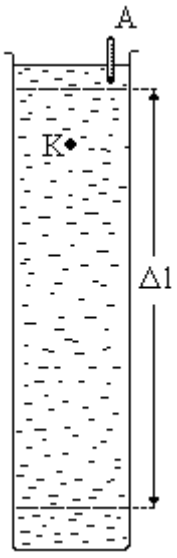
$$n = \frac{\ln r \frac{r_1^2 t_1}{r_2^2 t_2}}{\ln \frac{R - r_2}{R - r_1}} \tag{1}$$

$$\eta = \frac{\frac{2}{9} g r^2 (\rho - \rho_c) t}{\Delta l} \tag{2}$$

$$\eta = \frac{2[\rho - \rho_c] g r^2 t [1 - r/R]^n}{9 \Delta l} \tag{3}$$

III. Przyrządy:

Naczynie w kształcie walca o promieniu R wypełnione badaną cieczą. Kulki o dwu różnych promieniach r_1 i r_2 oraz jednakowej gęstości ρ. Waga analityczna, stoper, suwmiarka, śruba mikrometryczna, przymiar liniowy, areometr.



A - areometr

Δl – wybrana odległość do mierzenia czasu spadku kulek

K – spadająca kulka

IV. Przeprowadzenie pomiarów:

1. Odczytać temperaturę w pomieszczeniu (równa się temperaturze cieczy T).
2. Wybrać po pięć kulek dużych i małych. Zważyć wszystkie małe – masa m i duże – masa M.
3. Zmierzyć śrubą mikrometryczną średnice $2r_1$ i $2r_2$ kulek małych i dużych.
4. Zwilżyć kulki badanym płynem, wrzucać po kolei przez lejek poszczególne kulki i mierzyć stoperem czas spadku t_i na obranej odległości Δl.
5. Zmierzyć suwmiarką średnicę naczynia 2R.
6. Zmierzyć odległość Δl.
7. Odczytać z aerometru gęstość cieczy.

V. Opracowanie wyników:

1. Obliczyć masę średnią pojedynczej kulki $\overline{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ oraz $\overline{M} = \frac{\sum_{i=1}^{5} M_i}{5}$.
2. Obliczyć średnia arytmetyczną średnicy kulek małych $2\bar{r}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{5} 2r_{1i}}{5}$ i dużych $2\bar{r}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} 2r_{2i}}{5}$ oraz ich odchylenie standardowe średniej (wstęp – r-nie 6).
3. Obliczyć gęstość kulek $\rho_1 = \frac{\overline{m}}{V_1}$ i $\rho_2 = \frac{\overline{m}}{V_2}$ (gęstości powinny być jednakowe) i ich niepewności.
4. Obliczyć wartość średnią czasu spadku kulek t_1 i t_2 na odcinku Δl.
5. Wyznaczyć z zależności (1) wykładnik n (czynnik korygujący wpływ siły hamującej na spadek kulek) oraz jego niepewność metodą różniczki zupełnej $\Delta n = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|$ (zal. 15 ze wstępu).
6. Obliczyć w/g zależności (2) współczynnik lepkości dla dużych i małych kulek oraz niepewność współczynnika lepkości dla jednego rodzaju kulek metodą różniczki zupełnej (jak w pkt. 5).
7. Obliczyć współczynnik lepkości dla dużych i małych kulek z zależności (3).
8. Porównaj i przeanalizuj wartości współczynników lepkości wyliczonych z p-ktu 7 i 6.

Literatura:

1. M. Skorko, Fizyka, PWN 1982
2. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: Podstawy fizyki, T.2, PWN 2005
3. Cz. Bobrowski: Fizyka – krótki kurs, WNT 1998, rozdz. 1.10
4. Sz. Szczeniowski: Mechanika i akustyka, PWN W-wa 1972
5. H. Szydłowski: I Pracownia fizyczna, PWN 2003
6. wg zaleceń prowadzącego

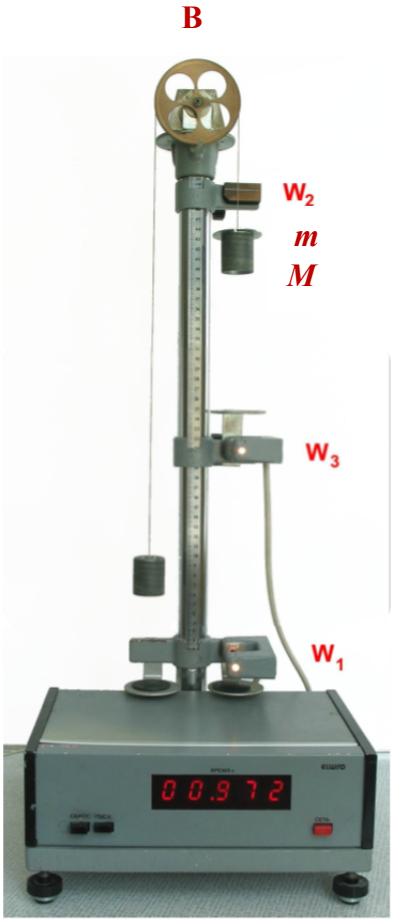
M_1 - Pomiar przyspieszenia ziemskiego przy pomocy spadkownicy Atwood'a

I. **Celem** zadania jest wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego (oraz jego niepewności) za pomocą przyrządu (spadkownicy) Atwood'a tj. układu pary ciężarków zawieszonych na bloczku.

II. **Materiał do samodzielnego przygotowania:**

Kinematyka punktu materialnego (ruch jednostajny i jednostajnie zmienny). Zasady dynamiki dla punktu materialnego i bryły sztywnej. Wyprowadzenie zależności pozwalającej wyznaczyć wartość przyspieszenia ziemskiego, przy założeniu, że siła tarcia, masa krążka i nici są pomijalnie małe, a nić nierozciągliwa: $g = \frac{2M+m}{m}\frac{s^2}{2lt^2}$, gdzie M - masa dużego ciężarka, m - masa dodatkowego ciężarka, s - droga w ruchu jednostajnym, t - czas ruchu ciężarka na drodze s

III. **Przyrządy:**



Spadkownica Atwood'a jest układem składającym się z bloczka (B) o bardzo małym współczynniku tarcia, dwóch ciężarków o jednakowych masach (M), zawieszonych na nici przerzuconej przez bloczek, elektromagnesu, który utrzymuje ciężarek w dowolnym położeniu, dodatkowego ciężarka (m) oraz pierścienia służącego do zatrzymania dodatkowego ciężarka.

Rys. 1 Spadkownica Atwood'a

IV. Przeprowadzenie pomiarów:

1. Zważyć ciężarki (M) oraz trzy różne obciążniki (m_1, m_2, m_3).
2. Włączyć przycisk „Sieć" przyrządu Atwood'a.
3. Ustawić wsporniki W_1 i W_2 w skrajnych położeniach, zaś wspornik W_3 w środkowej części kolumny.
4. Umieścić ciężarek (M) wraz z dodatkowym pierścieniem obciążającym (m) w położeniu górnym (por. rys.).
5. Wyzerować milisekundomierz. Nacisnąć klawisz „Start".
6. Odczytać zmierzoną wartość czasu ruchu ciężarka (M) na drodze s pomiędzy wspornikami W_3 i W_1.
7. Pomiar powtórzyć pięciokrotnie.
8. Zmieniać położenia wspornika W_3, powtarzając pomiary dla pięciu różnych wartości s.
9. Powyższe czynności wykonać dla trzech różnych pierścieni obciążających.

V. Opracowanie wyników:

1. Obliczyć średnią wartość przyspieszenia ziemskiego oraz odchylenie standardowe średniej.

Literatura:

1. R. Resnick, D. Halliday, Fizyka
2. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki
3. B. Jaworski, A. Dietłaf, Kurs fizyki

M_2 – Wahadło rewersyjne

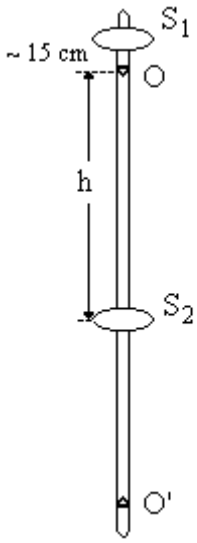
I. Celem zadania jest wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego przy pomocy wahadła rewersyjnego.

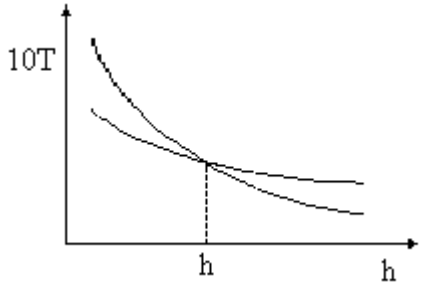
II. Materiał do samodzielnego przygotowania:

Bryła sztywna i wielkości ją opisujące: moment bezwładności, moment siły, twierdzenie Steinera, prawa dynamiki dla ruchu obrotowego, ruch harmoniczny, równanie oscylatora. Wahadło matematyczne i fizyczne, długość zredukowana. Natężenie pola grawitacyjnego (g) dla różnych szerokości geograficznych.

III. Przyrządy:

wahadło rewersyjne, przymiar liniowy, stoper, S_1, S_2 – metalowe dyski, O i O' – pryzmaty służące do zawieszenia wahadła.





IV. Przeprowadzenie pomiarów:

1. Zmierzyć dziesięciokrotnie odległość między punktami O i O' zawieszenia wahadła l_i.
2. Zamocować dysk S_1 (jeśli nie jest zamocowany) w odległości około 15 cm od osi obrotu O, oraz dysk S_2 w najmniejszej możliwej odległości (h) od niej (np.: 10 cm).
3. Wychylić pręt o mały kąt z położenia równowagi i pomierzyć czas trwania dziesięciu drgań T wokół punktu O.
4. Zawiesić wahadło na ostrzu O' i dla tego samego położenia obu dysków pomierzyć czas trwania dziesięciu drgań T'. Wyniki zapisywać w tabelce.
5. Z pomierzonych czasów jednocześnie sporządzać wykres zależności 10 T i 10 T' w funkcji odległości h. Znaleźć punkt przecięcia się krzywych.

6. Odsuwać dysk S_2 od osi O o 5 cm i mierzyć czas dziesięciu wahnięć wokół obu osi tj. O i O'.
7. Wokół tej wartości h zmieniając odległość co 1 cm w zakresie ± 5 cm dokonać pomiaru jak w punkcie 3 i 4 (cel – dokładne wyznaczenie odległości h).
8. Dla wartości h pomierzyć trzykrotnie czas 50-ciu wahnięć dla zawieszenia O i O'.

V. Opracowanie wyników:

1. Wyliczyć okresy drgań oraz odchylenie standardowe średniej $S_{\bar{T}}$ i $S_{\bar{l}}$.
2. Wyznaczyć przyspieszenie ziemskie z zależności $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ l – długość wahadła zredukowanego, T – okres drgań. Obliczyć błąd maksymalny metodą różniczki zupełnej [wstęp, wzór (15)] lub niepewność standardową funkcji złożonej [wstęp, wzór (14)]. Zapisać wynik: $\bar{g} =$, $S_{\bar{g}} =$, N =
3. Wyniki porównać z wartością tablicową i skomentować.

Literatura:

1. M. Skorko: Fizyka, PWN 1982
2. J. Orear: Fizyka T.1, WNT Warszawa 1993
3. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: Podstawy fizyki T.2, PWN 2005
4. H. Szydłowski – I Pracownia fizyczna
5. wg zaleceń prowadzącego

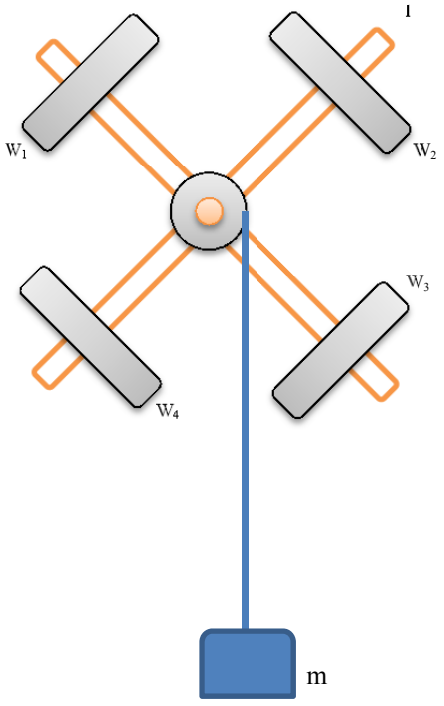
M_3 - Wyznaczanie momentu bezwładności bryły sztywnej – wahadło Oberbeck'a

I. **Celem** zadania jest zastosowanie wahadła Oberbeck'a (krzyżowego) do badania ruchu obrotowego bryły sztywnej, a w szczególności wyznaczenie momentu bezwładności urządzenia eksperymentalnie (z praw ruchu) oraz na podstawie pomiarów rozmiarów geometrycznych poszczególnych elementów przyrządu.

II. **Materiał do samodzielnego przygotowania:**

Prawa dynamiki ruchu obrotowego bryły sztywnej, obliczanie momentów bezwładności brył sztywnych obracających się wokół ustalonej osi, twierdzenie Steinera, wyprowadzenie zależności na przyspieszenie liniowe ciężarka wprawiającego w ruch wahadło Oberbeck'a.

III. **Przyrządy:**



Wahadło Oberbeck'a składa się z dwóch skrzyżowanych prętów (prostokątny, równoramienny krzyżak), które mogą się obracać wokół osi przechodzącej przez punkt przecięcia ramion i prostopadłej do płaszczyzny przez nie wytworzonej. Na prętach (l) tworzących ramiona krzyżaka umocowane są jednakowe walce (w_i), które można przesuwać wzdłuż prętów.

Rys. 1 Wahadło Oberbeck'a

IV. Przeprowadzenie pomiarów:

A. Wyznaczenie momentu bezwładności na podstawie rozmiarów geometrycznych ciała.

1. Dokonać pomiaru wymiarów geometrycznych wszystkich elementów wahadła niezbędnych do wyznaczenia momentu bezwładności przyrządu.

B. Wyznaczenie wartości sił oporów ruchu.

2. Na prętach (l) tworzących ramiona krzyżaka zamocować cztery walce w równej odległości od osi obrotu.
3. Dobrać obciążnik (m), w taki sposób aby ruch wahadła był ruchem zmiennym. Wyznaczyć masę ciężarka (m).
4. Przy zawieszonym ciężarku (m), nawinąć nić na bloczek zwracając szczególną uwagę aby nić była nawinięta w jednej warstwie.
5. Wyznaczyć wysokość H, z jakiej ciężarek zaczął opadać oraz wysokość h, na którą ciężarek wzniósł się ponownie.
6. W celu sprawdzenia czy siła tarcia zależy od momentu bezwładności wahadła czynności (2-5) wykonać dla trzech różnych położeń walców.

C. Wyznaczenie momentu bezwładności z praw ruchu.

7. Dobrać obciążnik (m), w taki sposób aby poruszał się on ruchem jednostajnie przyspieszonym przy ustalonym (znanym) położeniu czterech ruchomych walców krzyżaka.
8. Zmierzyć promień osi walca (r), na której nawinięta jest nić.
9. W celu wyznaczenia wartości przyspieszenia, z jakim porusza się obciążnik, zmierzyć czas opadania tego samego obciążnika z czterech różnych wysokości h ($h = at^2/2$).
10. W celu wyznaczenia wartości stałego momentu bezwładności (I_0) bez uwzględniania zmiennego momentu bezwładności czterech ruchomych krążków, zmierzyć czas spadania tego samego obciążnika (m) ze stałej wysokości (h) przy sześciu różnych odległościach walców (w_i) od osi obrotu.

V. Opracowanie wyników:

1. Wyznaczyć wartość momentu bezwładności wahadła Oberbeck'a na podstawie rozmiarów geometrycznych ciała oraz jego niepewność maksymalną metodą różniczki zupełnej. Przyjąć, że gęstość materiału, z którego wykonany jest krzyżak wynosi 2.72 g/cm^3.

2. Wyznaczyć wartość wypadkowej sił oporów ruchu z zależności $T = mg\dfrac{H-h}{H+h}$ oraz oszacować jej niepewność. Sprawdzić czy siła tarcia zależy od momentu bezwładności ciała.
3. W celu wyznaczenia wartości stałego momentu bezwładności (I_0) (bez uwzględniania zmiennego momentu bezwładności czterech ruchomych krążków) oraz jego niepewności, zlinearyzować równanie:

$$t^2 = \frac{2h\left(\frac{I}{r}+mr\right)}{mgr-Tr}$$, gdzie $I = I_0 + 4d^2 m_w$, m_w - masa ruchomego walca

Literatura:

1. R. Resnick, D. Halliday, Fizyka
2. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki
3. B. Jaworski, A. Dietłaf, Kurs fizyki

Q_1 – Wyznaczanie stosunku $\kappa = C_p / C_v$

I. Celem zadania jest wyznaczenie stosunku ciepła właściwego molowego powietrza przy stałym ciśnieniem c_p do ciepła właściwego molowego przy stałej objętości c_v. Wielkość tę należy wyznaczyć w oparciu o prawa kinetyczno molekularnej teorii gazu i obserwowane przy tym przemiany gazowe (izotermiczna, adiabatyczna i izochoryczna).

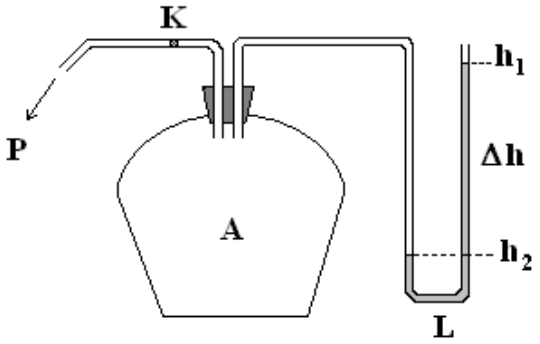
II. Materiał do samodzielnego przygotowania:

Podstawowe równanie kinetyczno-molekularnej teorii gazów. Przemiany stanu gazów doskonałych, przedstawianie – graficzne na wykresach (pV), (pT), (VT). Definicje ciepła właściwego c_w oraz ciepła właściwego molowego c_p, c_v w oparciu o I zasadę termodynamiki i kinetyczno-molekularną teorię gazu. Zasada działania barometru.

III. Przyrządy:

naczynie posrebrzane (A) uszczelniane korkiem połączone z manometrem wodnym (L) oraz z pompką (P) poprzez kran (K).

Rysunek:



A – butla posrebrzana o pojemności około 30 l wypełniona powietrzem

L – manometr wodny

P – połączenie z pompką P poprzez kran K służący do wymiany powietrza w butli z otoczeniem

IV. Przeprowadzenie pomiarów:

1. Zrównoważyć poziom wody w obu ramionach manometru przy otwartym kranie K (wyrównanie ciśnienia w butli do p_0 – ciśnienia atmosferycznego).
2. Połączyć butlę z pompką P przy otwartym kranie K.
3. Kilkoma (np.: 5-krotne) uciskami na pompkę wpompować pewną ilość powietrza do butli doprowadzając do znacznej różnicy poziomów (ponad 60 cm) na manometrze (przemiana adiabatyczna – podnosi się temperaturę gazu w butli) i odciąć butlę kranem K.
4. Odczekać chwilę do czasu wyrównania się temperatury t w butli z otoczeniem t_0 o czym świadczy ustalona różnica poziomów na manometrze $\Delta h = h_1 - h_2$ (parametry opisujące stan gazu w butli po wtłoczeniu: $t = t_0$ – temperatura otoczenia, $p = p_0 + \Delta h$, a objętość właściwa V). Odczytać $\Delta h = h_1 - h_2$ i zapisać.

5. Odłączyć pompkę P, otworzyć kran K na kilka sekund (do czasu wyrównania się poziomów w rurkach manometru – przemiana adiabatyczna), (parametry opisujące stan gazu po otwarciu kranu: $t = t_0 - x$, $p = p_0$, $V = V'$).
6. Zamknąć kran K i odczekać do wyrównania się temperatury z otoczeniem co objawia się ustaleniem się różnicy poziomów $\Delta h' = h_1' - h_2'$ (przemiana izochoryczna – parametry opisujące stan gazu po ustaleniu się różnicy poziomów $\Delta h'$, $t = t_0$, $p = p_0 + \Delta h'$, $V = V'$). Odczytać różnicę poziomów $\Delta h' = h_1' - h_2'$ i zapisać w tabelce.
7. Pomiary wykonać dziesięciokrotnie.

V. Opracowanie wyników:

1. Przeliczyć wartość ciśnienia atmosferycznego p_0 na milimetry słupa wody h (korzystamy z zależności $p_i = \rho_i \cdot g \cdot h_i$, 1mmHg = 133,9 Pa, 1mm$H_2O$ = 9,8066 Pa)
2. Przedstawić graficznie zachodzące w butli procesy (dla 2 pomiarów) termodynamiczne (adiabatyczna, izochoryczna, izotermiczna, adiabatyczna, izochoryczna) na wykresie (pV).
3. Wyliczyć stałą gazową $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ z zależności:

$$\kappa = \frac{\Delta h}{\Delta h - \Delta h'} \qquad \text{lub}$$

$$\kappa = \frac{\ln \frac{h}{\Delta h}}{\ln \frac{\Delta h}{\Delta h'}} \qquad \kappa = \frac{\ln \frac{h}{h + \Delta h}}{\ln \frac{h + \Delta h}{h + \Delta h'}}$$

dla każdego pomiaru (gdyż za każdym razem wpompowuje się inną ilość gazu). Obliczyć wartość średnią κ oraz jej odchylenie standardowe.

4. Obliczyć maksymalny błąd metodą różniczki zupełnej dla 2 wybranych pomiarów.
5. Porównać uzyskaną wartość κ z wartością teoretyczną dla molekuł dwuatomowych $\kappa = \frac{7}{5}$.

Literatura:

1. H. Szydłowski, Pracownia fizyczna wspomagana komputerem, PWN 2003
2. Halliday, R. Resnik, J. Walker, Podstawy fizyki, T.2, PWN 2005
3. A.K. Wróblewski, J.A. Zakrzewski, Wstęp do Fizyki
4. Egbert Boeker, Rienk van Grondelle, Fizyka Środowiska, PWN 2002
5. Cz. Bobrowski, Fizyka, WNT 1998
6. wg zaleceń prowadzącego

Q_2 – Termometr gazowy

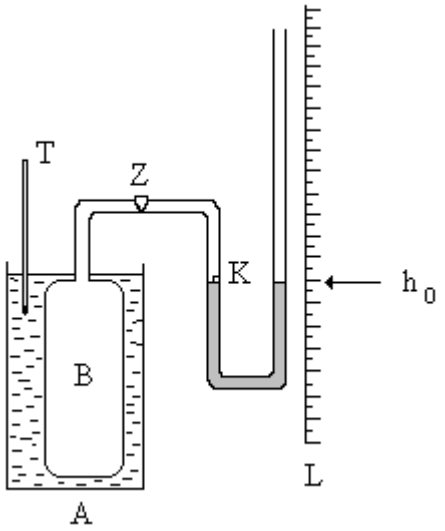
I. Celem zadania jest wyznaczenie współczynnika prężności powietrza.

II. Materiał do samodzielnego przygotowania:

podstawowe równanie i kinetyczno-molekularna teoria gazów. Przemiany gazowe oraz zależności z nich wynikające. Związek energii kinetycznej z temperaturą bezwzględną. Różne rodzaje termometrów i ich cechowanie.

III. Przyrządy:

palnik gazowy, naczynko do wody z lodem, termometr cieczowy, termometr gazowy.



B – naczynie ze stałą objętością gazu
A – naczynko do ogrzewania gazu B
T – termometr
Z – kran
K – kolec
L - linijka

IV. Przeprowadzenie pomiarów:

1. Odczytać i zapisać ciśnienie atmosferyczne p_a na barometrze w pracowni.
2. Umieścić baniaczek B w naczyniu A. Naczynie to napełnić uprzednio drobno rozbitym lodem, starać się doprowadzić temperaturę do bliskiej 0°C (baniaczek musi być całkowicie zanurzony w wodzie)
3. Odczytać temperaturę. Doprowadzić poziom rtęci w lewym ramieniu do zetknięcia z kolcem K. Odciąć zawór Z od otoczenia.
4. Odczytać poziom rtęci w prawym ramieniu manometru (h_0).
5. Zmieniać temperaturę w baniaczku (B) poprzez podgrzewanie wody w naczyniu A. Temperaturę odczytywać co 5°C na termometrze T aż do uzyskania temperatury wrzenia T = 100 °C.

6. Dla każdego odczytu temperatury należy doprowadzić, poprzez podnoszenie prawego ramienia manometru, do zetknięcia kolca K z rtęcią. Odczytać wskazania manometru w prawym ramieniu i tak dla każdej temperatury t_i i h_i .
7. Obliczyć ciśnienie powietrza w zbiorniku dla każdej zmierzonej temperatury wg zależności:

   $p_i = p_a + (h_i - h_0)$, (p_a – odczytane w mmHg)

   i wyniki zapisać w tabelce.

V. Opracowanie wyników:

4. Przedstawić graficznie zależność p_i od t_i .
5. Wykorzystując prawo gazowe Charlesa wyliczyć współczynnik prężności termicznej powietrza α:

   $p_i(t) = p_a(1 + \alpha t)$; $p_i(t) = p_a + p_a \alpha t_i$, gdzie: $y = p_i(t)$, $a = \alpha$, $x = p_a t$, $b = p_a$

   z regresji liniowej [patrz wstęp (19) – (23)] oraz odchylenie standardowe S_a i współczynnik korelacji liniowej r.
6. Wynik porównać z wartością z Tablic i przedyskutować.

Literatura:

1. S. Szczeniowski, Fizyka Doświadczalna, część II
2. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki, T.2, PWN 2005
3. J. Orear, Fizyka, T.1, WNT 1993
4. Cz. Bobrowski, Fizyka, WNT 1998
5. wg zaleceń prowadzącego

Q_3 – Wyznaczanie rozszerzalności liniowej ciał stałych.

I. Celem zadania jest wyznaczenie współczynnika rozszerzalności liniowej różnych rodzajów metali i stopów oraz wykazanie jego zależności od temperatury $\alpha = f(T)$.

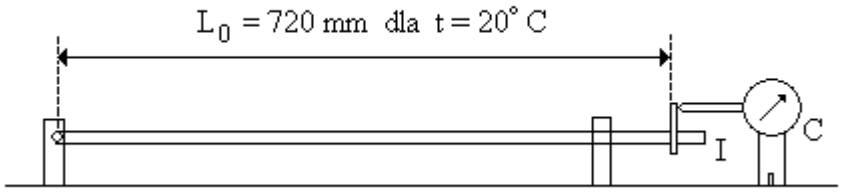
II. Materiał do samodzielnego przygotowania:

Podstawy kinetyczno-molekularnej budowy ciał. Przemiany gazowe. Wpływ temperatury na wymiary ciał. Różne rodzaje rozszerzalności ciał oraz ich współczynniki. Podstawy teorii liniowej rozszerzalności ciał stałych. Zasada działania termometru. Umiejętność posługiwania się termostatem.

III. Przyrządy:

Komplet czterech rurek metalowych, zamocowanych w specjalnych termostatowanych uchwytach (I, II, III, IV). Czujniki mikrometryczne(C), termometr elektroniczny cyfrowy, ultratermostat.

Układ pomiarowy:



IV. Przeprowadzenie pomiarów:

1. Zapoznać się z układem pomiarowym.
2. Przeczytać instrukcję obsługi ultratermostatu (umieszczona na czołowej stronie przyrządu) oraz zapoznać się z działaniem i odczytem temperatury z termometru elektronicznego.
3. Przygotować tabelkę do zapisywania wyników pomiaru.
4. Włączyć ultratermostat na zakres 20 - 85°C, wyzerować czujniki mikrometryczne przy temperaturze t = 20°C (dla tej temperatury przyjąć $L_0 = 720$ mm).
5. Co 5°C odczytywać i zapisywać przyrosty długości ΔL dla każdej z rurek. (jeden pełny obrót na czujniku wynosi 1 mm).
6. Po zakończonym pomiarze schłodzić rurki do t = 20°C i pomiary powtórzyć.

V. Opracowanie wyników:

1. Wykreślić zależność względnych przyrostów długości $\frac{\Delta L_i}{L_0}$ w funkcji temperatury t_i dla każdej rurki oddzielnie.
2. Przeanalizować wykresy: a) zależność liniowa, b) brak liniowości.
3. Dla przypadku a) skorzystać z regresji liniowej r-nia $\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha \Delta t$, gdzie
   a. $y = \frac{\Delta L}{L_0}$, $a = \alpha$, $x = \Delta t$, i obliczyć $\alpha = a$, oraz odchylenie standardowe dla a – S_a i współczynnik korelacji liniowej r w/g wzorów podanych we wstępie [(19) – (23)].
   b. Dla przypadku b) wyliczyć błąd maksymalny (wg wzoru podanego we wstępie (15)) dla kilku wybranych temperatur.
4. Uzyskane wyniki porównać z wartościami tablicowymi podanymi dla różnych materiałów i przedyskutować.

Literatura:

1. S. Szczeniowski: Fizyka doświadczalna, cz.II, Ciepło i fizyka drobinowa, PWN
2. M. Skorko, Fizyka, PWN, 1982
3. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki, T.2, PWN 2005
4. J. Orear, Fizyka, T.1, WNT 1993
5. wg zaleceń prowadzącego

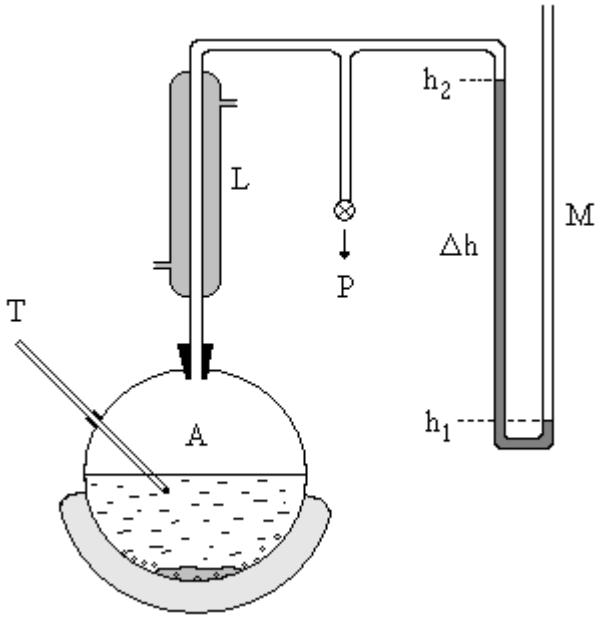
Q_4 – Zależność temperatury zmiany fazy od ciśnienia.

I. **Celem zadania** jest wyznaczenie zależności temperatury wrzenia wody od ciśnienia pary nasyconej na powierzchnię swobodną cieczy, dla ciśnień niższych od ciśnienia atmosferycznego.

II. **Materiał do samodzielnego przygotowania:**

Praca i ciepło w termodynamice. Zasady termodynamiki oraz cykl Carnote'a. Przemiany fazowe, ciepło parowania, wrzenia, topnienia. (zależność Clausiusa-Clapeyrona). Zasada działania barometru.

III. **Przyrządy**: kolba szklana (A) w płaszczu termicznym podgrzewana z autotransformatora z termometrem (T) połączona z manometrem rtęciowym (M); pompka wodna (P), barometr rtęciowy.



IV. Przeprowadzenie pomiarów:

1. Sprawdzić połączenie manometru z kolbą i pompką wodną oraz ustawienie kolby i chłodnicy tak, by skraplana woda wracała do kolby A.
2. Podłączyć chłodnicę L poprzez odkręcenie kranu doprowadzającego do niej wodę.
3. Połączyć kolbę A z pompką wodną P i maksymalnie odpompować powietrze obserwując jednocześnie czy ciecz nie zaczyna wrzeć w kolbie.
4. Zakręcić kran przy minimalnym ciśnieniu i doprowadzić ciecz do wrzenia przez podgrzanie (jeśli nie udało się uzyskać tego zjawiska wcześniej). Wyłączyć pompkę wodną.

5. Odczytać temperaturę na termometrze w kolbie a oraz różnicę poziomów rtęci na ramionach manometru $\Delta h = h_2 - h_1$. Wynik zapisać w tabelce.
6. Wpuścić powietrze do kolby poprzez delikatne odkręcenie kranu. Zmniejszenie różnicy poziomów w ramionach manometru np. ~ 2-3 cm słupa Hg. Dokonać odczytu dla 10 różnie wybranych ciśnień poprzez dopuszczanie powietrza, a ostatni pomiar wykonać dla temperatury T = 100°C i ciśnienia (p) = ciśnieniu atmosferycznemu p_a (jednakowy poziom rtęci w obu ramionach manometru).
7. Odczytać na barometrze ciśnienie atmosferyczne $p_a = h_0$.

V. Opracowanie wyników pomiaru.

1. Obliczyć wartości pomierzonych temperatur wrzenia $T_i = t_i°C + 273$ K oraz ciśnienia $p_i = \rho g(h_0 - \Delta h_i)$.

   W celu przeliczania jednostek z [mmHg] na [hPa] należy obliczyć ciśnienie wywierane przez słupek rtęci o wysokości 1 [mm].

   Ciśnienie hydrostatyczne obliczamy ze wzoru: $p_h = h \cdot \rho \cdot g$ gdzie:

   h – wysokość słupka rtęci ($1[mm] = 1 \cdot 10^{-3}[m]$)

   ρ – gęstość rtęci ($13{,}55 \cdot 10^3$ [kg/m^3])

   g – przyspieszenie ziemskie (9,81 [m/s^2])

   $p_h = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 13{,}55 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 = 132{,}9$

   Więc 1 [mmHg] = 132,9 [Pa] = 1,329 [hPa]
2. Sporządzić krzywą zależności temperatury wrzenia T_i od uzyskanego ciśnienia pary nasyconej p_i. Zaznaczyć na niej niepewności pomiarowe.
3. Obliczyć ciepło parowania (r) korzystając z zależności Clausiussa-Claperyrona

$$\ln \frac{p_i}{p_a} = \frac{r}{R}\left[\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_i}\right] \qquad (1)$$

   metodą regresji linowej poprzez linearyzację r-nia (1) do postaci y = ax, gdzie

$$y = \ln \frac{p_i}{p_a}, \quad x = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_i}\right)\frac{1}{R}, \quad a = r$$

   Wyznaczyć a = r, odchylenie standardowe S_a. oraz współczynnik korelacji liniowej r [patrz wstęp, wzory 19 – 23]. Porównać otrzymany wynik z wartością tablicową.

Literatura:

1. Wróblewski, Zakrzewski, Wstęp do fizyki
2. B. Jaworski, A. Dietłaf, Kurs fizyki T1, PWN 1979
3. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: Podstawy fizyki, T.2, PWN 2005
4. wg zaleceń prowadzącego