Spis treści

Rozdział 1. Elementy logiki matematycznej 7
1.1. Zdanie logiczne 7
1.2. Funktory zdaniotwórcze 8
1.2.1. Negacja 9
1.2.2. Koniunkcja 10
1.2.3. Alternatywa 11
1.2.4. Implikacja 13
1.2.5. Równoważność 15
1.2.6. Alternatywa wykluczająca 17
1.2.7. Określanie wartości logicznej zdań złożonych 18
1.3. Prawa rachunku zdań 20
1.4. Funkcje zdaniowe 22

Rozdział 2. Elementy teorii zbiorów 27
2.1. Pojęcia pierwotne i aksjomaty 27
2.2. Uwagi o aksjomatach teorii zbiorów 29
2.3. Działania na zbiorach 31
2.3.1. Suma zbiorów 31
2.4. Iloczyn kartezjański 32
2.4.1. Przypadek dwóch zbiorów 33
2.4.2. Przypadek trzech zbiorów 36
2.4.3. Przypadek dowolnej skończonej ilości zbiorów 38

Rozdział 3. Relacje i funkcje 41
3.1. Relacje 41
3.1.1. Relacje typu równoważności 45
3.2. Funkcje 50
3.2.1. Definicja funkcji 50
3.2.2. Dziedzina, przeciwdziedzina, argumenty i wartości 52
3.2.3. Injekcje, surjekcje i bijekcje 53

Rozdział 4. Ciągi 61
4.1. Zbiór liczb naturalnych 61
4.1.1. Relacje porządku 61
4.1.2. Zasada indukcji matematycznej 65
4.2. Ciągi i ich własności 66
4.2.1. Definicja ciągu 66
4.2.2. Ciągi ograniczone 68
4.2.3. Ciągi monotoniczne 71
4.3. Zbieżność ciągów 73
4.3.1. Definicja granicy ciągu 74
4.3.2. Własności ciągów zbieżnych 76
4.3.3. Granice niewłaściwe 78
4.3.4. Symbole nieoznaczone 81

Rozdział 5. Funkcje rzeczywiste jednej zmiennej 83
5.1. Wykres funkcji rzeczywistej 83
5.2. Dziedzina funkcji rzeczywistej 84
5.3. Monotoniczność 85
5.4. Funkcje ograniczone 87
5.5. Funkcje elementarne 87
5.5.1. Funkcja liniowa 88
5.5.2. Funkcja kwadratowa 88
5.5.3. Wielomian 89
5.5.4. Funkcja wymierna 89
5.5.5. Funkcja potęgowa 89
5.5.6. Funkcja wykładnicza 90
5.5.7. Funkcja logarytmiczna 90
5.5.8. Funkcje trygonometryczne 90
5.5.9. Funkcje cyklometryczne 90

Rozdział 6. Granice i ciągłość funkcji jednej zmiennej 91
6.1. Granica funkcji w punkcie 92
6.1.1. Otoczenie i sąsiedztwo punktu 92
6.1.2. Określenie granicy funkcji w punkcie 93
6.1.3. Własności granicy funkcji w punkcie 97
6.1.4. Granice niewłaściwe 98
6.1.5. Granice jednostronne 101

6.2. Ciągłość 102
6.2.1. Ciągłość funkcji w punkcie 102
6.2.2. Własności funkcji ciągłych w punkcie 105
6.2.3. Funkcje ciągłe 106
6.2.4. Własności funkcji ciągłych 108

Rozdział 7. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej 111
7.1. Określenie pochodnej funkcji 111
7.2. Obliczanie pochodnych 115
7.3. Interpretacja geometryczna pochodnej 117
7.4. Interpretacja fizyczna pochodnej 120
7.5. Własności funkcji różniczkowalnych i pochodnych 121
7.5.1. Ciągłość funkcji różniczkowalnych 121
7.5.2. Twierdzenie Rolle'a 121
7.5.3. Twierdzenie Lagrange'a 123
7.6. Zastosowania rachunku różniczkowego 125
7.6.1. Związki pochodnej z monotonicznością 125
7.6.2. Pochodna a ekstrema lokalne 127
7.6.3. Druga pochodna a wypukłość 131
7.6.4. Wyznaczanie ekstremów lokalnych przy pomocy pochodnych wyższego rzędu 136
7.6.5. Obliczanie granic 137
7.6.6. Obliczanie przybliżonych wartości funkcji 139

Rozdział 8. Szeregi. Szereg Taylora funkcji jednej zmiennej 141
8.1. Szeregi 141
8.1.1. Definicja zbieżności szeregu 141
8.1.2. Kryteria zbieżności szeregów 144
8.1.3. Szeregi potęgowe 146
8.2. Szereg Taylora 147

Rozdział 9. Całkowanie funkcji jednej zmiennej 149
9.1. Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona 149
9.2. Całki nieoznaczone z funkcji elementarnych 151
9.3. Własności całki nieoznaczonej 153
9.3.1. Całkowanie przez części 155
9.3.2. Całkowanie przez podstawianie 156
9.4. Całka Riemanna. Całka oznaczona 157

9.4.1. Własności całki Riemanna 161
9.4.2. Związki całki Riemanna z całką nieoznaczoną 163
9.4.3. Wzory na całkowanie przez części i całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych 164
9.5. Całki niewłaściwe 166

Rozdział 10. Metody obliczania całek. Zastosowania rachunku całkowego. 169
10.1. Przegląd typów całek nieoznaczonych i metod całkowania 169
10.1.1. Całki z funkcji elementarnych 169
10.1.2. Całkowanie przez podstawienie 170
10.1.3. Całkowanie przez części 173
10.1.4. Całkowanie funkcji wymiernych 179

Rozdział 11. Funkcje wielu zmiennych 201
11.1. Przestrzeń euklidesowa 201
11.1.1. Przestrzeń euklidesowa jako przestrzeń wektorowa 201
11.1.2. Działania na wektorach 202
11.1.3. Iloczyn skalarny, długość wektorów i odległość w przestrzeni euklidesowej 205
11.1.4. Własności podzbiorów w $\mathbb{R}^n$ 206
11.2. Ciągi w przestrzeni euklidesowej 209
11.2.1. Ciągi w $\mathbb{R}^n$ a układy ciągów liczbowych 209
11.2.2. Ciągi zbieżne 210
11.2.3. Punkty skupienia i domknięcie podzbioru przestrzeni $\mathbb{R}^n$ 213
11.3. Funkcje rzeczywiste określone na podzbiorach przestrzeni $\mathbb{R}^n$ 217
11.3.1. Określenie funkcji n zmiennych 217
11.3.2. Dziedzina funkcji n zmiennych 218
11.3.3. Granica funkcji w punkcie i ciągłość funkcji 219
11.4. Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych 228
11.4.1. Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych 228
11.4.2. Pochodne cząstkowe 230
11.4.3. Pochodna kierunkowa 235
11.4.4. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów 238

Rozdział 12. Ekstrema funkcji wielu zmiennych 241
12.1. Ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych 241
12.1.1. Określenie ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych 241
12.1.2. Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego 242

12.1.3. Hesjan. Kilka informacji o macierzach 246
12.1.4. Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego 254
12.2. Ekstrema warunkowe funkcji wielu zmiennych 257
12.2.1. Określenie pojęcia ekstremum warunkowego 257
12.2.2. Rozwikłanie warunku 258
12.2.3. Parametryzacja krzywej 261
12.2.4. Metoda mnożników Lagrange'a 266

Rozdział 13. Elementy analizy wektorowej 271
13.1. Iloczyn wektorowy 271
13.2. Pola wektorowe 274
13.2.1. Własności pól wektorowych 274
13.2.2. Pole gradientowe 276
13.3. Pola wektorowe w $\mathbb{R}^3$ 278
13.3.1. Rotacja pola wektorowego 279
13.3.2. Dywergencja pola wektorowego 281

Rozdział 14. Całki z funkcji wielu zmiennych 285
14.1. Wprowadzenie całki podwójnej 285
14.1.1. Całka po prostokącie 285
14.1.2. Całka iterowana 285
14.1.3. Całka po dowolnym obszarze 287
14.1.4. Własności całki podwójnej 287

Bibliografia 291

ROZDZIAŁ 1

Elementy logiki matematycznej

1.1. Zdanie logiczne

Definicja 1.1. *Zdaniem logicznym* nazywamy takie stwierdzenie, o którym da się w jednoznaczny sposób powiedzieć, że jest prawdziwe lub fałszywe.

Zatem tym, co wyróżnia zdanie logiczne spośród innych zdań jest to, że ma ono *wartość logiczną*. Wartością logiczną może być *prawda* (oznaczana też czasami jako 0) lub *fałsz* (oznaczany przez 0).

Przykład 1.2. Rozważmy następujące wypowiedzi:

(1) Słońce jest gwiazdą.
Jest to niewątpliwie zdanie logiczne. Jego wartość logiczna to prawda.

(2) Tydzień ma osiem dni.
Jest to również zdanie logiczne. Tym razem jest to zdanie fałszywe.

(3) Czy jutro będzie padało?
Warunkiem koniecznym na to, aby zdanie uznać za zdanie logiczne, jest tryb orzekający tego zdania. Pytanie oczywiście nie jest zdaniem logicznym.

(4) życie jest piękne.
Bardzo urocze zdanie oznajmujące, które jednak nie jest zdaniem logicznym. Ocena prawdziwości tego zdania zależy bowiem od czynników subiektywnych takich, jak stan psychiczny człowieka, jego poglądy filozoficzne, itp.

(5) $2 + 2 = 5$.
Powyższe stwierdzenie jest zdaniem logicznym, które jest fałszywe.

(6) $2x + 1 > 0$.
W powyższej formule możemy za zmienną x podstawić dowolną liczbę rzeczywistą. Wtedy otrzymamy zdanie logiczne, np. dla $x = 0$ jest to zdanie prawdziwe, a dla $x = -1$ – zdanie fałszywe. Jeżeli jednak nie sprecyzujemy, o jaką liczbę x nam chodzi, to nie możemy uznać powyższej formuły za zdanie logiczne.

(7) Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $2x + 1 > 0$.
Powyższa wypowiedź jest fałszywa. Istnieją bowiem takie wartości zmiennej x, dla której nierówność nie jest spełniona (np. $x = -1$). Zatem wypowiedź ta jest zdaniem logicznym.

(8) Każdy człowiek powinien zarabiać tyle, żeby stać go było na mieszkanie.
Zdanie to wyraża piękną ideę, z którą zgodzi się zapewne większość ludzi. Jest ono jednak tylko wyrazem pewnego poglądu. Nawet mimo tego, że zapewne większość ludzi byłaby skłonna się z nim zgodzić, nie możemy jednoznacznie przyporządkować temu zdaniu wartości logicznej. Nie jest więc zdanie logiczne.

(9) Istnieją takie dwie proste, które mają dokładnie dwa punkty wspólne.
Każde dwie proste albo się pokrywają (czyli mają nieskończenie wiele punktów wspólnych), albo się przecinają (wtedy mają dokładnie jeden punkt wspólny), albo są równoległe, ale się nie pokrywają (wtedy nie mają w ogóle punktów wspólnych). Powyższa wypowiedź jest więc fałszywa, a zatem jest zdaniem logicznym.

W dalszym ciągu, mówiąc o zdaniach logicznych często będziemy chcieli powiedzieć coś ogólnego, czyli takiego, co dotyczy dużej klasy, albo nawet wszystkich zdań. Nie chcąc w takim wypadku precyzować, o jakie zdanie nam chodzi, musimy je jakoś oznaczyć. Przyjęło się oznaczać takie dowolne zdania logiczne literami p, q, r, ..., itd. Możemy np. powiedzieć: Jeżeli p jest zdaniem logicznym, to p jest albo prawdziwe, albo fałszywe.

1.2. Funktory zdaniotwórcze

Zdania logiczne mogą mieć swoją (czasami bardzo rozbudowaną) wewnętrzną strukturę. Podobnie jak w przypadku zdań wypowiadanych w języku potocznym, możemy mówić o zdaniach logicznych *prostych* i zdaniach logicznych *złożonych*. W logice zdania logiczne złożone tworzymy z innych zdań przy pomocy tak zwanych funktorów zdaniotwórczych.

Definicja 1.3. *Funktorem zdaniotwórczym* (zwanym też *spójnikiem logicznym*) nazywamy wyrażenie, które wraz z innymi wyrażeniami, nazywanymi argumentami funktora, tworzy zdanie logiczne.

Argumentami funktora zdaniotwórczego, o których mowa w powyższej definicji są zazwyczaj zdania logiczne. Każdy funktor może mieć jeden lub kilka argumentów. Zasadą jest, że wartość logiczna zdania otrzymanego w wyniku zastosowania funktora zdaniotwórczego nie zależy od konkretnych zdań będących będących w użyciu, lecz jedynie od ich wartości logicznych.

Najczęściej używa się następujących funktorów zdaniotwórczych: jednoargumentowego spójnika *negacji* i dwuargumentowych spójników *koniunkcji*, *alternatywy*, *implikacji* i *równoważności*. Niekiedy wyróżnia się również dwuargumentowy spójnik *alternatywy wykluczającej*.

1.2.1. Negacja. Spójnik negacji (zwanej też *zaprzeczeniem*) jest funktorem jednoargumentowym. Oznacza to, że do utworzenia zdania przy pomocy tego funktora potrzebujemy jednego zdania. Jeśli p jest dowolnym zdaniem, to jego negację oznaczamy

$$\sim p \text{ (lub } \neg p).$$

Odczytujemy to jako nieprawda, że p.

Przykład 1.4. Rozważmy zdania z Przykładu 1.1:

(1) Negacją zdania

Słońce jest gwiazdą

jest zdanie

Nieprawda, że Słońce jest gwiazdą.

Oczywiście, jest to zdanie logiczne fałszywe. Zauważmy, że nie jest konieczne sztywne trzymanie się schematu tworzenia negacji zdania w konkretnych przypadkach. W przypadku powyższego zdania można powiedzieć

Słońce nie jest gwiazdą

i oczywiście utrzymamy sens i ideę zaprzeczenia.

(2) Zaprzeczeniem zdania

Tydzień ma osiem dni

jest zdanie prawdziwe

Nieprawda, że tydzień ma osiem dni.

(3) Negacją zdania

$2 + 2 = 5$

jest zdanie, które możemy zapisać

$\sim (2 + 2 = 5)$.

Negacja ta jest zdaniem prawdziwym. Zauważmy, że można ją też zapisać w następującej formie

$2 + 2 \neq 5$.

(4) Stosując wprost schemat tworzenia negacji powiemy, że zaprzeczeniem zdania

Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $2x + 1 > 0$

jest zdanie

Nieprawda, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $2x + 1 > 0$.

Jest to zdanie prawdziwe. Zauważmy, że ten sam sens będzie miało zdanie

Istnieje liczba rzeczywista x taka, że nierówność $2x + 1 > 0$ nie jest spełniona.

(5) Zaprzeczeniem zdania

Istnieją takie dwie proste, które mają dokładnie dwa punkty wspólne

jest oczywiście zdanie prawdziwe

Nieprawda, że istnieją takie dwie proste, które mają dokładnie dwa punkty wspólne.

Zauważmy, że to samo można wypowiedzieć również w następujący sposób:

Dla każdych dwóch prostych liczba ich punktów wspólnych jest różna od dwóch.

Na podstawie powyższych przykładów, a także na podstawie oczywistej intuicji, możemy sformułować zasadę, że *negacja zdania prawdziwego jest zdaniem fałszywym*, zaś *negacja zdania fałszywego jest zdaniem prawdziwym*. Innymi słowy negacja zmienia wartość logiczną zdania na przeciwną. Przedstawia się to w postaci następującej tabelki wartości logicznych dla negacji

p	$\sim p$
1	0
0	1

1.2.2. Koniunkcja. Koniunkcja jest przykładem funktora zdaniotwórczego dwuargumentowego. To zaś oznacza, że potrzebujemy dwóch zdań składowych do utworzenia zdania logicznego złożonego przy pomocy koniunkcji. Jeśli p i q są zdaniami logicznymi, to ich koniunkcję oznaczamy

$$p \wedge q$$

i czytamy p i q.

Zasada określania wartości logicznej koniunkcji jest oparta na potocznej intuicji. Prześledźmy to na następujących przykładach:

Przykład 1.5. Rozważmy następujące zdania:

(1) Ziemia jest planetą i Ziemia krąży wokół Słońca.

Powyższe zdanie jest koniunkcją dwóch zdań składowych:

Ziemia jest planetą.

Ziemia krąży wokół Słońca.

Oba zdania składowe są prawdziwe. Wydaje się, że jak najbardziej zgodne z intuicją jest uznanie koniunkcji tych zdań również za zdanie prawdziwe. Spójnik i w tym zdaniu sugeruje, że stwierdzamy prawdziwość obu części składowych, co w przypadku tego zdania się zgadza.

(2) $9 \cdot 11 > 100$ i $9 \cdot 11$ jest liczbą parzystą

To zdanie jest koniunkcją zdań

$9 \cdot 11 > 100$

$9 \cdot 11$ jest liczbą parzystą

W tym zdaniu coś nie pasuje. Ponieważ żadne z tych zdań nie jest prawdziwe, intuicyjnie uznajemy całe zdanie złożone za fałszywe.

(3) Sejm liczy 500 posłów i każdy poseł posiada immunitet

Powyższe jest koniunkcją zdań

Sejm liczy 500 posłów

Każdy poseł posiada immunitet

Pierwsze z tych zdań jest fałszywe, zaś drugie prawdziwe. Ponieważ spójnik i sugeruje jednoczesne występowanie obu warunków, całą koniunkcję uznamy raczej za zdanie faszywe, bo nie wszystki zdania składowe są prawdziwe.

Powyższe przykłady są uzasadnieniem dla następującej tabelki wartości logicznych dla koniunkcji

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Innymi słowy, *koniunkcja dwóch zdań logicznych jest prawdziwa tylko w przypadku, gdy oba zdania składowe są prawdziwe*.

1.2.3. Alternatywa. Alternatywa jest również funktorem dwuargumentowym. Alternatywę zdań p i q zapisujemy

$$p \vee q$$

i czytamy p lub q.

Przykład 1.6. Rozważmy zdania:

(1) Cezary Pazura jest prezydentem Polski lub znanym polskim aktorem

Powyższe zdanie intuicyjnie uznajemy za zdanie prawdziwe. Zauważmy, że jest ono alternatywą następujących zdań składowych

Cezary Pazura jest prezydentem Polski

Cezary Pazura jest znanym polskim aktorem

Jest to więc alternatywa zdania fałszywego i zdania prawdziwego.

(2) Donald Tusk jest polskim premierem lub przewodniczącym Platformy Obywatelskiej

Tutaj intuicja może nie być tak jednoznaczna, jak poprzednio. Powyższe zdanie jest alternatywą zdań

Donald Tusk jest polskim premierem

Donald Tusk jest przewodniczącym Platformy Obywatelskiej

Oba zdania składowe są prawdziwe[1]. I tutaj niektórym intuicja może (chociaż nie musi) kazać uznać alternatywę tych zdań za zdanie fałszywe. Wszak mówi ono, że zachodzi jedna LUB druga ewentualność, więc mogłoby to sugerować, że tylko jedna z nich jest spełniona. Z drugiej strony dla innych intuicyjnie może być jasne, że jeśli oba warunki są spełnione, to zdanie mówiące, że zachodzi jeden LUB drugi warunek, jest prawdziwe. W matematyce nie możemy dopuścić, by rozstrzygać problemy na podstawie intuicji, bo ta, jak widać, może doprowadzić do niejednoznaczności. W przypadku takich niejednoznaczności trzeba przyjąć pewną umowę, która w matematyce jest nazywana *definicją*. Otóż na mocy definicji uznajemy, że alternatywa, w której oba zdania składowe są prawdziwe, jest zdaniem prawdziwym[2].

(3) Jarosław Kaczyński jest piłkarzem klubu Manchester United lub koszykarzem klubu Los Angeles Lakers

Tutaj nasza intuicja zapewne nie ma problemu z oceną wartości logicznej tego zdania. Jest ono definitywnie fałszywe. Dla porządku wypiszmy jeszcze zdania składowe

Jarosław Kaczyński jest piłkarzem klubu Manchester United

Jarosław Kaczyński jest koszykarzem klubu Los Angeles Lakers

i zaznaczmy, że oba te zdania są fałszywe.

W związku z dyskusją przeprowadzoną przy omawianiu powyższych przykładów – zwłaszcza przykładu (2) – przyjmujemy następującą tabelkę wartości logicznych dla alternatywy

[1] Przynajmniej tak jest w dniu 5 października 2011 r., kiedy ten fragment skryptu powstaje.

[2] Porównaj tę definicję z definicją alternatywy wykluczającej.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Zatem, *alternatywa dwóch jest prawdziwa wtedy, gdy przynajmniej jedno ze zdań składowych jest prawdziwe*.

1.2.4. Implikacja. W przypadku tego funktora dwuargumentowego lepiej jest rozpocząć opowieść od podania tabelki wartości logicznych, gdyż intuicyjna ocena wartości logicznej poszczególnych przykładów jest praktycznie niemożliwa. Implikację zdań logicznych p i q zapisujemy

$$p \Rightarrow q$$

i odczytujemy jeżeli p, to q. Casami mówimy też ze zdania p wynika zdanie q lub zdanie p implikuje zdanie q. Zdanie p nazywamy *poprzednikiem* implikacji, zaś zdanie q – *następnikiem* implikacji.

Tabelka wartości logicznych implikacji przedstawia się następująco

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Zapamiętujemy więc, że *implikacja jest zdaniem fałszywym tylko w tym przypadku, gdy poprzednik jest prawdziwy, zaś następnik jest fałszywy*. Czasami streszcza się tę zasadę mówiąc, że *z prawdy nie może wynikać fałsz*.

Prześledźmy, jak działa powyższa umowa na kokretnych przykładach.

Przykład 1.7. Rozważmy zdania

(1) Jeżeli Andrzej Wajda jest reżyserem filmowym, to Moskwa jest stolicą Rosji.

Pozwyższe zdanie jest implikacją, której poprzednikiem jest zdanie

Andrzej Wajda jest reżyserem filmowym

zaś następnikiem

Moskwa jest stolicą Rosji.

Intuicyjnie uznamy zapewne, że to zdanie jest pozbawione sensu i trudno mu przypisać jakąkolwiek wartość logiczną. Pamiętajmy jednak, że funktor zdaniotwórczy tworzy zdanie logiczne z *każdych* składowych zdań logicznych. Mimo, że intuicja odmawia nadania jakiegokolwiek sensu powyższemu zdaniu[3], to jest ono zdaniem logicznym. W dodatku, z uwagi na to, że zarówno poprzednik, jak i następnik są zdaniami prawdziwymi, zdanie to jest prawdziwe!

(2) Jeżeli Kanada leży w Europie, to ślimak jest ssakiem

Jest to implikacja, której poprzednik to

Kanada leży w Europie

a następnik

ślimak jest ssakiem.

Nauczeni dyskusją po poprzednim przykładzie nie doszukujemy się sensu w powyższym zdaniu. Stwierdzamy jedynie, że jest to zdanie prawdziwe (sic!) bo poprzednik i następnik są zdaniami fałszywymi.

(3) Jeżeli Lech Wałęsa jest kanclerzem Niemiec, to Polska graniczy z Niemcami

Poprzednikiem powyższej implikacji jest zdanie

Lech Wałęsa jest kanclerzem Niemiec

zaś jej następnikiem

Polska graniczy z Niemcami

Ponieważ poprzednik jest fałszywy, a następnik prawdziwy, stwierdzamy, że implikacja jest zdaniem prawdziwym. Nawiązując do poprzedniego przykładu zauważmy, że jeśli poprzednik implikacji jest zdaniem fałszywym, to sama implikacja jest zdaniem prawdziwym niezależnie od wartości logicznej następnika.

(4) Jeżeli Francja jest krajem eropejskim, to Francja graniczy z Polską

Poprzednik tej implikacji to zdanie

Francja jest krajem europejskim

a następnikiem

Francja graniczy z Polską

Korzystając z tabeli wartości logicznych dla implikacji stwierdzamy, że implikacja jest w tym wypadku zdaniem fałszywym, bo poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy.

[3]Niektórzy powiedzą, że to zdanie jest ńielogiczne".

(5) $(3457 \cdot 45097)^2 < 25 \cdot 10^{15} \;\Rightarrow\; 3457^2 \cdot 45097^2 < 10^{17}$

Poprzednikiem tej implikacji jest nierówność

$(3457 \cdot 45097)^2 < 25 \cdot 10^{15}$

podczas, gdy następnik implikacji to

$3457^2 \cdot 45097^2 < 10^{17}$

Chcąc określić wartość logiczną implikacji musimy stwierdzić, jakie wartości logiczne mają poprzednik i następnik. Zasatanówmy się jednak, czy jest to naprawdę konieczne. Wymaga to naprawdę uciążliwych rachunków lub przynajmniej dobrego kalkulatora. Może nie musimy wykonywać tych wszystkich obliczeń? Przede wszystkim zauważmy, że lewe strony w obu nierównościach są sobie równe, co wynika z powszechnie znanych reguł działań na potęgach. Powiedzmy, że nie chce nam się wykonywać obliczania liczby stojącej po lewej stronie obu nierówności. Mamy dwie możliwości:

(a) Poprzednik jest fałszywy. Wtedy z tabelki wartości logicznych implikacji wynika, że cała implikacja jest prawdziwa. Nie musimy zatem wyznaczać wartości logicznej następnika.

(b) Poprzednik jest prawdziwy. Oznacza to, że prawdziwa jest nierówność $X < 25 \cdot 10^{15}$, gdzie przez X oznaczyliśmy lewą stronę obu nierówności. Zauważmy teraz, że

$$25 \cdot 10^{15} < 100 \cdot 10^{15} = 10^{17}.$$

Zatem, jeśli $X < 25 \cdot 10^{15}$, to tym bardziej $X < 10^{17}$, a więc następnik byłby także prawdziwy. Cała implikacja w tym przypadku także jest prawdziwa.

Zauważmy, że nie obliczając liczby X, nie wiemy, który z powyższych przypadków zachodzi. Mimo to, udało nam się bez tej wiedzy wykazać, że implikacja jest prawdziwa.

1.2.5. Równoważność. Jest to kolejny przykład funktora dwuargumentowego. Równoważność zdań p i q zapisujemy

$$p \Leftrightarrow q$$

i odczytujemy p wtedy i tylko wtedy, gdy q.

Równoważność dwóch zdań jest zdaniem prawdziwym, gdy oba zdania mają tę samą wartość logiczną. Ilustruje to tabelka wartości logicznych dla równoważności

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Przykład 1.8. Rozważmy następujące zdania:

(1) Morświn jest rybą wtedy i tylko wtedy, gdy kałamarnica jest ssakiem

Mamy tutaj dwa zdania składowe

Morświn jest rybą

Kałamarnica jest ssakiem

Oba zdania są fałszywe, zatem równoważność jest zdaniem prawdziwym.

(2) Andrzej Wajda jest reżyserem filmu Człowiek z żelaza"wtedy i tylko wtedy, gdy Marek Piwowski jest reżyserem filmu Żejs"

Na to zdanie składają się

Andrzej Wajda jest reżyserem filmu Człowiek z żelaza"

Marek Piwowski jest reżyserem filmu Żejs"

Tym razem oba zdania są prawdziwe. Ponieważ znowu mają tę samą wartość logiczną, równoważność jest prawdziwa.

(3) $|3409876 \cdot 209876 - 670935 \cdot 1066647| > 35 \cdot 10^4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (670935 \cdot 1066647 - 3409876 \cdot 209876)^2 = 1220 \cdot 10^8$$

Zdaniami składowymi tej równoważności są nierówności

(A) $|3409876 \cdot 209876 - 670935 \cdot 1066647| > 3{,}5 \cdot 10^5$

(B) $(670935 \cdot 1066647 - 3409876 \cdot 209876)^2 \leq 1{,}225 \cdot 10^{11}$

Zastanówmy się, czy można ustalić wartość logiczną tej równoważności bez wykonywania żmudnych obliczeń lewych stron tych wyrażeń. Zauważmy najpierw, że lewa strona w nierówności (B) jest kwadratem lewej strony w nierówności (A). łatwo też sprawdzić, że

$$\left(3{,}5 \cdot 10^5\right)^2 = 1{,}225 \cdot 10^{11}$$

a więc prawa strona nierówności (B) jest kwadratem prawej strony z nierówności (A). Podobnie jak w Przykładzie 1.7(5) rozważmy dwa przypadki

(a) Nierówność (A) jest fałszywa. Wtedy prawdziwa jest nierówność

$$|3409876 \cdot 209876 - 670935 \cdot 1066647| \leq 3{,}5 \cdot 10^5.$$

Zauważmy teraz, że po podniesieniu obu stron do kwadratu otrzymujemy nierówność (B). Zatem nierówność (B) jest prawdziwa. Oznacza to, że cała równoważność jest zdaniem fałszywym.

(b) Nierówność (B) jest prawdziwa. Po podniesieniu obu stron tej nierówności otrzymamy

$$(3409876 \cdot 209876 - 670935 \cdot 1066647)^2 > \left(3{,}5 \cdot 10^5\right)^2.$$

Ponieważ $\left(3{,}5 \cdot 10^5\right)^2 = 1{,}225 \cdot 10^{11}$, to ta nierówność różni się od (B) jedynie zwrotem nierówności. Oznacza to, że nierówność (B) jest fałszywa. Cała równoważność jest więc znowu fałszywa.

Podobnie jak w Przykładzie 1.7(5) dało się więc ustalić wartość logiczną równoważności bez wyznaczania wartości logicznych zdań składowych.

1.2.6. Alternatywa wykluczająca. To kolejny przykład funktora dwuargumentowego. Alternatywę wykluczjącą zdań p i q oznaczamy

$$p \oplus q$$

i czytamy p albo q. Od alternatywy różni się tym, że w przypadku, gdy oba zdania składowe są prawdziwe, uznajemy ją za zdanie fałszywe. Możemy rozumieć to tak, że prawdziwość jednego ze zdań wyklucza prawdziwość drugiego. Przedstawia to tabelka wartości logicznych dla alternatywy wykluczającej

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Przykład 1.9. Rozważmy zdania:

(1) Jowisz jest planetą albo Jowisz jest gwiazdą

Na to zdanie złożone składają się dwa zdania proste

Jowisz jest planetą

Jowisz jest gwiazdą

Ponieważ pierwsze jest prawdziwe a drugie fałszywe, to ich alternatywa wykluczająca jest zdaniem logicznym prawdziwym.

(2) Człowiek jest ssakiem albo kangur jest ssakiem

Zdania proste to

Człowiek jest ssakiem

Kangur jest ssakiem

Oba są prawdziwe, zatem ich alternatywa wykluczająca jest zdaniem fałszywym.

(3) $99^2 = 10000 \oplus 101^2 = 10000$

Oba zdania składowe

$99^2 = 10000$

$101^2 = 10000$

są fałszywe, więc ich alternatywa wykluczająca jest też fałszywa.

1.2.7. Określanie wartości logicznej zdań złożonych. Używając funktorów zdaniotwórczych wprowadzonych w poprzedniej części możemy ze zdań składowych budować zdania złożone. Mają one niekiedy bardzo skomplikowaną strukturę.

Przykład 1.10. Rozważmy następujące zdanie:

> Jeżeli zarówno Warszawa leży nad Wisłą jak i albo Poznań leży nad Wartą i nie jeżdżą w nim tramwaje, albo Poznań leży nad Wisłą i nie ma w nim ZOO, to nieprawda, że Londyn jest stolicą Polski lub Wielkiej Brytanii.[4]

Spróbujmy dokonać rozbioru logicznego tego zdania. Można wyodrębnić tutaj następujące zdania składowe proste:

p: Warszawa leży nad Wisłą

q: Poznań leży nad Wartą

r: W Poznaniu jeżdża tramwaje

s: Poznań leży na Wisłą

t: W Poznaniu jest ZOO

u: Londyn jest stolicą Polski

v: Londyn jest stolicą Wielkiej Brytanii

Nietrudno zauważyć, że całe zdanie jest implikacją, w której zarówno poprzednik i następnik są dosyć rozbudowanymi zdaniami złożonymi. Przyjrzyjmy się poprzednikowi:

[4]Zdanie zaczerpnięte z pozycji *Samouczek logiki zdań* (wersja wstępna) Katarzyny Paprzyckiej (zob. `http://kpaprzycka.swps.edu.pl/xSamouczek/Temat04.pdf`)

> Zarówno Warszawa leży nad Wisłą jak i albo Poznań leży nad Wartą i nie jeżdżą w nim tramwaje, albo Poznań leży nad Wisłą i nie ma w nim ZOO

To z kolei zdanie jest koniunkcją dwóch zdań:

> Warszawa leży nad Wisłą

i

> Albo Poznań leży nad Wartą i nie jeżdżą w nim tramwaje, albo Poznań leży nad Wisłą i nie ma w nim ZOO

Pierwsze z tych zdań jest proste, zaś drugie jest alternatywą wykluczającą następujących dwóch zdań:

> Poznań leży nad Wartą i nie jeżdżą w nim tramwaje

oraz

> Poznań leży nad Wisłą i nie ma w nim ZOO

Oba te zdania są koniunkcjami.

Cały poprzednik da się więc zapisać przy pomocy wprowadzonych oznaczeń następująco

$$p \wedge ((q \wedge (\sim r)) \oplus (s \wedge (\sim t)))$$

Następnik implikacji jest zdaniem

> Nieprawda, że Londyn jest stolicą Polski lub Wielkiej Brytanii

Podobnie jak wyżej dochodzimy do wniosku, że jest to zaprzeczenie alternatywy dwóch zdań prostych, które można zapisać

$$\sim (u \vee v)$$

Ostatecznie, cała implikacja ma postać

$$(p \wedge ((q \wedge (\sim r)) \oplus (s \wedge (\sim t)))) \Rightarrow (\sim (u \vee v))$$

W celu wyznaczenia wartości logicznej tego zdania, podstawmy w powyższym schemacie wartości logiczne poszczególnych zdań prostych

$$(1 \wedge ((1 \wedge (\sim 1)) \oplus (0 \wedge (\sim 1)))) \Rightarrow (\sim (0 \vee 1))$$

Stosując reguły wyznaczania wartości logicznych dla poszczególnych funktorów zdaniotwórczych sukcesywnie przetwarzamy powyższy schemat

$$(1 \wedge ((1 \wedge 0) \oplus (0 \wedge 0))) \Rightarrow (\sim (0 \vee 1))$$

$$(1 \wedge (0 \oplus 0)) \Rightarrow (\sim 1)$$

$$(1 \wedge 0) \Rightarrow 0$$

$$0 \Rightarrow 0$$

Dochodzimy w końcu do konkluzji, że zdanie jest prawdziwe.

1.3. Prawa rachunku zdań

Rozpocznijmy od pewnego przykładu.

Przykład 1.11. Rozważmy następujące wyrażenie:

$$(q \vee (\sim p)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

Jeśli w tym wyrażeniu za zmienne p i q podstawimy pewne zdania logiczne, to oczywiście otrzymamy zdanie logiczne. Generalnie, jego wartość logiczna zależeć będzie od wartości logicznych zdań, które podstawimy za p i q. Sprawdźmy, jak wygląda ta zależność. Posłużymy się tzw. *metodą zerojedynkową*. Polega ona stworzeniu *matrycy wartości logicznych* dla naszego wyrażenia.

p	q	$\sim p$ A	$q \vee$ A B	$p \Rightarrow q$ C	B $\Rightarrow$ C
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

W pierwszych dwóch rubrykach powyższej tabelki wpisaliśmy wszystkie możliwe kombinacje wartości logicznych zdań p i q. Następne rubryki wypełniliśmy zgodnie z tabelkami wartości logicznych dla poszczególnych funktorów.

Obserwując wartości wpisane w ostatniej rubryce zauważamy, że niezależnie od wartości logicznych zdań p i q rozważane przez nas zdanie jest zawsze prawdziwe!

Wyrażenia takie jak w powyższym przykładzie to schematy logiczne. Sprecyzujmy to dokładniej

Definicja 1.12. Wyrażenie, w którym występują zmienne i które staje się zdaniem logicznymi po podstawieniu zdań logicznych za zmienne, nazywamy *schematem logicznym*.

W przykładzie spotkaliśmy bardzo specyficzny schemat logiczny. Schematy tego typu opisuje następująca definicja.

Definicja 1.13. *Prawem rachunku zdań* (albo *tautologią*) nazywamy taki schemat logiczny, który po podstawieniu dowolnych zdań za występujące w nim zmienne staje się zawsze zdaniem logicznym prawdziwym.

Przykład 1.14. Rozważmy następujący schemat logiczny:

$$(((p \vee q) \Rightarrow p) \Rightarrow q) \Rightarrow p$$

Sprawdzimy metodą zerojedynkową, czy powyższy schemat jest tautologią:

p	q	$p \vee q$ A	$\mathrm{A} \Rightarrow p$ B	$\mathrm{B} \Rightarrow q$ C	$\mathrm{C} \Rightarrow p$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1

Jak widać, powyższy schemat nie jest prawem rachunku zdań.

Podamy teraz najważniejsze przykłady praw rachunku zdań:

(1) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ (prawo idempotentności koniunkcji)
(2) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ (prawo idempotentności alternatywy)
(3) $p \Leftrightarrow \sim\sim p$ (prawo podwójnego przeczenia)
(4) $p \vee \sim p$ (prawo wyłączonego środka)
(5) $\sim (p \wedge \sim p)$ (prawo sprzeczności)
(6) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$ (prawo de Morgana – zaprzeczenie koniunkcji)
(7) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$ (prawo de Morgana – zaprzeczenie alternatywy)
(8) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ (prawo transpozycji)
(9) $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ (prawo zaprzeczenia implikacji)
(10) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ (prawo przemienności koniunkcji)
(11) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (prawo przemienności alternatywy)
(12) $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$ (prawo łączności koniunkcji)
(13) $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ (prawo łączności alternatywy)
(14) $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy)

(15) $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ (prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji)
(16) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ (pierwsze prawo symplifikacji)
(17) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ (drugie prawo symplifikacji)
(18) $p \Rightarrow (p \vee q)$ (trzecie prawo symplifikacji)
(19) $(p \Rightarrow (q \wedge \sim q)) \Rightarrow \sim p$ (pierwsze prawo redukcji do absurdu)
(20) $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)) \Rightarrow \sim p$ (drugie prawo redukcji do absurdu)
(21) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ (prawo sylogizmu)
(22) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (prawo sylogizmu warunkowego)
(23) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ (prawo równoważności przeciwnych implikacji)

1.4. Funkcje zdaniowe

W Przykładzie 1.2(6) zetknęliśmy się z wyrażeniem

$$2x + 1 > 0$$

które nie jest zdaniem logicznym, ale ma tę wąlsność, że jeśli za zmienną x podstawimy dowolną liczbę rzeczywistą, to zdaniem logicznym się staje. Takie wyrażenia nazywamy funkcjami zdaniowymi. Precyzuje to następująca

Definicja 1.15. *Funkcją zdaniową* (lub *formą zdaniową*) określoną na pewnym zbiorze X nazywamy każde wyrażenie zawierające zmienną, takie, że po wstawieniu w miejsce zmiennej dowolnego elementu z tego zbioru wyrażenie to staje się zdaniem logicznym. Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji zdaniowej.

Przykład 1.16. Rozważmy następujące wyrażenia:

(1) $x^2 - x + 1 < 0$
Jest to forma zdaniowa, w której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Jest jasne, że jeśli za x podstawimy jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, to otrzymamy nierówność będącą zdaniem logicznym. łatwo można zauważyć, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ będzie to zdanie fałszywe.

(2) $2n + 1$ jest liczbą podzielną przez 3
Powyższe wyrażenie staje się zdaniem logicznym, gdy za zmienną n wstawimy dowolną liczbę całkowitą. Np. dla $n = 7$ jest to zdanie prawdziwe, zaś dla $n = -1$ – fałszywe. Naturalnie jest więc przyjąć, że dziedziną tej formy zdaniowej jest zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

(3) Człowiek jest brunetem

Powyższa wypowiedź nie jest oczywiście zdaniem logicznym, bo nie wiemy, o jakim człowieku tutaj mowa. Możemy słowo człowiek w tej wypowiedzi potraktować jako zmienną. Jeśli za tę zmienną "podstawimy"konkretnego człowieka (tzn. jego jednoznaczny opis), to wypowiedź ta stanie się zdaniem logicznym. Dziedziną tak otrzymanej formy zdaniowej jest zbiór wszystkich ludzi.

(4) $(x > 1) \Rightarrow \left(x^2 > \frac{1}{2}\right)$

To wyrażenie staje się zdaniem logicznym, jeśli za x podstawimy dowolną liczbę rzeczywistą. Jest to więc funkcja zdaniowa, której dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}$.

(5) $(a^2 - 1 \geq 0) \Rightarrow (a \geq 1)$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie widzimy, że możemy za zmienną a podstawić dowolną liczbę rzeczywistą i otrzymamy zdanie logiczne. Jest to więc także funkcja zdaniowa z dziedziną równą $\mathbb{R}$.

(6) $x^2 < y + 1$

Tym razem w wyrażeniu występują dwie zmienne: x i y. Za zmienne te można podstawić dowolne liczby rzeczywiste i otrzymamy w ten sposób zdanie logiczne. Formalnie powiemy, że zmienną jest tutaj para (x, y), za którą można podstawić dowolną parę liczb rzeczywistych. Dziedziną jest tutaj więc zbiór wszystkich par liczb rzeczywistych. Mniej formalnie mówimy, że jest to funkcja zdaniowa dwóch zmiennych rzeczywistych x i y.

Często istnieje potrzeba, by jakoś oznaczyć funkcję zdaniową. Zazwyczaj oznaczenie to jest postaci

$$\varphi(x)$$

gdzie φ jest nazwą funkcji, zaś w nawiasie wypisujemy nazwę zmiennej. Czasami, chcąc zaznaczyć, jak wygląda dziedzina funkcji $\varphi(x)$ piszemy

$$\varphi(x),\ x \in X$$

Jeśli $x_0 \in X$ jest pewnym konkretnym elementem zbioru X, to zdanie, które otrzymamy po podstawieniu tego elementu za zmienną x oznaczamy

$$\varphi(x_0)$$

Jeśli $\varphi(x)$, $x \in X$, jest funkcją zdaniową, to wiadomo, że jeśli za x podstawimy dowolny element ze zbioru X, to otrzymamy zdanie. Często jednak może nas interesować, dla jakich elementów ze zbioru X otrzymamy w ten sposób zdanie prawdziwe.

Definicja 1.17. Mówimy, że element $x_0 \in X$ *spełnia formę zdaniową* $\varphi(x)$, jeśli zdanie $\varphi(x_0)$ jest prawdziwe.

Zbiór wszystkich elementów z dziedziny spełniających formę $\varphi(x)$ oznaczamy

$\{x : \varphi(x)\}$ lub $\{x \in X : \varphi(x)\}$

Przykład 1.18. Wyznaczmy zbiory spełniające formy zdaniowe opisane w Przykładzie 1.16.

(1) $x^2 - x + 1 < 0$

Zbiór liczb rzeczywistych spełniających tę formę zdaniową, to inaczej zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej. Ponieważ dla trójmianu kwadratowego w niej występującej mamy $\Delta = -3 < 0$, wnioskujemy, że trójmian ten nie ma miejsc zerowych. Wykres funkcji kwadratowej leży więc całkowicie nad osią x-ów (współczynnik przy x^2 jest dodatni), zatem funkcja ta nigdzie nie przyjmuje wartości ujemnych. Oznacza to, że zbiór elementów spełniających powyższą formę zdaniową jest pusty, co możemy zapisać

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 1 < 0\} = \emptyset$$

(2) $2n + 1$ jest liczbą podzielną przez 3

Z definicji podzielności wynika, że liczba $n \in \mathbb{Z}$ spełnia tę funkcję zdaniową wtedy i tylko wtedy, gdy

$2n + 1 = 3k$ dla pewnej liczby $k \in \mathbb{Z}$.

To jest zaś równoważne stwierdzeniu, że

$2n$ daje resztę 2 przy dzieleniu przez 3.

To ostanie zaś oznacza, że

n daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3.

lub inaczej

$n = 3l + 1$ dla pewnej liczby $l \in \mathbb{Z}$

Możemy więc zapisać

$$\begin{aligned} &\{n \in \mathbb{Z} : 2n + 1 \text{ jest liczbą podzielną przez } 3\} = \\ &= \{n \in \mathbb{Z} : n = 3l + 1 \text{ dla pewnego } l \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{3l + 1 : l \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

(3) Człowiek jest brunetem

Tutaj zbiorem elementów spełniających funkcję zdaniową jest po prostu zbiór wszystkich brunetów.

(4) $(x > 1) \Rightarrow \left(x^2 > \frac{1}{2}\right)$

Jeśli za zmienną x podstawimy dowolną liczbę rzeczywistą, to otrzymamy zdanie logiczne, które ma strukturę implikacji, której poprzednik to $x > 1$, zaś następnik $x^2 > \frac{1}{2}$. Chcąć określić wartość logiczną tego zdania, najlepiej rozpatrzyć dwa przypadki:

(a) Za zmienną x podstawiamy liczbę z przedziału $(-\infty, 1\rangle$, tzn. taką liczbę, że poprzednik jest zdaniem fałszywym. Wtedy implikacja jest prawdziwa niezależnie od wartości logicznej następnika. Oznacza to, że

$$(-\infty, 1\rangle \subset \left\{x \in \mathbb{R} : \, (x > 1) \Rightarrow \left(x^2 > \frac{1}{2}\right)\right\}$$

(b) Za zmienną x podstawiamy liczbę z przedziału $(1, \infty)$, tzn. taką liczbę, że poprzednik jest zdaniem prawdziwym. Zauważmy jednak, że dla wszystkich $x \in (1, \infty)$ zdanie $x^2 > \frac{1}{2}$ jest także prawdziwe. Cała implikacja jest zatem prawdziwa dla wszystkich $x \in (1, \infty)$, czyli

$$(1, \infty) \subset \left\{x \in \mathbb{R} : \, (x > 1) \Rightarrow \left(x^2 > \frac{1}{2}\right)\right\}$$

Ostatecznie, wziąwszy pod uwagę obydwa przypadki, mamy

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \, (x > 1) \Rightarrow \left(x^2 > \frac{1}{2}\right)\right\} = \mathbb{R}$$

(5) $(a^2 - 1 \geq 0) \Rightarrow (a \geq 1)$

Ponieważ ta forma zdaniowa ma również strukturę implikacji, postępujemy podobnie jak w poprzednim punkcie, tzn. rozpatrujemy dwa przypadki

(a) Za a podstawiamy taką liczbę, że poprzednik jest zdaniem fałszywym. Takie liczby a muszą być rozwiązaniami nierówności kwadratowej $a^2 - 1 < 0$, czyli $a \in (-1, 1)$. Ponieważ poprzednik jest fałszywy, to cała implikacja jest w tym przypadku zawsze prawdziwa, zatem

$$(-1, 1) \subset \{a \in \mathbb{R} : \, (a^2 - 1 \geq 0) \Rightarrow (a \geq 1)\}$$

(b) Za a podstawiamy taką liczbę, że poprzednik jest zdaniem prawdziwym. Tym razem są to rozwiązania nierówności kwadratowej $a^2 - 1 \geq 0$, czyli $a \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$. Spośród tych a musimy teraz wyszukać te liczby, dla których jednocześnie następnik jest prawdziwy (bo implikacja ma być prawdziwa). Stwierdzamy, że w tym przypadku cała implikacja jest prawdziwa zatem dla $a \in \langle 1, \infty)$. Mamy więc

$$\langle -1, \infty) \subset \{a \in \mathbb{R} : \, (a^2 - 1 \geq 0) \Rightarrow (a \geq 1)\}$$

Ostaecznie, zbiorem elementów spełniających formę zdaniową będzie suma podzbiorów otrzymanych w obu przypadkach, czyli

$$\{a \in \mathbb{R} : \, (a^2 - 1 \geq 0) \Rightarrow (a \geq 1)\} = (-1, 1) \cup \langle 1, \infty) = (-1, \infty)$$

ROZDZIAŁ 2

Elementy teorii zbiorów

2.1. Pojęcia pierwotne i aksjomaty

Matematyka jest nauką *aksjomatyczną*. Co to oznacza? Na pewno już w trakcie edukacji szkolnej niejednokrotnie zetknęliśmy się z faktem, że każdy obiekt, o którym mówiliśmy na lekcjach matematyki zależy *zdefiniować*, tzn. dokładnie go opisać.

Przykład 2.1. Rozważmy dobrze znany ze szkolnych lekcji geometrii *kwadrat*. Jego definicja mogłaby być następująca:

Kwadrat to czworokąt, w którym wszystkie kąty są proste i wszystkie boki są równej długości.

Problem polega na tym, że w tej definicji zostało użyte słowo *czworokąt*. To też wymaga definicji. Możemy to zrobić np. tak

Czworokąt, to wielokąt, który ma cztery kąty.

Ale co to jest *wielokąt*?

Wielokąt to figura płaska ograniczona linią łamaną zamkniętą zwyczajną.

Zauważmy, że tutaj znowu pojawiły się nowe pojęcia wymagające zdefiniowania: *figura płaska* i *linia łamana zamknięta zwyczajna*. Weźmy na przykład ten drugi obiekt. Na początku musimy powiedzieć, co to jest *linia łamana*.

Linia łamana (lub krótko łamana) to w linia utworzona z ciągu odcinków (zwanych jej bokami) w taki sposób, że

(1) żadne dwa następujące po sobie odcinki nie leżą na jednej prostej,
(2) punkt będący końcem pierwszego odcinka jest początkiem drugiego odcinka, punkt będący końcem drugiego – początkiem trzeciego i tak dalej.

Punkty, o których mowa powyżej nazywamy wierzchołkami łamanej.

W powyższej definicji pojawiło się słowo *odcinek*, które też wymaga zdefiniowania. Możemy to zrobić np. tak:

Odcinek to część prostej zawarta pomiędzy dwoma jej punktami z tymi punktami włącznie.

Teraz z kolei definicji waymagają słowa *prosta* i *punkt*. Wydaje się, że tę procedurę można by ciągnąć w nieskończoność.

Powyższy przykład uzmysławia nam, że nie da się w sensowny sposób zdefiniować wszystkich pojęć w matematyce tak, aby każda definicja odwoływała się do już wcześniej zdefiniowanych pojęć. Jak zaradzić tej sytuacji? Rozwiązaniem tego problemu jest przyjęcie, że pewnych pojęć nie będziemy definiować. Będą to tzw. *pojęcia pierwotne*. Obiekty, które te pojęcia oznaczają, będziemy opisywali podając ich własności. Zdania, w których opisujemy własności tych obiektów nazywamy *aksjomatami*. Z natury rzeczy aksjomaty są takimi zdaniami, których prawdziwości nie dowodzimy. Ze zdań tych wynikają wszystkie twierdzenia matematyczne.

W systemie geometrycznym opisanym przez Euklidesa pojęciami pierwotnymi były m.in. prosta i punkt. Własności tych pojęć są opisane przez jego słynnych 5 aksjomatów (patrz np. [**3**]). Stosując reguły wnioskowania logicznego, o których mówiliśmy w poprzednim wykładzie, można wywieść z tych aksjomatów wszystkie znane nam twierdzenia geometrii takie jak np. twierdzenie Talesa i twierdzenie Pitagorasa.

Należy też zaznaczyć, że wybór takich, a nie innych pojęć pierwotnych i aksjomatów jest w zasadzie rzeczą czystej umowy. Należy jedynie zadbać, by układ aksjomatów spełniał następujące dwa warunki

(1) *Niezależność*. Sensowny układ aksjomatów musi być tak dobrany, by żaden aksjomat nie wynikał z pozostałych.
(2) *Niesprzeczność*. Wykluczona jest sytuacja, by zaprzeczenie jednego z aksjomatów wynikało z pozostałych.

Wynika stąd zatem, że np. w geometrii układ aksjomatów przyjęty przez Euklidesa nie jest jedynym możliwym. Można rozważać np. taki układ, w którym jeden z aksjomatów Euklidesa zastąpimy jego zaprzeczeniem. W ten sposób określimy nową geometrię, w której obowiązują inne

zasady i prawdziwe są inne twierdzenia niż te, o których słyszeliśmy w szkole. Takie systemy geometryczne nazywamy *geometriami nieeuklidesowymi*. Przykładami geometrii nieeklidesowych są geometria hiperboliczna Łobaczewskiego i geometria eliptyczna (sferyczna).

2.2. Uwagi o aksjomatach teorii zbiorów

Nie tylko geometria, ale cała matematyka oparta jest na pewnym układzie aksjomatów, a więc jest *nauką aksjomatyczną*. Przyjęto, że pojęciami pierwotnymi w matematyce będą pojęcia zbioru i elementu zbioru[1]. Niezbędne są zatem aksjomaty opisujące te pojęcia. Powszechnie przyjmowany dziś system aksjomatów zaproponowany został przez Ernsta Zermelo w 1904 roku, Później został on uzupełniony przez Abrahama Fraenkel'a. Aksjomaty te uzupełnione o tzw. *aksjomat wyboru* określa się nazwą aksjomatów ZFC.

Omówimy tutaj niektóre z tych aksjomatów. Będzie to tylko przegląd wybranych aksjomatów. Czytelników zainteresowanych pełną aksjomatyką teorii mnogości odsyłamy do pozycji [**2**].

- **Aksjomat ekstensjonalności**

Jeżeli zbiory a i b mają te same elementy, to są identyczne.

$$\forall a\ \forall b : (\forall x : (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b)\,.$$

Wynika stąd, że jeśli chcemy wykazać równość zbiorów a i b, to należy uzasadnić, że dla każdego x prawdziwa jest równoważność: $x \in a \Leftrightarrow x \in b$.

- **Aksjomat zbioru pustego**

[1] **Intuicyjna teoria zbiorów.** Do pewnego momentu matematycy posługiwali się intuicyjnym określeniem zbioru i jego elementów. Na pierwszy rzut oka pojęcia te wydają się oczywiste. Okazuje się jednak, że takie intuicyjne podejście prowadzi do paradoksów. Jako pierwszy odkrył je brytyjski matematyk i filozof Bertrand Russel. Postawił on np. pytanie, czy istnieje zbiór, którego elementami byłyby wszystkie zbiory. Intuicja podpowiada, że nie powinno być przeszkód, by taki obiekt istniał. Russel zauważył jednak, że istnienie takiego zbioru implikowałoby również istnienie następującego zbioru

$$z = \{x : x \notin x\}.$$

Nawet w intuicyjnym podejściu do teorii zbiorów uznawano, że musi być spełniony aksjomat podzbiorów (patrz str. 31). Istnienie zbioru z prowadziłoby jednak do następującej równoważności:

$$z \in z \ \Leftrightarrow\ z \notin z.$$

Oczywiście równoważność ta nie ma sensu na gruncie reguł logiki, o których mówiliśmy w poprzednim wykładzie.

Odkrycie tego typu paradoksów doprowadziło matematyków do wniosku, że intuicyjne podejście do teorii zbiorów prowadzi na manowce i niezbędna jest bardzo rygorystyczna metoda aksjomatyczna.

Istnieje zbiór, który nie ma żadnego elementu.

$$\exists x\ \forall y : \sim (y \in x)$$

Można uzasadnić, że zbiór, o którym mowa w powyższym aksjomacie, jest tylko jeden. Załóżmy bowiem, że zbiory x_1 i x_2 są zbiorami, które nie mają żadnych elementów. Zauważmy, że dla każdego y równoważność

$$y \in x_1 \Leftrightarrow y \in x_2$$

jest zdaniem prawdziwym. Oba zdania składowe są bowiem fałszywe dla każdego y. Na podstawie aksjomatu ekstensjonalności stwierdzamy zatem, że $x_1 = x_2$. Jedyny zbiór, który nie ma elementów nazywamy *zbiorem pustym* i oznaczamy $\emptyset$.

- **Aksjomat sumy**

Dla dowolnej rodziny zbiorów r istnieje zbiór u, do którego należą dokładnie te elementy x, które należą do co najmniej jednego spośród zbiorów, które są elementami rodziny r.

$$\forall r\ \exists u\ \forall x :\ (x \in u \Leftrightarrow \exists a : (x \in a \wedge a \in r))$$

Podobnie jak w przypadku poprzedniego aksjomatu można uzasadnić, że dla każdej rodziny zbiorów r istnieje dokładnie jeden zbiór u spełniający warunek powyższy warunek. Nazywamy go sumą rodziny r i oznaczamy $\bigcup r$. Jeśli r jest rodziną skończoną, tzn. $r = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ to sumę rodziny r oznaczamy też $x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$. W szczególności, jeśli $r = \{x, y\}$, to na oznaczenie sumy tej rodziny piszemy $x \cup y$. Czasami się też zdarza, że elementy rodziny r są indeksowane elementami jakiegoś zbioru $\mathcal{I}$, tzn. $r = \{x_\iota :\ \iota \in \mathcal{I}\}$. Wtedy na oznaczenie sumy tej rodziny używamy zapisu $\bigcup\limits_{\iota \in \mathcal{I}} x_\iota$.

- **Aksjomat zbioru potęgowego**

Dla każdego zbioru x istnieje zbiór p, którego elementami są dokładnie podzbiory zbioru x.

$$\forall x\ \exists p\ \forall y :\ (y \in p \Leftrightarrow \forall z :\ (z \in y \Rightarrow z \in x))$$

Można uzasadnić, że dla każdego zbioru x istnieje dokładnie jeden zbiór p opisany w tym aksjomacie. Nazywamy go *zbiorem potęgowym* zbioru x i oznaczamy 2^x.

W szczególności:

– jeśli $x = \emptyset$, to $2^x = \emptyset$,

– jeśli $x = \{a\}$, to $2^x = \{\emptyset, \{a\}\}$,
– jeśli $x = \{a, b\}$, to $2^x = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
– jeśli $x = \{a, b, c\}$, to $2^x = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Można uzasadnić, że jeśli x jest zbiorem skończonym liczącym n elementów, to zbiór 2^x ma 2^n elementów.

- **Aksjomat podzbiorów**

Jeśli p jest formą zdaniową, to dla każdego zbioru a istnieje zbiór tych elementów zbioru a, które spełniają formę p.

$$\forall a\ \exists b\ \forall x:\ x \in b \Leftrightarrow x \in a \wedge p(x)$$

Zbiór b, o którym mowa w tym aksjomacie oznacza się $\{x \in a:\ p(x)\}$.

Przykładowo:

– jeśli $p(x) \equiv x^2 < 5$ i $a = \mathbb{N}$, to $\{x \in \mathbb{N}:\ x^2 < 5\} = \{1, 2\}$,
– jeśli $p(x) \equiv x^2 - 3x + 2 = 0$ i $a = \mathbb{R}$, to $\{x \in \mathbb{R}:\ x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$.

- **Aksjomat wyboru**

Dla każdej rodziny u niepustej zbiorów rozłącznych istnieje zbiór v (tzw. *selektor*), do którego należy dokładnie po jednym elemencie z każdego ze zbiorów należących do rodziny u.

$$\forall u : (\forall x \in u : x \neq \emptyset) \wedge (\forall x, y \in u : x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset) \Rightarrow \exists v\ \forall x \in u\ \exists z : x \cap v = \{z\}$$

W przypadku ograniczenia się do skończonych rodzin zbiorów aksjomat wyboru jest trywialny (wynika z innych aksjomatów). Zastosowany dla nieskończonych rodzin zbiorów również wydaje się intuicyjny, lecz jego konsekwencje bywają zaskakujące. Przykładowo, Stefan Banach i Alfred Tarski korzystając z aksjomatu wyboru udowodnili twierdzenie o paradoksalnym rozkładzie kuli. Orzeka ono, że możliwy jest rozkładu kuli w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej na sześć części, z których można złożyć, korzystając wyłącznie z obrotów i przesunięć, dwie kule o średnicy równej średnicy kuli wyjściowej.

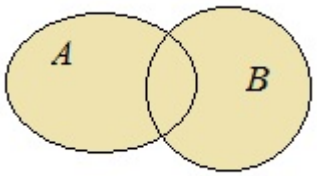
2.3. Działania na zbiorach

2.3.1. Suma zbiorów. Wymieniając aksjomaty teorii mnogości w poprzednim rozdziale wspomnieliśmy o aksjomacie sumy, który gwarantuje nam, że dla każdego zbioru r, którego elementami są zbiory istnieje zbiór, który składa się dokładnie z tych elementów, które należą do

przynajmniej jednego zbioru będącego elementem rodziny r. Zbiór ten nazywamy *sumą* rodziny r. W szczególności, gdy zbiór r jest dwuelementowy, tzn. $r = \{A, B\}$ dla pewnych zbiorów A i B, to istnieje suma zbiorów A i B

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Sumę zbiorów A i B można zilustrować następującym diagramem Venna



Dla n-elementowego układu zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jego sumę oznaczamy $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ albo $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ i definiujemy analogicznie do sumy dwóch zbiorów:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$$

Inaczej można to zapisać w następujący sposób

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x : (\exists\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} : x \in A_i)\}$$

2.4. Iloczyn kartezjański

Rozpocznijmy od zdefiniowania pojęcia pary uporządkowanej[2].

Definicja 2.2. *Parą uporządkowaną* nazywamy taki układ dwóch elementów (niekoniecznie różnych) (x, y), w którym określona jest kolejność tych elementów, tzn. wiadomo, który jest pierwszy, a który drugi.

[2]Na gruncie aksjomatów teorii mnogości można zdefiniować parę uporządkowaną np. tak:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Można wtedy powiedzieć, że x jest pierwszym elementem tak zdefiniowanej pary uporządkowanej, jeśli spełnia warunek:

$$\forall z : z \in (x, y) \Rightarrow x \in z$$

tzn. x jest elementem każdego elementu zbioru definiującego parę (x, y). Definicję tę sformułował polski matematyk Kazimierz Kuratowski.

Nie będziemy kontynuowali tego wątku. Poprzestaniemy na raczej intuicyjnym rozumieniu pary uporządkowanej, które akurat w tym przypadku nie prowadzi do paradoksów.

2.4.1. Przypadek dwóch zbiorów. Możemy teraz zdefiniować iloczyn kartezjański dwóch zbiorów.

Definicja 2.3. *Iloczynem kartezjańskim* (lub *produktem*) zbiorów X i Y nazywamy zbiór $X \times Y$, którego elementami są wszystkie pary uporządkowane (x, y) takie, że pierwszy element x pochodzi ze zbioru X, zaś drugi element y – ze zbioru Y:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}.$$

W przypadku, gdy $Y = X$, będziemy pisali X^2 zamiast $X \times X$.

Przykład 2.4. Niech $X = \{a, b\}$ i $Y = \{i, j\}$. Wtedy iloczyn kartezjański tych zbiorów jest zbiorem tych wszystkich par uporządkowanych, których pierwszym elementem jest a lub b, zaś drugi element to i lub j. Zatem

$$X \times Y = \{(a, i), (a, j), (b, i), (b, j)\}.$$

Zamieniając rolami zbiory X i Y i rozumując podobnie jak poprzednio dostajemy

$$Y \times X = \{(i, a), (i, b), (j, a), (j, b)\}.$$

Uwaga 2.5. Analizując powyższy przykład zauważamy, że na ogół $X \times Y \neq Y \times X$. Z drugiej strony elementy obu tych zbiorów pozostają we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości: parze (x, y) ze zbioru $X \times Y$ odpowiada para (y, x) ze zbioru $Y \times X$.

Przykład 2.6. Obliczmy $X \times Y$, gdzie

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 6x + 5 \leq 0\}, \\ Y &= \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x = 0\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że oba zbiory są skończone. Zbiór X jest zbiorem całkowitych rozwiązań nierówności kwadratowej $x^2 - 6x + 5 \leq 0$. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej występującej w tej nierówności są liczby 1 i 5. Przedział $[1; 5]$ jest zbiorem wszystkich rozwiązań rzeczywistych powyższej nierówności. Oznacza to, że $X = \mathbb{Z} \cap [1, 5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Z kolei zbiór Y jest zbiorem równania $x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x = 0$. Łatwo zauważyć, że

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x &= x(x^3 - 3x^2 - x + 3) = \\ &= x\left[x^2(x - 3) - (x - 3)\right] = \\ &= x(x - 3)(x^2 - 1) = \\ &= x(x - 3)(x - 1)(x + 1). \end{aligned}$$

Mamy zatem $Y = \{-1, 0, 1, 3\}$.

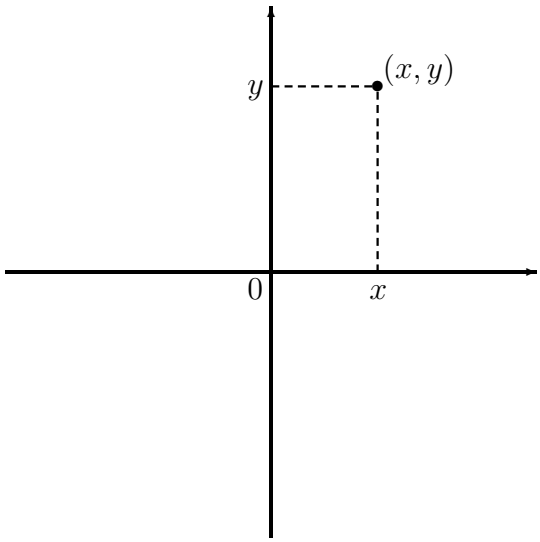
Możemy teraz wyznaczyć iloczyn kartezjański:

$$\begin{aligned} X \times Y &= \{(1,-1),(1,0),(1,1),(1,3),(2,-1),(2,0),(2,1),(2,3),(3,-1),(3,0),\\ &\quad (3,1),(3,3),(4,-1),(4,0),(4,1),(4,3),(5,-1),(5,0),(5,1),(5,3)\} \end{aligned}$$

Przykład 2.7. Niech $X = \{1, 2, 3\}$ i $Y = \{-1, 1, 2\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} X \times Y &= \{(1,-1),(1,1),(1,2),(2,-1),(2,1),(2,2),(3,-1),(3,1),(3,2)\}\\ Y \times X &= \{(-1,1),(-1,2),(-1,3),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\} \end{aligned}$$

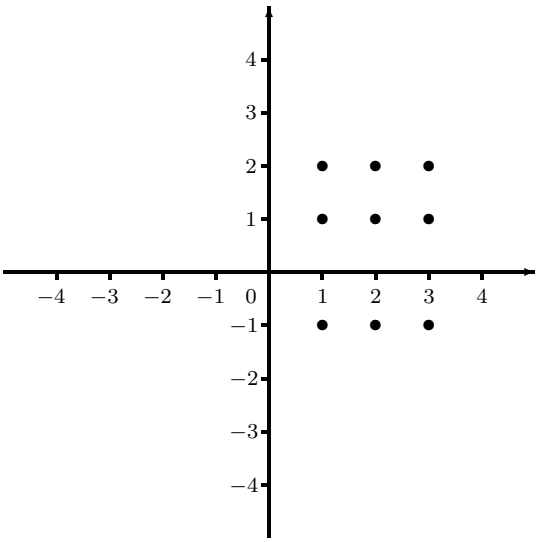
Przykład 2.8. Niech $X = Y = \mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{R}^2$ jest zbiorem wszystkich par uporządkowanych (x, y), gdzie x i y są liczbami rzeczywistymi. Przypomnijmy, że każdą taką parę można utożsamić z pewnym punktem na płaszczyznie wyposażonej w kartezjański układ współrzędnych. Odwrotnie, każdemu takiemu punktowi odpowiada dokładnie jedna para liczb (x, y), gdzie x jest odciętą tego punktu, zaś y – jego rzędną.



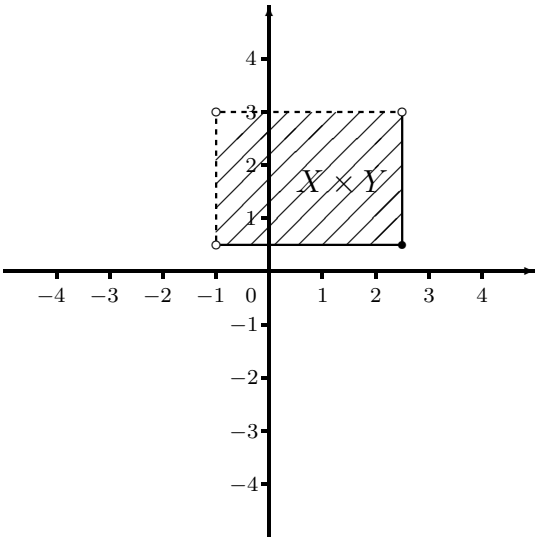
Można więc zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ utożsamić ze zbiorem wszystkich punktów na płaszczyznie.

Wynika stąd, że jeśli $A \subset \mathbb{R}$ i $B \subset \mathbb{R}$, to zbiór $A \times B$ można identyfikować z pewnym podzbiorem płaszczyzny, a jeśli jest dostatecznie regularny, to można go po prostu narysować.

Przykład 2.9. Rozważmy zbiór z Przykładu 2.4. Zgodnie z uwagami zawartymi w poprzednim przykładzie zbiór ten możemy interpretować jako podzbiór płaszczyzny.



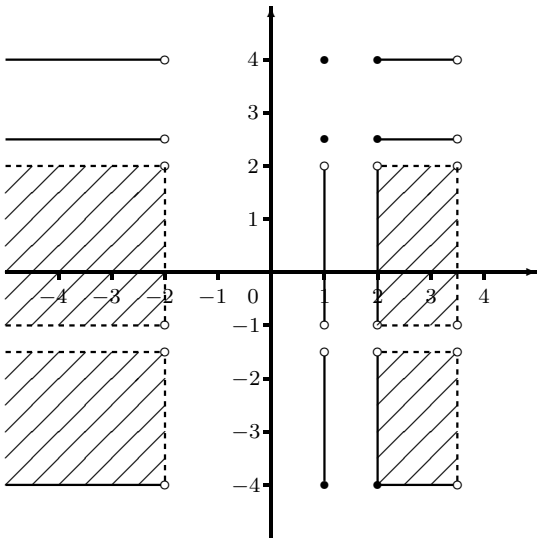
Przykład 2.10. Niech $X = (-1; 2{,}5]$ i $Y = [0{,}5; 3)$[3]. Wtedy iloczyn kartezjański można przedstawić graficznie następująco



Przerywane linie brzegu i niewypełnione kółka w narożnikach oznaczają, że dane punkty nie należą do figury.

Przykład 2.11. Niech $X = (-\infty; -2) \cup \{1\} \cup \left[2; \frac{7}{2}\right)$ i $Y = \left[-4; -1\frac{1}{2}\right) \cup (-1; 2) \cup \left\{\frac{5}{2}, 4\right\}$. Wtedy otrzymujemy następujący rysunek

[3]Dla uniknięcia nieporozumień przedział otwarty o końcach a i b będziemy oznaczali $(a; b)$. Pozwoli to odróżnić przedział od pary uporządkowanej (a, b). Z drugiej strony, nie będziemy bardzo konsekwentni w używaniu tych oznaczeń. W przypadku, gdy nie będzie budziło to nieporozumień, przedział o końcach a i b będziemy oznaczali tradycyjnie (a, b).



Iloczyn kartezjański posiada następującą własność jednoznaczności

Twierdzenie 2.12. *Dla dowolnych zbiorów A, B, C, D prawdziwa jest następująca równoważność:*

$$A \times B = C \times D \Leftrightarrow A = C \wedge B = D.$$

Ponadto, można wykazać następujące tożsamości:

2.4.2. Przypadek trzech zbiorów. Dla trzech zbiorów X, Y, Z iloczyn kartezjański $X \times Y \times Z$ określamy jako

$$X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z.$$

Z formalnego punktu widzenia elementy tego zbioru są postaci $((x, y), z)$, czyli pary uporządkowane, których pierwszym elementem jest para uporządkowana (x, y), a drugim – element z zbioru Z. Praktycznie, możemy utożsamiać takie obiekty z trójkami uporządkowanymi (x, y, z). Podobnie jak w parach uporządkowanych, w trójkach też określona jest dokładnie kolejność elementów. Wiadomo, który element jest pierwszy, który drugi, a który trzeci. Wynika z tego, że np.

$$(1, 2, 3) \neq (2, 3, 1),$$

bo mimo, że obie trójki składają się z tych samych elementów, to różnią się ich kolejnością.

Przykład 2.13. Niech $X = \{1, 2\}$, $Y = \{x, y\}$ i $Z = \{a, b\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} X \times Y \times Z &= \{(1, x, a), (1, x, b), (1, y, a), (1, y, b), (2, x, a), (2, x, b), (2, y, a), (2, y, b)\} \\ Z \times Y \times X &= \{(a, x, 1), (a, x, 2), (a, y, 1), (a, y, 2), (b, x, 1), (b, x, 2), (b, y, 1), (b, y, 2)\} \end{aligned}$$

Przykład 2.14. Niech $X = \{1, 2\}$, $Y = \{\{x, y\}\}$ i $Z = \{a, b\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} X \times Y \times Z &= \{(1, \{x, y\}, a), (1, \{x, y\}, b), (2, \{x, y\}, a), (2, \{x, y\}, b)\} \\ Y \times Z \times X &= \{(\{x, y\}, a, 1), (\{x, y\}, a, 2), (\{x, y\}, b, 1), (\{x, y\}, b, 2)\} \end{aligned}$$

Przykład 2.15. Niech $X = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, $Y = \{a, \{a\}\}$ i $Z = \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} &X \times Y \times Z = \\ &= \{(\varnothing, a, \{\varnothing\}), (\varnothing, a, \{\{\varnothing\}\}), (\varnothing, \{a\}, \{\varnothing\}), (\varnothing, \{a\}, \{\{\varnothing\}\}), (\{\varnothing\}, a, \{\varnothing\}), \\ &\quad (\{\varnothing\}, a, \{\{\varnothing\}\}), (\{\varnothing\}, \{a\}, \{\varnothing\}), (\{\varnothing\}, \{a\}, \{\{\varnothing\}\}), (\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, a, \{\varnothing\}), \\ &\quad (\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, a, \{\{\varnothing\}\}), (\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{a\}, \{\varnothing\}), (\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{a\}, \{\{\varnothing\}\})\} \end{aligned}$$

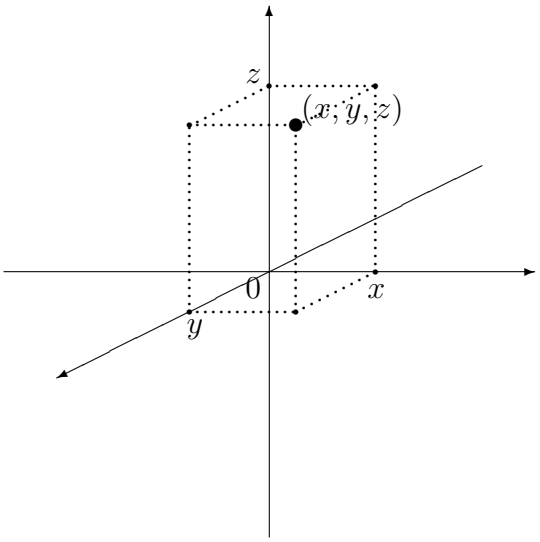
Podobnie jak w przypadku dwóch zbiorów będziemy pisać X^3 zamiast $X \times X \times X$ w przypadku, gdy $X = Y = Z$.

Przykład 2.16. Niech $X = \{0, 1\}$. Wtedy

$$\{0, 1\}^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

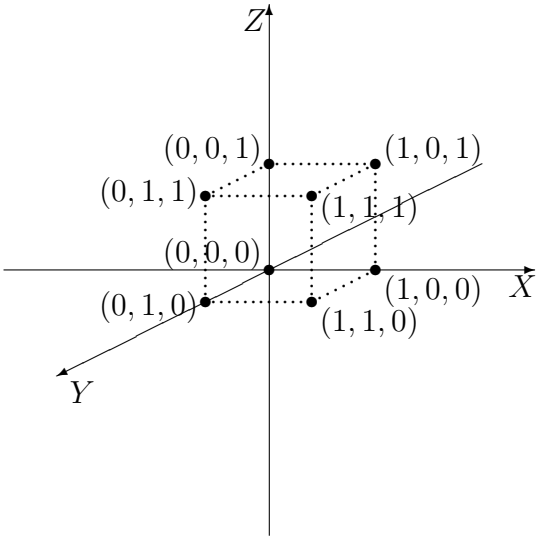
Zbiór składa się zatem ze wszystkich ciągów zerojedynkowych długości 3.

Przykład 2.17. Niech $X = Y = Z = \mathbb{R}$. Podobnie jak w Przykładzie 2.7 zauważamy, że uporządkowane trójki liczb rzeczywistych (x, y, z) odpowiadają punktom w przestrzeni wyposażonej w kartezjański układ współrzędnych złożony z trzech osi liczbowych.



Zatem iloczyn kartezjański $\mathbb{R}^3$ można utożsamiać z całą przestrzenią.

Przykład 2.18. Analiza poprzedniego przykładu prowadzi do wniosku, że jeśli $X, Y, Z \subset \mathbb{R}$, to iloczyn kartezjański $X \times Y \times Z$ jest pewnym podzbiorem przestrzeni. Na przykład zbiór $\{0,1\}^3$ z Przykładu 2.11 można zilustrować następującym rysunkiem



Przykład 2.19. Z kolei zbiór $[0;1]^3$ (zwany *kostką trójwymiarową*) można utożsamić z sześcianem, którego wierzchołkami są punkty ze zbioru $\{0,1\}^3$.

2.4.3. Przypadek dowolnej skończonej ilości zbiorów. Niech teraz n będzie dowolną liczbą naturalną. Przypuśćmy, że mamy n zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Iloczyn kartezjański tych zbiorów definiujemy następująco

Definicja 2.20. *Iloczynem kartezjańskim* zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nazywamy zbiór

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in X_i \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Symbol $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oznacza tutaj uporządkowany układ n elementów. Taki układ nazywamy też po prostu *ciągiem* n-elementowym lub ciągiem długości n. Ważne jest tutaj, że pierwszy element w tym ciągu musi pochodzić ze zbioru X_1, drugi – ze zbioru X_2, itd.

Czasami zamiast pisać $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ będziemy używać oznaczenia $\prod_{i=1}^{n} X_i$.

Jeśli wszystkie zbiory X_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$ są identyczne i równe zbiorowi X, to na oznaczenie ich iloczynu kartezjańskiego będziemy pisali X^n.

Przykład 2.21. Zbiór $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem wszystkich n-elementowych ciągów złożonych z liczb rzeczywistych. Przypomnijmy, pewne przypadki szczególne:

- $n = 1$. Wtedy zbiór ten jest tożsamy po prostu ze zbiorem $\mathbb{R}$, który geometrycznie interpretujemy jako zbiór punktów na osi liczbowej.
- $n = 2$. W Przykładzie 2.7 pokazaliśmy, że zbiór ten można utożsamić z płaszczyzną wyposażoną w kartezjański układ współrzędnych.
- $n = 3$. Wtedy zbiór ten można utożsamić z przestrzenią, co pokazaliśmy w Przykładzie 2.15.

Nawiązując do tych szczególnych przypadków, w których poszczególne zbiory $\mathbb{R}^n$ miały interpretacje geometryczne, możemy nadać również interpretację geometryczną zbiorowi $\mathbb{R}^n$ dla dowolnego n. Zbiór $\mathbb{R}^n$ będziemy zatem odtąd nazywać n-wymiarową *przestrzenią euklidesową*.

Przykład 2.22. Nawiązując do poprzedniego przykładu, zbiór $[0; 1]^n$ można interpretować jako podzbiór n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Zbiór ten nazywamy *kostką n-wymiarową*.

ROZDZIAŁ 3

Relacje i funkcje

3.1. Relacje

Pojęcie relacji jest bardzo często spotykanym pojęciem zarówno w matematyce jak i w innych dziedzinach życia. Potocznie, jeśli mówimy, że jakieś dwa obiekty pozostają ze sobą w relacji, to dajemy do zrozumienia, że jest między nimi jakaś zależność. Mówimy np. że wasal był w relacji podległości wobec swojego suwerena, brat i siostra pozostają ze sobą w relacji pokrewieństwa, itp.

W matematyce pojęcie relacji definiujemy następująco:

Definicja 3.1. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. *Relacją* na zbiorze X nazywamy dowolny podzbiór $\rho \in X^2$.

Jeśli $(x, y) \in \rho$ dla pewnych elementów $x, y \in X$, to mówimy, że element x *pozostaje w relacji* ρ z elementem y i zapisujemy to $x\rho y$.

Przykład 3.2. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Następujące trzy podzbiory w $X \times X$ są w świetle powyższej definicji relacjami:

(1) $\varnothing \subset X \times X$
(2) $\nabla_X = \{(x, x) : x \in X\}$
(3) $\Delta_X = X \times X$

Relacja $\varnothing$ ma tę własność, że żadne elementy nie pozostają ze sobą w tej relacji.

Relacja ∇_X jest po prostu relacją równości elementów w zbiorze X, ponieważ, jak łatwo zauważyć

$$(x, y) \in \nabla_X \Leftrightarrow x = y.$$

Z kolei relacja Δ_X ma tę własność, że każde dwa elementy pozostają ze sobą w tej relacji.

Przykład 3.3. Niech $X = \{1, 2, 3, 4\}$ i niech

$$\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$

Zauważmy, że dla dowolnych elementów $x, y \in X$

$$x \rho y \Leftrightarrow x \leq y$$

Przykład 3.4. Dla dowolnego podzbioru $X \subset \mathbb{R}$ definiujemy następujące relacje:

(1) $\{(x, y) \in X^2 : x \leq y\}$,
(2) $\{(x, y) \in X^2 : x < y\}$,
(3) $\{(x, y) \in X^2 : x = y\}$,
(4) $\{(x, y) \in X^2 : x \neq y\}$.

Definicja 3.5. Mówimy, że relacja $\rho \in X^2$ jest;

- *zwrotna*, jeśli $\forall\, x \in X : x \rho x$,
- *symetryczna*, jeśli $\forall\, x, y \in X : x \rho y \Rightarrow y \rho x$,
- *antysymetryczna*, jeśli $\forall\, x, y \in X : (x \rho y \wedge y \rho x) \Rightarrow x = y$
- *przechodnia*, jeśli $\forall\, x, y, z \in X : (x \rho y \wedge y \rho z) \Rightarrow x \rho z$,
- *spójna*, jeśli $\forall\, x, y \in X : x \rho y \vee y \rho x$.

Przykład 3.6. Rozważmy relacje opisane w Przykładzie 3.2.

- Relacja $\varnothing$ [1]
  - nie jest zwrotna, bo zdanie $x \varnothing x$ jest fałszywe dla każdego $x \in X$;
  - jest symetryczna – implikacja $x \varnothing y \Rightarrow y \varnothing x$ jest prawdziwa dla każdych x, y, bo jej poprzednik jest zdaniem fałszywym;
  - jest antysymetryczna – implikacja $x \varnothing y \wedge y \varnothing x \Rightarrow x = y$ jest prawdziwa dla każdych x, y, bo jej poprzednik jest zdaniem fałszywym;
  - jest przechodnia – implikacja $x \varnothing y \wedge y \varnothing z \Rightarrow x \varnothing z$ jest prawdziwa dla każdych x, y, z, bo jej poprzednik jest zdaniem fałszywym;
  - nie jest spójna, bo oba zdania $x \varnothing y$ i $y \varnothing x$ są fałszywe dla każdych $x, y \in X$.
- Relacja ∇_X (piszemy też ∇)[2]
  - jest zwrotna, bo $x \nabla x$ dla każdego $x \in X$;
  - jest symetryczna – jeśli $x \nabla y$, to $x = y$ (patrz Przykład 3.2), zatem prawdziwe jest również zdanie $y \nabla x$;
  - jest antysymetryczna – prawdziwość zdań $x \nabla y$ i $y \nabla x$ jest możliwa tylko w przypadku, gdy $x = y$;

[1] Przypomnijmy, że dla każdych $x, y \in X$ zdanie $x \varnothing y$ jest fałszywe.
[2] Przypomnijmy, że $x \nabla y \Leftrightarrow x = y$.

  - jest przechodnia – jeśli $x \nabla y$ i $y \nabla z$, to $x = y$ i $y = z$, więc $x = z$, co oznacza, że $x \nabla z$;
  - nie jest spójna, bo zdanie $x \nabla y$ jest fałszywe dla każdej pzry elementów x, y takich, że $x \neq y$.
- Relacja Δ_X (albo po prostu Δ)[3]
  - jest zwrotna, bo $x \Delta x$ dla każdego $x \in X$;
  - jest symetryczna – ponieważ $y \Delta x$ dla każdych x, y, również implikacja $x \Delta y \Rightarrow y \Delta x$ jest prawdziwa dla wszystkich par x, y;
  - nie jest antysymetryczna – ponieważ $x \Delta y$ i $y \Delta x$ dla każdych x, y, to gdy $x \neq y$ implikacja $x \Delta y \wedge y \Delta x \Rightarrow x = y$ jest zdaniem fałszywym;
  - jest przechodnia – ponieważ $x \Delta z$ dla każdych x, z, to implikacja $x \Delta y \wedge y \Delta z \Rightarrow x \Delta z$ jest prawdziwa dla każdych x, y, z;
  - jest spójna, bo zdanie $x \Delta y$ jest prawdziwe dla każdej pzry elementów x, y.

	$\varnothing$	∇_X	Δ_X
zwrotna	nie	tak	tak
symetryczna	tak	tak	tak
antysymetryczna	tak	tak	nie
przechodnia	tak	tak	tak
spójna	nie	nie	tak

Przykład 3.7. Załóżmy, że $X = \mathbb{R}$ i prześledźmy własności relacji z Przykładu 3.4.

- Relacja $\leq$
  - jest zwrotna, bo $x \leq x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$;
  - nie jest symetryczna, bo np. $0 \leq 1$, ale nieprawda, że $1 \leq 0$;
  - jest antysymetryczna, bo z tego, że $x \leq y$ i $y \leq x$ wynika, że $x = y$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$;
  - jest przechodnia – wynika to z oczywistej obserwacja, że jeśli $x \leq y$ i $y \leq z$, to $x \leq z$;
  - jest spójna, bo dla każdych dwóch liczb rzeczywistych x, y spełniona jest przynajmniej jedna z nierówności $x \leq y$ i $y \leq x$.
- Relacja $<$
  - nie jest zwrotna, bo zdanie $x < x$ jest fałszywe dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$;

[3] $x \Delta y$ dla każdych $x, y \in X$.

  - nie jest symetryczna (podobnie jak $\leq$);
  - jest antysymetryczna, bo nie ma dwóch różnych liczb x i y takich, że $x < y$ i $y < x$;
  - jest przechodnia (podobnie jak $\leq$);
  - nie jest spójna, ponieważ żadna liczba x nie pozostaje w relacji $<$ z liczbą x.
- Relacja $=$ nie jest niczym innym niż relacja $\nabla_{\mathbb{R}}$ opisana w poprzednim przykładzie.
- Relacja $\neq$
  - nie jest zwrotna, bo zdanie $x \neq x$ jest fałszywe dla każdego x;
  - jest symetryczna, bo z tego, że $x \neq y$ wynika, że $y \neq x$;
  - nie jest antysymetryczna, bo dla każdych x, y takich, że $x \neq y$ implikacja $x \neq y \wedge y \neq x \Rightarrow x = y$ jest fałszywa;
  - nie jest przechodnia – jeśli przyjmiemy $x = 0$, $y = 1$ i $z = 0$, to zdania $x \neq y$ i $y \neq z$ są prawdziwe, ale zdanie $x \neq z$ jest fałszywe. Zatem implikacja $(x \neq y \wedge y \neq z) \Rightarrow x \neq z$ jest wtedy fałszywa;
  - nie jest spójna, bo dla każdej pary elementów x, y takich, że $x = y$, żadne ze zdań $x \neq y$ i $y \neq x$ nie jest prawdziwe.

	$\leq$	$<$	$=$	$\neq$
zwrotna	tak	nie	tak	nie
symetryczna	nie	nie	tak	tak
antysymetryczna	tak	tak	tak	nie
przechodnia	tak	tak	tak	nie
spójna	tak	nie	nie	nie

Przykład 3.8. Niech $X = \mathbb{N}$. Mówimy, że liczba naturalna x jest *dzielnikiem* liczby naturalnej y (albo liczba y jest *podzielna* przez x), jeśli $y = ux$ dla pewnej liczby naturalnej u. Piszemy wtedy $x|y$. Można więc zapisać

$$x|y \Leftrightarrow \exists\, u \in \mathbb{N} : y = ux.$$

Relacja podzielności

- jest zwrotna – każda liczba naturalna x jest swoim dzielnikiem, bo $x = 1 \cdot x$, zatem $x|x$;
- nie jest symetryczna, bo np. $2|4$, ale nie jest prawdą, że $4|2$;

- jest antysymetryczna – jeśli $x|y$ i $y|x$, to istnieją liczby u i w takie, że $y = ux$ i $x = wy$; stąd zaś wynika równość $x = w(ux) = (wu)x$, która prowadzi do wniosku, że $wu = 1$. Ponieważ w i u są liczbami naturalnymi, to $w = u = 1$, czyli $y = 1x = x$;
- jest przechodnia – jeśli $x|y$ i $y|z$, to istnieją liczby u i w takie, że $y = ux$ i $z = wy$, stąd zaś wynika $z = w(ux) = (wu)x$, czyli $x|z$;
- nie jest spójna, bo np. $\sim 2|3$ i $\sim 3|2$.

Przykład 3.9. Niech A będzie dowolnym zbiorem niepustym i niech $X = 2^A$ (zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A). Elementy zbioru X są podzbiorami zbioru A. Podzbiór x pozostaje z podzbiorem y w relacji *inkluzji* (albo *zawierania*), jeśli $x \subset y$.

Relacja $\subset$

- jest zwrotna, bo każdy podzbiór $x \subset A$ jest swoim podzbiorem, tzn. $x \subset x$;
- nie jest symetryczna, bo np. $\varnothing \subset A$, ale $A \not\subset \varnothing$;
- jest antysymetryczna – jeśli $x \subset y$ i $y \subset x$, to $x = y$;
- jest przechodnia – jeśli $x \subset y$ i $y \subset z$, to $x \subset z$;
- nie jest spójna, pod warunkiem, że zbiór A ma przynajmniej dwa elementy – niech $x = \{a\}$, $y = \{b\}$, gdzie $a, b \in A$ takie, że $a \neq b$; wtedy $x \not\subset y$ i $y \not\subset x$.

Analizując wymienione w Definicji 3.5 własności możemy zauważyć różne między nimi zależności. Niektóre z nich są wymienione w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 3.10. *Niech ρ będzie dowolną relacją na niepustym zbiorze X.*

(1) *ρ jest zwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy $\nabla_X \subset \rho$.*
(2) *Jeśli ρ jest spójna, to ρ jest zwrotna.*
(3) *Jeśli ρ jest symetryczna i spójna, to $\rho = \Delta_X$.*
(4) *Relacja ρ jest symetryczna i antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho = \nabla_X$.*

Szczególną rolę w naszych dalszych rozważaniach będą odgrywały dwa typy relacji:

- relacje typu równoważności
- relacje porządku.

3.1.1. Relacje typu równoważności.

Rozpocznijmy od następującej definicji.

Definicja 3.11. Relację $\rho \subset X^2$ nazywamy *relacją typu równoważności*, jeśli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Przykład 3.12. Spośród relacji wymienionych w Przykładach 3.2 i 3.4 relacjami typu równoważności są: ∇_X, Δ_X, $=$.

Przykład 3.13. (Kongruencje) Niech $X = \mathbb{Z}$ (zbiór liczb całkowitych). Ustalmy liczbę $p \in \mathbb{N}$ taką, że $p > 2$. Mówimy, że liczby całkowite x i y przystają modulo p, jeśli różnica $x - y$ jest podzielna przez p. Zapisujemy to

$$x \equiv y \pmod{p}.$$

Tak określoną relację nazywa się czasami relacją *kongruencji*. Symbolicznie jej definicję możemy zapisać następująco

$$x \equiv y \pmod{p} \quad \Leftrightarrow \quad p|x - y$$

albo

$$x \equiv y \pmod{p} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : \, x - y = kp. \tag{3.1}$$

Wykażemy, że relacja ta jest relacją typu równoważności.

- Zwrotność. Dla każdego $x \in \mathbb{Z}$ prawdziwe są równości

  $$x - x = 0 = 0 \cdot p$$

  zatem $x \equiv x \pmod{p}$.
- Symetryczność. Jeśli $x \equiv y \pmod{p}$, to $x - y = kp$ dla pewnej liczby $k \in \mathbb{Z}$. Stąd zaś wynika, że

  $$y - x = -(x - y) = -kp = (-k) \cdot p.$$

  Z warunku (3.1) wynika więc, że $y \equiv x \pmod{p}$.
- Przechodniość. Załóżmy, że $x \equiv y \pmod{p}$ i $y \equiv z \pmod{p}$. Z warunku (3.1) wynika więc, że istnieją liczby $k, l \in \mathbb{Z}$ takie, że

  $$x - y = kp \qquad \text{i} \qquad y - z = lp.$$

  Stąd otrzymujemy

  $$x - z = x - y + y - z = (x - y) + (y - z) = kp + lp = (k + l)p.$$

  Ponowne zastosowanie warunku (3.1) prowadzi więc do wniosku, że $x \equiv z \pmod{p}$.

Przykład 3.14. Niech X będzie zbiorem wszystkich ludzi mieszkających na Ziemi. Na zbiorze tym definiujemy następującą relację ρ. Niech $x, y \in X$, a więc x i y są dwojgiem ludzi. Określamy

$$x \rho y \;\Leftrightarrow\; \text{gdy } x \text{ urodził się w tym samym roku kalendarzowym co } y.$$

Zbadajmy jej własności:

- Zwrotność. Ta własność jest oczywista.

- Symetryczność. To też jest oczywiste. Jeśli x urodził się w tym samym roku co y, to jasne, że y urodził się w tym samym roku co x.
- Przechodniość. Jeśli x urodził się w tym samym roku co y i y urodził się w tym samym roku co z, to znaczy, że wszystcy urodzili się w tym samym roku. W szczególności prawdą jest, że x urodził się w tym samym roku co z.

Zatem ρ jest relacją równoważności.

Przykład 3.15. Niech $X = \mathbb{R}$. Relacja ρ zdefiniowana jest następująco:

$$x\rho y \;\Leftrightarrow\; |x-y| \leq 1.$$

Sprawdźmy, czy relacja ta jest relacją równoważności:

- Zwrotność. Oczywiście $|x-x| = 0 \leq 1$, zatem $x\rho x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
- Symetryczność. To też jest oczywiste. Jeśli x urodził się w tym samym roku co y, to jasne, że y urodził się w tym samym roku co x.
- Przechodniość. Relacja ta **nie jest** przechodnia. Wynika to z faktu, że np. $0\rho 1$ i $1\rho 2$, ale $\sim (0\rho 2)$.

Rozważana relacja nie jest zatem relacją równoważności.

Definicja 3.16. Niech $\rho \subset X \times X$ będzie relacją typu równoważności. Jeśli $x \in X$, to *klasą abstrakcji* elementu x nazywamy podzbiór

$$[x]_\rho = \{y \in X : y\rho x\} \subset X. \tag{3.2}$$

Twierdzenie 3.17. *Jeśli ρ jest relacją typu równoważności, to klasy abstrakcji relacji ρ mają następujące własności:*

(1) $\forall\, x \in X : x \in [x]_\rho$,
(2) $\forall\, x, y \in X : [x]_\rho = [y]_\rho \vee [x]_\rho \cap [y]_\rho = \emptyset$,
(3) $\bigcup_{x\in X} [x]_\rho = X$.

DOWÓD. (1) Wynika to z tego, że $x\rho x$ (zwrotność!). Każda klasa abstrakcji jest zatem niepustym podzbiorem zbioru X.

(2) Należy wykazać, że jeśli $[x]_\rho \cap [y]_\rho \neq \emptyset$, to $[x]_\rho = [y]_\rho$. Załóżmy zatem, że część wspólna klas abstrakcji elementów x i y jest niepusta. Oznacza to, że istnieje element $z \in [x]_\rho \cap [y]_\rho$.

Element z należy zatem jednocześnie do obu klas abstrakcji, więc z określenia (3.2) wynika, że jednocześnie

(3.3) $$z\rho x$$

(3.4) $$z\rho y$$

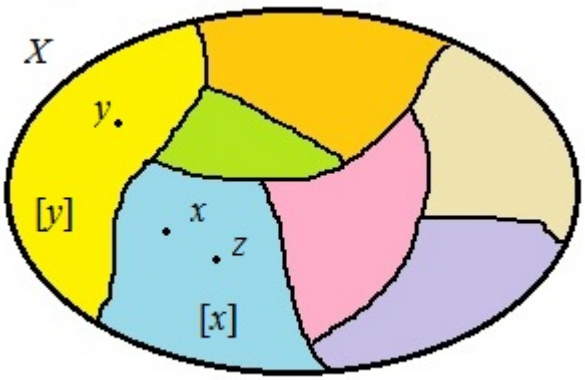
Wykażemy, że $[x]_\rho \subset [y]_\rho$. Ponieważ relacja ρ jest symetryczna, to z (3.3) wynika, że $x\rho z$. Teraz skorzystamy z przechodniości: z tego, że $x\rho z$ i $z\rho y$ (patrz (3.4)) wynika

(3.5) $$x\rho y.$$

Niech teraz $w \in [x]_\rho$. Z określenia (3.2) wynika, że $w\rho x$. Uwzględniając (3.5) i przechodniość relacji ρ wnioskujemy, że $w\rho y$. Oznacza to, że $w \in [y]_\rho$. Wykazaliśmy więc, że każdy element w klasy abstrakcji $[x]_\rho$ należy także do klasy $[y]_\rho$, więc $[x]_\rho \subset [y]_\rho$. Podobnie wykazujemy, że $[y]_\rho \subset [x]_\rho$. Zawierania $[x]_\rho \subset [y]_\rho$ i $[y]_\rho \subset [x]_\rho$ implikują równość $[x]_\rho = [y]_\rho$.

(3) Wynika to bezpośrednio z punktu (1). □

Powyższe twierdzenie należy interpretować w ten sposób, że każda relacja typu równoważności dzieli cały zbiór X na rozłączne "kawałki", którymi są właśnie klasy abstrakcji.



Na powyższym rysunku zilustrowaliśmy fakt, że klasa abstrakcji elementu x składa się ze wszystkich elementów, które pozostają w relacji ρ z elementem x: mamy tutaj zarówno $x\rho x$ jak i $z\rho x$. Ponieważ y nie jest w relacji z elementem x, to klasy abstrakcji $[x]_\rho$ i $[y]_\rho$ są rozłączne.

Definicja 3.18. Zbiór wszystkich klas abstrakcji względem relacji typu równoważności ρ nazywamy *zbiorem ilorazowym* zbioru X względem relacji ρ i oznaczamy X/ρ.

Przykład 3.19. Rozważmy relację równoważności ∇_X z Przykładu 3.12. Z określenia tej relacji wynika, że x pozostaje w tej relacji z elementem y wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$. Oznacza to,

że klasa abstrakcji każdego elementu x jest jednoelementowa i składa się właśnie z tego jedynego elementu x

$$[x]_{\nabla_X} = \{x\}, \qquad x \in X.$$

Ponieważ wszystkie klasy abstrakcji relacji ∇_X są jednoelementowe, to zbiór ilorazowy X/∇_X można utożsamić ze zbiorem X.

Przykład 3.20. Rozważamy teraz relację Δ_X z Przykładu 3.12. Z określenia tej relacji wynika, że każde dwa elementy zbioru X pozostają ze sobą w tej relacji. Klasa abstrakcji każdego elementu składa się więc ze wszystkich elementów zbioru X, co oznacza, że jest tylko jedna klasa abstrakcji. Zbiór X/Δ_X jest więc jednoelementowy.

Przykład 3.21. Rozważmy relację kongruencji zdefiniowaną w Przykładzie 3.13.

Niech np. $p = 2$. Łatwo zauważyć, że dwie liczby całkowite x i y pozostają ze sobą w relacji wtedy i tylko wtedy, gdy obie te liczby są parzyste lub gdy obie są nieparzyste. Wynikają stąd następujące równości

$$\begin{aligned} \ldots = [-4] = [-2] = [0] = [2] = [4] = \ldots &= \text{zbiór liczb parzystych} \\ \ldots = [-3] = [-1] = [1] = [3] = [5] = \ldots &= \text{zbiór liczb nieparzystych} \end{aligned}$$

Jak widać, zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ rozpadł się na dwie klasy abstrakcji:

$$\mathbb{Z}/\rho = \{[0], [1]\} = \{\mathbb{P}, \mathbb{Z} \setminus \mathbb{P}\}$$

gdzie przez $\mathbb{P}$ oznaczyliśmy zbiór liczb parzystych.

Jeśli $p = 3$, to mamy następujące równości:

$$\begin{aligned} \ldots = [-6] = [-3] = [0] = [3] = [6] = \ldots &= \{3k : k \in \mathbb{Z}\} \\ \ldots = [-5] = [-2] = [1] = [4] = [7] = \ldots &= \{3k+1 : k \in \mathbb{Z}\} \\ \ldots = [-4] = [-1] = [2] = [5] = [8] = \ldots &= \{3k+2 : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Zbiór liczb całkowitych, które są postaci $3k$ dla $k \in \mathbb{Z}$, czyli zbiór liczb podzielnych przez 3 oznacza się czasami $3\mathbb{Z}$. Podobnie zbiór liczb postaci $3k+1$ oznacza się symbolem $3\mathbb{Z}+1$, a zbiór liczb postaci $3k+2$ symbolem $3\mathbb{Z}+2$. Zbiór ilorazowy względem relacji kongruencji, gdy $p = 3$, wygląda więc następująco

$$\mathbb{Z}/\rho = \{3\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}+1, 3\mathbb{Z}+2\}.$$

Powyższe klasy abstrakcji można scharakteryzować w jeszcze jeden sposób: $3\mathbb{Z}$ to liczby całkowite, które są podzielne przez 3, $3\mathbb{Z}+1$ to liczby, które dają resztę 1 przy dzieleniu przez 3, zaś $3\mathbb{Z}+2$ składa się z liczb, które dają resztę 2.

Dla dowolnej liczby naturalnej p i dowolnej liczby $r \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ oznaczamy przez $p\mathbb{Z}+r$ zbiór liczb calkowitych postaci $pk+r$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, czy zbiór liczb, które przy

dzieleniu przez p dają resztę r. Zbiór klas abstrakcji zbioru liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ względem relacji przystawania modulo p składa się z p elementów:

$$\mathbb{Z}/\rho = \{p\mathbb{Z}, p\mathbb{Z}+1, p\mathbb{Z}+2, \ldots, p\mathbb{Z}+p-1\}$$

Uwaga 3.22. Rozważanie klas abstrakcji można utożsamiać z procesem "sklejania" pewnych grup elementów zbioru X w jeden element.

Na przykład relacja przystawania modulo 2 "skleja" wszystkie liczby parzyste w jeden element i wszystkie liczby nieparzyste w drugi element.

3.2. Funkcje

Intuicyjnie funkcja oznacza pewną zależność między dwiema wielkościami lub cechami. Jeśli mówimy np. że wynik egzaminu jest funkcją czasu poświęconego na naukę, to mamy na myśli, że wynik egzaminu *zależy* od tego, ile czasu poświęcimy na naukę przed egzaminem.

3.2.1. Definicja funkcji.

W matematyce przyjmujemy następującą definicję.

Definicja 3.23. Niech X i Y będą dowolnymi zbiorami. Funkcją działającą ze zbioru X w zbiór Y nazywamy dowolny podzbiór $f \subset X \times Y$ (patrz Definicja 2.3) spełniający następujące dwa warunki:

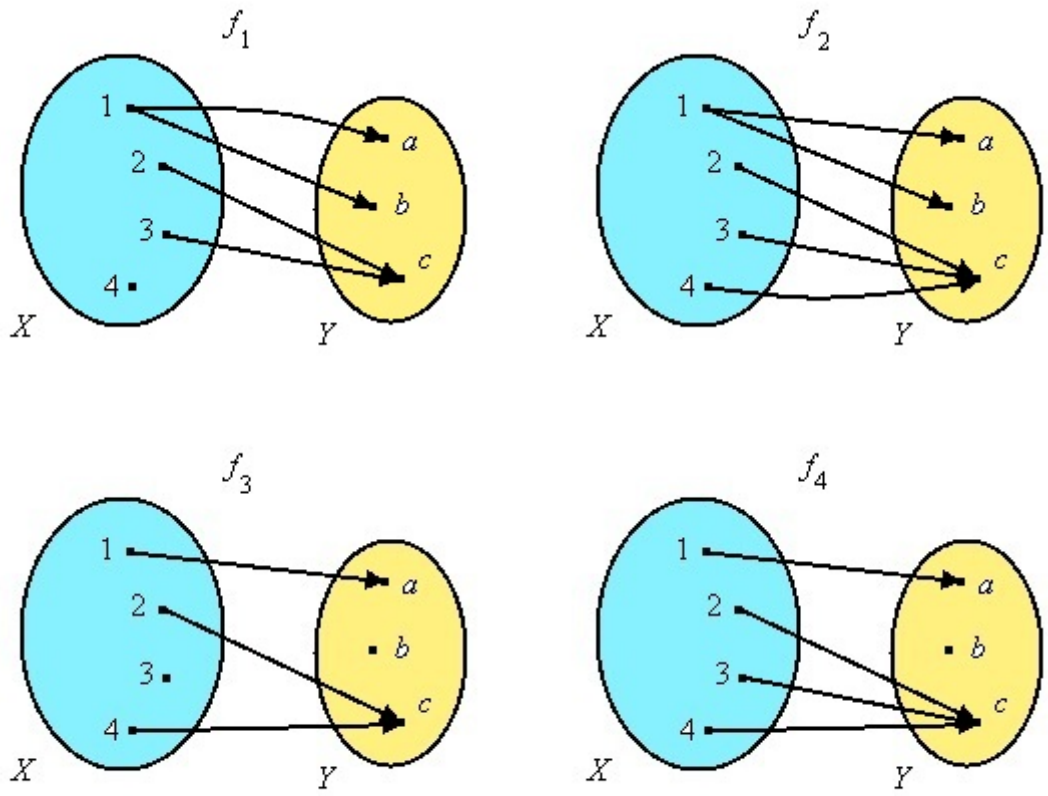
(i) $\forall\, x \in X\ \exists\, y \in Y : (x,y) \in f$.
Dla każdego $x \in X$ istnieje element $y \in Y$ taki, że $(x,y) \in f$

(ii) $\forall\, x \in X\ \forall\, y_1, y_2 \in Y : ((x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f) \Rightarrow y_1 = y_2$
Dla każdego $x \in X$ istnieje co najwyżej jeden element $y \in Y$ taki, że $(x,y) \in f$.

Przykład 3.24. Niech $X = \{1,2,3,4\}$ i $Y = \{a,b,c\}$. Rozważmy następujące podzbiory iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$:

$$\begin{aligned} f_1 &= \{(1,a),(1,b),(2,c),(3,c)\} \\ f_2 &= \{(1,b),(1,b),(2,c),(3,c),(4,c)\} \\ f_3 &= \{(1,a),(2,c),(4,c)\} \\ f_4 &= \{(1,a),(2,c),(3,c),(4,c)\} \end{aligned}$$

Podzbiory możemy graficznie zilustrować w następujący sposób



Spójrzmy dla przykładu na rysunek ilustrujący podzbiór f_1. Każdy jego element będący parą składającą się z elementu zbioru X i elementu zbioru Y reprezentowany jest przez strzałkę wychodzącą z odpowiedniego elementu zbioru X do odpowiedniego elemenetu zbioru Y. Para $(1, a)$ reprezentowana jest przez strzałkę wychodzącą z 1 i dochodzącą so a, para $(1, b)$ to strzałka wychodząca z 1 i dochodząca do b, itd. Przy takiej interpretacji warunek (i) w Definicji 3.23 można sformułować następująco:

(i') *Z każdego punktu zbioru X wychodzi przynajmniej jedna strzałka.*

Łatwo zauważyć, że tylko zbiory f_2 i f_4 spełniają ten warunek.
Z kolei warunek (ii) w Definicji 3.23 formułujemy następująco:

(ii') *Z każdego punktu zbioru X wychodzi co najwyżej jedna strzałka.*

Ten warunek spełniają tylko zbiory f_3 i f_4.
Z powyższych czterech zbiorów tylko f_4 jest zatem funkcją.

Uwaga 3.25. Zauważmy, że jednoczesne spełnienie obu warunków (i') i (ii') równoważne jest następującemu warunkowi:

Z każdego punktu zbioru X wychodzi dokładnie jedna strzałka.

Wniosek 3.26. *Podzbiór $f \subset X \times Y$ jest funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego elementu $x \in X$ istnieje* dokładnie *jeden element $y \in Y$ taki, że $(x, y) \in f$, tzn.*

$$\forall\, x\ \exists!\, y:\ (x, y) \in f$$

3.2.2. Dziedzina, przeciwdziedzina, argumenty i wartości. Jeśli $f \subset X \times Y$ jest funkcją, to zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji f, zaś zbiór Y – jej *przeciwdziedziną*. Kierunek działania funkcji ze zbioru X w zbiór Y zaznaczamy symbolicznie

$$f : X \to Y$$

Elementy dziedziny X nazywamy *argumentami* funkcji f. Z Wniosku 3.26 wynika, że dla każdego argumentu x istnieje dokładnie jeden element $y \in Y$ taki, że $(x, y) \in f$. Element ten oznaczamy $f(x)$ i nazywamy *wartością* funkcji f w punkcie x, co zapisujemy krótko

$$y = f(x)$$

Czasami mówimy, że funkcja f *przyporządkowuje* element y argumentowi x, lub że *odwzorowuje* argument x na element y.

Dla funkcji f_4 z Przykładu 3.24 możemy więc zapisać:

$$f_4(1) = a, \quad f_4(2) = c, \quad f_4(3) = c, \quad f_4(4) = c$$

Definicja 3.27. Jeśli przeciwdziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, tzn.

$$f : X \to \mathbb{R}$$

dla pewnego zbioru X, to mówimy, że f jest *funkcją rzeczywistą*.

Przykład 3.28. Niech X będzie zbiorem studentów pierwszego roku fizyki medycznej. Określamy funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ warunkiem: dla dowolnego studenta $x \in X$ niech $f(x)$ będzie liczbą punktów uzyskanych na egzaminie maturalnym z matematyki. Wtedy f jest funkcją liczbową, której dziedziną jest wspomniany zbiór studentów.

Najczęściej rozpatrywanym przez nas przypadkiem będzie sytuacja, gdy f jest funkcją liczbową określoną na pewnym podzbiorze zbioru liczb rzeczywistych, tzn. $X \subset \mathbb{R}$. Szerzej o tym przypadku będziemy mówić w Wykładzie 5. Teraz podamy kilka przykładów.

Przykład 3.29. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, której wartości dla każdego $n \in \mathbb{N}$ określamy wzorem[4]

$$f(n) = 2n$$

Mamy wtedy

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 6, \quad f(4) = 8, \quad \dots$$

tzn. każdej liczbie naturalnej n jest przyporządkowana n-ta liczba parzysta.

Przykład 3.30. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = ax + b, \qquad x \in \mathbb{R},$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ są pewnymi współczynnikami rzeczywistymi. Wtedy f jest dobrze nam znaną ze szkoły funkcją liniową.

Przykład 3.31. Niech $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Wtedy f jest funkcją homograficzną.

3.2.3. Injekcje, surjekcje i bijekcje. Przypomnijmy teraz pewne specjalne typy funkcji, które będą nas w dalszym ciągu interesować

3.2.3.1. *Funkcje różnowartościowe (injekcje).* Rozpocznijmy od następującego przykładu

Przykład 3.32. Niech X oznacza zbiór wszystkich obywateli polskich, zaś zbiór Y oznacza zbiór, którego elementami są ciągi złożone z jedenastu cyfr. Rozważmy funkcję $f : X \to Y$ określoną w ten sposób, że $f(x)$ oznacza numer PESEL obywatela x. Numery PESEL są tak przydzielane, by każdy miał swój unikalny numer, który nie powtórzy się u innej osoby. Inaczej, dwaj różni obywatele x_1 i x_2 mają różne numery PESEL, co oznacza, że $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definicja 3.33. Mówimy, że $f : X \to Y$ jest funkcją *różnowartościową* (lub *injekcją*), jeśli

$$\forall\, x_1, x_2 \in X : \; x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \tag{3.6}$$

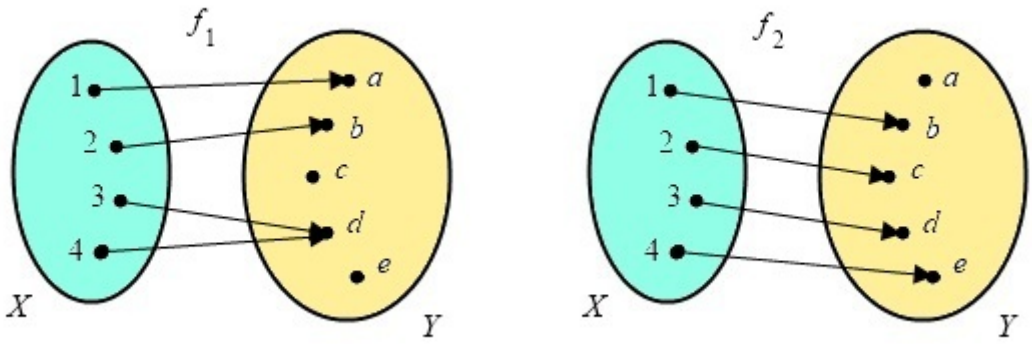
tzn. każdym dwóm *różnym* argumentom są przyporządkowane dwie *różne* wartości.

[4] Oczywiście nie ma powodu, dla którego zawsze należałoby oznaczać argumenty funkcji symbolem x. Tutaj zamiast x używamy litery n.

Uwaga 3.34. Warunek (3.6) można równoważnie sformułować następująco:

(3.7) $$\forall\, x_1, x_2 \in X:\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

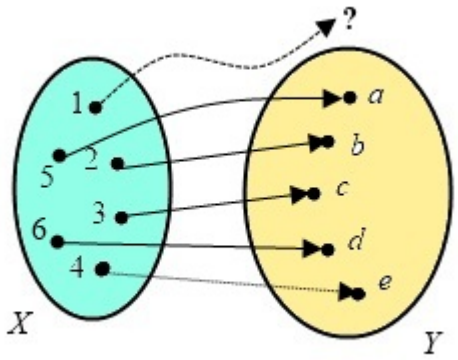
Przykład 3.35. Rozważmy funkcje reprezentowane przez diagramy rysunkowe tak jak w Przykładzie 3.24



Łatwo zauważyć, że f_1 nie jest funkcją różnowartościową, bo $f_1(3) = f_1(4)$. Z kolei funkcja f_2 jest różnowartościowa.

Funkcja jest różnowartościowa, jeśli do każdego punktu zbioru Y dochodzi co najwyżej jedna strzałka.

Analizując takie rysunkowe diagramy możemy zauważyć, że między niektórymi zbiorami nie da się określić żadnej funkcji różnowartościowej.



Ponieważ zbiór X ma więcej elementów niż zbiór Y, to ze zbioru X wychodzi za dużo strzałek i warunek opisany w ramce nie może być spełniony.

Przykład 3.36. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie $a \neq 0$. Wykażemy, że funkcja f jest różnowartościowa. Posłużymy się warunkiem (3.7). Załóżmy, że $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ są takie, że $f(x_1) = f(x_2)$. Oznacza to, że

$$ax_1 + b = ax_2 + b.$$

Równość ta jest równoważna równości

$$ax_1 = ax_2$$

czyli

$$a(x_1 - x_2) = 0.$$

Ponieważ założyliśmy, że $a \neq 0$, to ostatnia równość prowadzi do wniosku, że $x_1 - x_2 = 0$, czyli $x_1 = x_2$.

Przykład 3.37. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = x^2$. Łatwo zauważyć, że funkcja ta nie jest różnowartościowa, bo np.

$$f(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f(1).$$

Przykład 3.38. Rozważmy funkcję $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = x^2$. Mimo, że funkcja ta jest zadana tym samym wzorem co funkcja z poprzedniego przykładu, to w przeciwieństwie do tamtej jest ona różnowartościowa. Uzasadnijmy to posługując się warunkiem (3.6). Niech $x_1, x_2 \geq 0$ i $x_1 \neq x_2$. Zauważmy, że w tym wypadku musi być $x_1 > 0$ lub $x_2 > 0$, co prowadzi do wniosku, że $x_1 + x_2 > 0$, czyli

$$x_1 + x_2 \neq 0.$$

Ponieważ założyliśmy, że $x_1 \neq x_2$, to oczywiście mamy również

$$x_1 - x_2 \neq 0.$$

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

otrzymujemy

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \neq 0.$$

Ostatnia nierówność wynika z faktu, że iloczyn dwóch liczb różnych od zera jest też niezerowy.

Zauważmy więc, że własności funkcji liczbowej nie zależą tylko od jej wzoru, ale również od tego, jaka jest jej dziedzina i przeciwdziedzina.

3.2.3.2. *Funkcje "na" (surjekcje).* Podobnie jak poprzednio rozpocznijmy od przykładu.

Przykład 3.39. Niech $X = \mathbb{Z}$ (zbiór liczb całkowitych), zaś $Y = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ dla pewnej liczby naturalnej p. Niech $f : X \to Y$ będzie określona następująco:

$$f(x) = \text{reszta z dzielenia liczby } x \text{ przez } p.$$

Zauważmy, że każdy element przeciwdziedziny Y jest wartością funkcji f dla przynajmniej jednego argumentu. Istotnie, dla każdego $k \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ mamy równość $f(k) = k$.

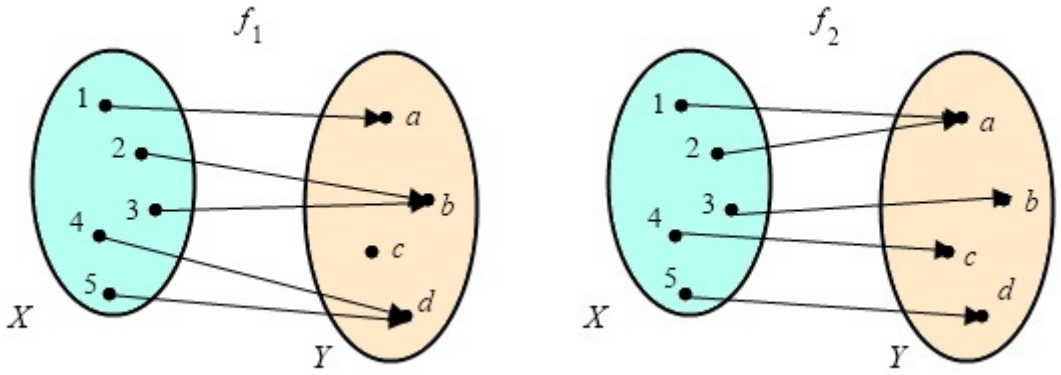
Definicja 3.40. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy *funkcją "na"* (albo *surjekcją*), jeśli

$$\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X :\ y = f(x) \tag{3.8}$$

tzn. każdy element zbioru Y jest wartością dla pewnego argumentu pochodzącego ze zbioru X.

Po pierwsze, prześledźmy, jak surjekcje wyglądają na diagramach rysunkowych.

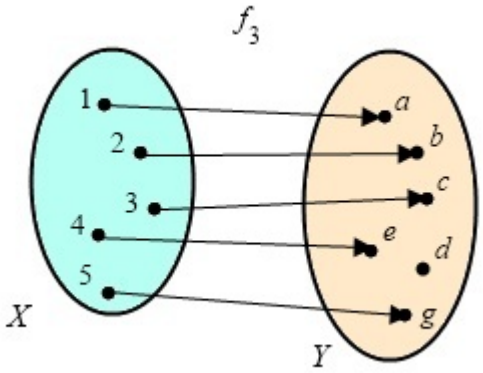
Przykład 3.41. Rozważmy funkcje reprezentowane przez diagramy rysunkowe tak jak w Przykładzie 3.24



Funkcja f_1 nie jest funkcją "na", bo element c ze zbioru Y nie jest jej wartością dla żadnego argumentu pochodzącego ze ze zbioru X. Po prostu, nie dochodzi do niego żadna strzałka. Z kolei funkcja f_2 jest surjekcją, bo do każdy punkt jest wartością funkcji f_2 dla przynajmniej jednego argumentu pochodzącego ze zbioru X.

Funkcja jest "na", jeśli do każdego punktu zbioru Y dochodzi co najmniej jedna strzałka.

Analizując rysunkowe diagramy również tutaj możemy zauważyć, że między niektórymi zbiorami nie da się określić żadnej surjekcji.



Ponieważ zbiór X ma mniej elementów niż zbiór Y, to ze zbioru X wychodzi za mało strzałek i warunek opisany w ramce nie może być spełniony.

Przykład 3.42. Tak jak w Przykładzie 3.36 rozważmy funkcję liniową $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie $a \neq 0$. Wykażemy, że funkcja ta spełnia warunek (3.8). Niech y będzie dowolnym elementem przeciwdziedziny $\mathbb{R}$. Musimy pokazać, że istnieje taki element $x \in \mathbb{R}$, że $f(x) = y$, czy spełnione jest równanie

$$ax + b = y.$$

Jest to bardzo łatwe równanie liniowe, które dzięki temu, że $a \neq 0$, ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$x = \frac{y - b}{a}.$$

Możemy teraz sprawdzić, że

$$f(x) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a \cdot \frac{y-b}{a} + b = y - b + b = y,$$

czyli warunek (3.8) jest faktycznie spełniony

Przykład 3.43. Podobnie jak w Przykładzie 3.37 rozważamy funkcję kwadratową $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = x^2$. Łatwo zauważamy, że nie jest to surjekcja, bo liczba $y = -1$ nie jest wartością tej funkcji dla żadnego $x \in \mathbb{R}$. Nie bowiem takiej liczby rzeczywistej x, która spełniałaby równanie $x^2 = -1$.

Przykład 3.44. Zmodyfikujemy teraz funkcję opisaną w poprzednim przykładzie. Niech teraz funkcja będzie określona jako $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ze wzorem takim samym jak poprzednio, czyli $f(x) = x^2$. Teraz jest to surjekcja. Istotnie, jeśli y jest elementem przeciwdziedziny, to $y \geq 0$. Dla każdej takiej liczby równanie

$$x^2 = y$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie, dokładniej

$$\begin{aligned} x &= 0 && \text{gdy } y = 0 \\ x &= -\sqrt{y} \ \vee \ x = \sqrt{y} && \text{gdy } y > 0 \end{aligned}$$

Dla każdego takiego rozwiązania mamy $f(x) = y$.

3.2.3.3. *Funkcje odwracalne (bijekcje).* Zilustrujmy kolejne pojęcie przykładem.

Przykład 3.45. Załóżmy, że pewna klasa składa się z 22 uczniów i X niech będzie zbiorem wszystkich uczniów w tej klasie. Niech

$$Y = \{n \in \mathbb{N} : \ 1 \leq n \leq 22\} = \{1, 2, 3, \ldots, 22\}.$$

Każdemu uczniowi przyporządkowany jest jego numer w dzienniku. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją taką, że

$$f(x) = \text{numer ucznia } x \text{ w dzienniku}$$

dla każdego ucznia $x \in X$.

Zauważmy, że funkcja ta jest

- różnowartościowa , bo nie ma dwóch różnych uczniów o tym samym numerze,
- "na" , bo każda liczba ze zbioru $Y = \{1, 2, \ldots, 22\}$ jest numerem pewnego ucznia w dzienniku.

Obie powyższe własności można sformułować następująco: *Każda liczba ze zbioru Y jest wartością funkcji f dla dokładnie jednego ucznia $x \in X$.*

Definicja 3.46. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy *funkcją odwracalną* (albo *funkcją wzajemnie jednoznaczną* lub *bijekcją*), jeśli

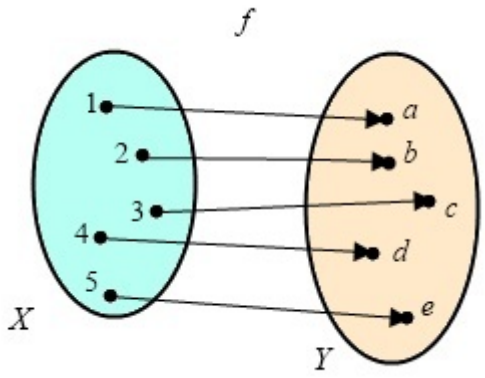
$$\forall\, y \in Y \ \exists!\, x \in X : \ y = f(x) \tag{3.9}$$

tzn. każdy element zbioru Y jest wartością dla dokładnie jednego argumentu pochodzącego ze zbioru X.

Twierdzenie 3.47. *Funkcja $f : X \to Y$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednocześnie różnowartościowa i "na".*

Przykład 3.48. Analizując Przykłady 3.35 i 3.41 oraz biorąc pod uwagę powyższe twierdzenie dedukujemy następującą regułę dla diagramów przedstawiających bijekcje

Funkcja jest bijekcją, jeśli do każdego punktu zbioru Y dochodzi dokładnie jedna strzałka.



Z powyższego przykładu wynika następujący wniosek.

Wniosek 3.49. *Jeśli X i Y są zbiorami skończonymi, to istnieje bijekcja działająca między tymi zbiorami wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory te mają tyle samo elementów.*

ROZDZIAŁ 4

Ciągi

4.1. Zbiór liczb naturalnych

Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest pierwszym zbiorem liczbowym, jaki dziecko poznaje w trakcie swojego poznawania i przyswajania świata. W związku z tym liczby naturalne $1, 2, 3$, itd. znamy odkąd sięgamy pamięcią i wydaje się, że wszystko, co z tymi liczbami związane jest oczywiste i nie wymaga specjalnego definiowania. Liczby służą nam do liczenia, posługujemy się nimi w życiu codziennym i dotychczas intuicja wystarczała, aby zrozumieć i wysłowić wszystkie własności zbioru $\mathbb{N}$. Zauważmy, że sama nazwa tych liczb wskazuje, że wszystko jest tutaj oczywiste i łatwe.

Tymczasem, po chwili refleksji dochodzimy do wniosku, że właściwie trudno jest powiedzieć, co to są tak naprawdę liczby naturalne. Wiedząc, co to są liczby naturalne, potrafimy opisać zbiór całkowitych $\mathbb{Z}$, potem zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, by na końcu opisać zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Widząc problem z podaniem ścisłej definicji zbioru liczb naturalnych, Leopold Kronecker, matematyk żyjący w XIX wieku wypowiedział słynne stwierdzenie: *Liczby naturalne stworzył dobry Bóg. Reszta jest dziełem człowieka.*

Ścisłe definicje matematyczne zbioru liczb naturalnych powstały dopiero w pierwszej połowie XX wieku za sprawą m.in. Giuseppe Peano i Johna von Neumanna. Nie będziemy tutaj wdawali się w szczegóły tych definicji. Omówimy tylko niektóre ważne dla nas własności zbioru $\mathbb{N}$. Będziemy potrzebowali dodatkowych wiadomości dotyczących relacji.

4.1.1. Relacje porządku. Pojęcie relacji zostało zdefiniowane w Rozdziale 3 (patrz Definicja 3.1). W Definicji 3.5 podaliśmy definicje podstawowych typów relacji: zwrotnych, symetrycznych, antysymetrycznych, przechodnich i spójnych.

Definicja 4.1. Niech X będzie dowolnym zbiorem, a $\rho \subset X \times X$ niech będzie relacją. Mówimy, że ρ jest *relacją porządku*, jeśli jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna.

Jeśli ρ jest dodatkowo relacją spójną, to mówimy, że ρ jest *porządkiem liniowym*. Jeśli relacja porządku nie jest spójna, to nazywamy ją *porządkiem częściowym*.

Przykład 4.2. Niech $X = \mathbb{N}$. Niech ρ będzie relacją podzielności $|$ opisaną w Przykładzie 3.8. W przykładzie tym wykazaliśmy, że relacja ta jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna, zatem jest relacją porządku. Ponieważ relacja ta nie jest spójna, to jest to porządek częściowy.

Przykład 4.3. Niech A będzie zbiorem niepustym i niech $X = 2^A$. Rozważamy relację inkluzji opisaną w Przykładzie 3.9. W przykładzie tym wykazaliśmy, że relacja ta jest również częściowym porządkiem.

Przykład 4.4. W Przykładzie 3.7 przeanalizowaliśmy własności relacji $\leq$, $<$, $\neq$ i $=$ określonych na zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Tylko relacja $\leq$ jest relacją porządku, w dodatku jest to porządek liniowy.

Oczywiście jest sens rozważać relację $\leq$ dla dowolnego podzbioru $X \subset \mathbb{R}$ i w dalszym ciągu będzie to liniowy porządek.

Z własności relacji porządku wynika, że jeśli $x\rho y$ dla różnych x i y, to warunek $y\rho x$ nie zachodzi. Z tego względu mówimy, że element x poprzedza y, albo y następuje po x. Z tego też względu często taką ogólną relację porządku oznaczamy symbolem $\preceq$ zamiast ρ.

Niech $\preceq$ będzie relacją porzadku na pewnym zbiorze X i niech $A \subset X$ będzie niepustym podzbiorem.

Definicja 4.5. Mówimy, że element $x_{\mathrm{m}} \in X$ jest *elementem najmniejszym* zbioru A, jeśli

(i) $x_{\mathrm{m}} \in A$,

(ii) $\forall\, x \in A:\ x_{\mathrm{m}} \preceq x$

Innymi słowy, element najmniejszy zbioru A to taki element zbioru A, który poprzedza wszystkie elementy tego zbioru.

Analogicznie definiujemy *element największy* zbioru A. Jest to taki element $x_{\mathrm{M}} \in X$, że

(i) $x_{\mathrm{M}} \in A$,

(ii) $\forall\, x \in A:\ x \preceq x_{\mathrm{M}}$

Jest to więc taki element zbioru A, który następuje po każdym elemencie tego zbioru.

Twierdzenie 4.6. *Jeśli zbiór A ma element najmniejszy, to jest on jednoznacznie wyznaczony. Dokładniej, jeśli elementy x_{m} i x'_{m} są elementami najmniejszymi zbioru A, to $x_{\mathrm{m}} = x'_{\mathrm{m}}$.*

Analogiczne stwiedzenie jest również prawdziwe dla elementów największych.

DOWÓD. Z faktu, że x_{m} i x'_{m} są elementami najmniejszymi zbioru A, wynika, że $x_{\mathrm{m}} \in A$ i $x'_{\mathrm{m}} \in A$ (warunek (i) w Definicji 4.5). Zatem, z warunku (ii) wynika $x_{\mathrm{m}} \preceq x'_{\mathrm{m}}$ (bo x_{m} jest najmniejszy) i $x'_{\mathrm{m}} \preceq x_{\mathrm{m}}$ (bo x'_{m} jest najmniejszy). Ponieważ $\preceq$ jest relacją antysymetryczną, wnioskujemy, że $x_{\mathrm{m}} = x'_{\mathrm{m}}$. □

Motywując się powyższym twierdzeniem, jeśli A ma element najmniejszy, to oznaczamy go symbolem $\min A$. Analogicznie element największy zbioru A oznaczamy $\max A$.

Przykład 4.7. Rozważmy zbiór $\mathbb{N}$ z relacją podzielności $|$. Rozważmy następujące podzbiory zbioru liczb naturalnych:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{2, 4, 6, 8, 12, 24\} \\ A_2 &= \{3, 6, 12, 24, 48\} \\ A_3 &= \{2, 4, 6\} \\ A_4 &= \{3, 5\} \end{aligned}$$

Mamy tutaj następujące równości:

$$\min A_1 = 2, \qquad \max A_1 = 24.$$

Istotnie, zarówno 2 jak i 24 są elementami zbioru A_1. Wszystkie elementy zbioru A_1 są parzyste, zatem 2 jest dzielnikiem każdego elementu tego zbioru. Podobnie zauważamy, że każdy element zbioru A_1 jest dzielnikiem liczby 24.

W przypadku zbioru A_2 mamy:

$$\min A_2 = 3, \qquad \max A_2 = 48.$$

Uzasadnienie jest tu podobne jak w przypadku zbioru A_2.

Łatwo zauważyć, że

$$\min A_3 = 2,$$

bo 2 jest dzielnikiem każdego elementu zbioru A_3. Zbiór A_3 nie ma jednak elementu największego. Żaden bowiem z jego trzech elementów nie ma tej własności, że jest wielokrotnością wszystkich elementów zbioru A_3.

Zbiór A_4 jest przykładem takiego zbioru, który nie ma ani elementu najmniejszego, ani elementu największego.

Przykład 4.8. Niech $X = \mathbb{R}$ i załóżmy, że zbiór $\mathbb{R}$ jest uporządkowany przez relację $\leq$. Rozważmy następujące podzbiory zbioru $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} A_1 &= [0,1] \\ A_2 &= (0,1] \\ A_3 &= [0,1) \\ A_4 &= (0,1) \\ A_5 &= \mathbb{N} \\ A_6 &= \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

Wtedy:

- $\min A_1 = 0$, $\max A_1 = 1$,
- A_2 nie ma elementu najmniejszego i $\max A_2 = 1$,
- $\min A_3 = 0$ i A_3 nie ma elementu największego,
- A_4 nie ma ani elementu najmniejszego, ani największego,
- $\min A_5 = 1$ i A_5 nie ma elementu największego,
- A_6 nie ma elementu najmniejszego i $\max A_6 = 1$.

Z powyższych przykładów wynika, że nie każdy podzbiór zbioru uporządkowanego musi mieć element najmniejszy i nie każdy podzbiór musi mieć element największy.

Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ wyróżnia się spośród innych zbiorów uporządkowanych pewną specjalną własnością, którą nazywamy *dobrym uporządkowaniem*.

Definicja 4.9. Niech $\preceq$ będzie liniowym porządkiem na zbiorze X. Mówimy, że $\preceq$ jest *dobrym porządkiem*, jeśli każdy niepusty podzbiór zbioru X ma element najmniejszy. O zbiorze X mówimy wtedy, że jest *zbiorem dobrze uporządkowanym* przez relację $\preceq$.

Kluczowym dla nas jest następujące stwierdzenie:

Zasada dobrego uporządkowania. *Zbiór liczb naturalnych jest dobrze uporządkowany przez relację* $\leq$.

Wspominaliśmy wcześniej o różnych sposobach definiowania zbioru liczb naturalnych. W niektórych ujęciach powyższe stwierdzenie jest po prostu częścią definicji. W innych ujęciach zasada dobrego uporządkowania jest wnioskiem z przyjętej definicji, a więc jest twierdzeniem.

Przykład 4.10. Zauważmy, że zbiór liczb naturalnych nie jest dobrze uporządkowany przez relację podzielności $|$. W Przykładzie 4.7 podaliśmy przykłady podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$, które nie mają elementu najmniejszego ze względu na tę relację.

Przykład 4.11. Zbiór liczb rzeczywistych nie jest dobrze uporządkowany przez relację $\leq$. Wynika to z Przykładu 4.8, w którym podaliśmy przykłady podzbiorów nie posiadających elementów najmniejszych

Przykład 4.12. Zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ nie jest dobrze uporządkowany przez relację $\leq$, bo np. cały zbiór $\mathbb{Z}$ nie ma elementu najmniejszego.

Przykład 4.13. Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb całkowitych jest zbiorem dobrze uporządkowanym przez relację $\leq$. Wynika to bezpośrednio z Definicji 4.9.

W szczególności zbiorami dobrze uporządkowanymi są:

(1) każdy podzbiór skończony,
(2) zbiór liczb parzystych,
(3) zbiór liczb podzielnych przez 3,
(4) zbiór liczb pierwszych,
(5) zbiór $\{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots\}$ składający się z kolejnych potęg liczby 2.

4.1.2. Zasada indukcji matematycznej. Niech $p(n)$ będzie formą zdaniową (patrz Definicja 1.15), której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych, $n \in \mathbb{N}$. Sformułujemy teraz bardzo ważne twierdzenie zwane *zasadą indukcji matematyczne*.

Twierdzenie 4.14. *Zdanie $p(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy następujące dwa warunki są spełnione:*

(1) *zdanie $p(1)$ jest prawdziwe,*
(2) *dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest implikacja $p(n) \Rightarrow p(n+1)$.*

DOWÓD. Wystarczy wykazać, że jeśli spełnione są warunki (1) i (2), to zdanie $p(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Reszta jest bowiem oczywista. Przeprowadzimy tzw. dowód *niewprost*. Załóżmy, że nie jest prawdą, że zdanie $p(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że dla przynajmniej jednej liczby naturalnej n zdanie $p(n)$ jest fałszywe. Niech $A \subset \mathbb{N}$, będzie zbiorem wszystkich takich liczb naturalnych n, dla których zdanie $p(n)$ jest fałszywe, tzn.

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \sim p(n)\}.$$

Z założenia niewprost wynika, że zbiór ten jest niepusty. Z zasady dobrego uporządkowania wynika więc, że zbiór A ma element najmniejszy. Niech $n_0 = \min A$. Oczywiście $p(n_0)$ jest zdaniem fałszywym. Ponieważ założyliśmy, że $p(1)$ jest zdaniem prawdziwym, $n_0 > 1$. Z faktu, że n_0 jest najmniejszym elementem zbioru A wnioskujemy, że $n_0 - 1 \notin A$, czyli zdanie $p(n_0 - 1)$ jest prawdziwe.

Rozważmy teraz implikację $p(n_0 - 1) \Rightarrow p(n_0)$. Właśnie uzasadniliśmy, że jej poprzednik $p(n_0 - 1)$ jest zdaniem prawdziwym, a następnik $p(n_0)$ jest fałszywy. Oznacza to, że implikacja jest fałszywa. Jest to jednak w sprzeczności z warunkiem opisanym w punkcie (2). Nasze założenie niewprost doprowadziło więc do sprzeczności, co oznacza, że zdanie $p(n)$ musi być prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}$. □

Powyższa zasada jest ważnym narzędziem do przeprowadzania dowodów twierdzeń o liczbach naturalnych. Jeśli chcemy wykazać, że jakieś zdanie $p(n)$ (np. równość lub nierówność) jest prawdziwe dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to wykazujemy, że spełnione są warunki (1) i (2). Wykazywanie warunku (1) nazywamy *pierwszym krokiem indukcyjnym*, zaś dowodzenie warunku (2) nazywamy *drugim krokiem indukcyjnym*.

Drugi krok indukcyjny wymaga uzasadnienia, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest implikacja $p(n) \Rightarrow p(n+1)$. Zauważmy, że gdyby zdanie $p(n)$ było fałszywe, to implikacja ta byłaby prawdziwa niezależnie od wartości logicznej zdania $p(n+1)$. Trzeba więc jedynie założyć, że zdanie $p(n)$ jest prawdziwe i wykazać, że w tym wypadku zdanie $p(n+1)$ jest również prawdziwe. Drugi krok indukcyjny składa się więc z następujących etapów:

- sformułowanie *założenia indukcyjnego* o tym, że zdanie $p(n)$ jest prawdziwe,
- sformułowanie *tezy indukcyjnej* o tym, że zdanie $p(n+1)$ jest prawdziwe,
- dowód tezy indukcyjnej (zwykle z wykorzystaniem założenia indukcyjnego).

4.2. Ciągi i ich własności

Ważnym narzędziem przydatnym w analizie są ciągi.

4.2.1. Definicja ciągu. Zacznijmy od przypomnienia czym są ciągi.

Definicja 4.15. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Dowolną funkcję $f : \mathbb{N} \to X$ nazywamy *ciągiem elementów zbioru X* lub krótko *ciągiem*.

Jeśli $X = \mathbb{R}$, to ciąg $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazywamy *ciągiem liczbowym*.

Z powyższej definicji wynika, że ciąg to funkcja, która każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje pewien element zbioru X. Zwykle ten element oznczamy jako x_n i nazywamy

n-tym wyrazem ciągu. Możemy sobie teraz wyobrażać ciąg jako pewien układ elementów zbioru X, które są ponumerowane liczbami naturalnymi:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

W układzie tym wiadomo zatem, który wyraz jest pierwszy, który jest drugi, itd. W ciągu ważna jest zatem kolejność wyrazów. Ciąg o wyrazach $x_1, x_2, x_3, \ldots$ będziemy oznaczali $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lub $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ lub krótko (x_n).

W dalszym ciągu będą nas interesować jedynie ciągi liczbowe. Jeśli chcemy opisać taki ciąg, możemy to zrobić na kilka sposobów:

(1) wzór ogólny,
(2) rekurencja,
(3) wypisanie kilku pierwszych wyrazów.

Opisanie ciągu przez podanie jego wzoru polega na tym, że podajemy pewną formułę, w której może występować zmienna n. Po podstawieniu za nią konkretnej liczby naturalnej otrzymujemy wyraz ciągu stojący w miejscu wyznaczonym przez tą liczbę.

Przykład 4.16. Załóżmy, że ciąg (x_n) jest opisany wzorem

$$x_n = \frac{n^2}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Możemy teraz obliczyć kilka pierwszych wyrazów:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}, \\ x_2 &= \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}, \\ x_3 &= \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}, \\ x_4 &= \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}, \end{aligned}$$

itd. Jeśli z jakiegoś powodu będzie nas interesować wyraz tego ciągu stojący na miejscu nr 1034, to po prostu korzystamy ze wzoru:

$$x_{1034} = \frac{1034^2}{1034+1} = \frac{1069156}{1035}.$$

Definicja rekurencyjna polega na tym, że pierwszy wyraz (lub kilka pierwszych wyrazów), a następnie przepis (zwykle wyrażony wzorem), który informuje jak każdy wyraz (oczywiście oprócz pierwszego) zależy od wyrazu stojącego bezpośrednio przed nim (lub jak zależy od kilku poprzedników).

Przykład 4.17. Rozważmy ciąg zadany następującym warunkiem:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = 2a_n, \quad \text{dla } n \geq 1. \end{cases}$$

Wykorzystując powyższe określenie możemy obliczyć kolejne wyrazu ciągu:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_{1+1} = 2a_1 = 2 \cdot 1 = 2 \\ a_3 &= a_{2+1} = 2a_2 = 2 \cdot 2 = 4 \\ a_4 &= a_{3+1} = 2a_3 = 2 \cdot 4 = 8 \\ a_5 &= a_{4+1} = 2a_4 = 2 \cdot 8 = 16. \end{aligned}$$

Oczywiście zauważamy, że tak określony ciąg, to dobrze nam znany ze szkoły ciąg geometryczny o ilorazie $q = 2$.

Zauważmy jednak, że bez znajomości wzoru ogólnego definicja rekurencyjna nie pozwoliłaby nam na natychmiastowe obliczenie wyrazu o dużym numerze, np. dla $n = 1034$ jak w poprzednim przykładzie. Do obliczenia tego wyrazu potrzebny nam jest wyraz a_{1033}, do tego zaś – a_{1032}, itd. Musieliśmy zatem oblicz wszystkie poprzedzające go 1033 wyrazy.

Wypisanie kilku pierwszych wyrazów polega na tym, by podać kilka początkowych wyrazów w taki sposób, by łatwa do odgadnięcia stała się reguła wg której powstają następne wyrazy.

Przykład 4.18. Niech (x_n) będzie ciągiem opisanym następująco:

$$(1, 2, 3, 4, \ldots).$$

Oczywiście kolejnymi wyrazami takiego ciągu będą liczby $5, 6, 7, \ldots$, itd. Łatwo zauważyć, że ten ciąg można też opisać wzorem

$$a_n = n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

4.2.2. Ciągi ograniczone. Jeśli mamy dany skończony układ liczb $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, to jest jasne, że wszystkie te liczby zawierają się w pewnym przedziale o skończonej długości. Taki przedział możemy wyznaczyć następująco. Niech a będzie najmniejszą spośród liczb $x_1, x_2, \ldots, x_N$, zaś b – największą, tj.

$$a = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}, \qquad b = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}.$$

Wtedy dla każdego $n = 1, 2, \ldots, N$ spełnione są nierówności

$$a \leq x_n \leq b,$$

co jest równoważne temu, że

$$x_n \in [a, b].$$

Jeśli ciąg jest nieskończony, to opisana wyżej własność oczywiście nie musi zachodzić. Na przykład nie ma tej własności ciąg opisany w Przykładzie 4.18. Dlatego spośród wszystkich ciągów nieskończonych wyróżniamy klasę ciągów ograniczonych.

Definicja 4.19. Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie pewnym nieskończonym ciągiem liczbowym. Mówimy ciąg ten jest *ograniczony*, jeśli istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $a \leq x_n \leq b$ dla każdej liczby naturalnej n, tj.

$$\exists\, a, b \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N}:\ a \leq x_n \leq b. \tag{4.1}$$

Łatwo wykazać następujące

Stwierdzenie 4.20. *Ciąg liczbowy (x_n) jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $C > 0$ taka, że $|x_n| \leq C$ dla każdej liczby naturalnej n, tj.*

$$\exists\, C > 0\, \forall\, n \in \mathbb{N}:\ |x_n| \leq C. \tag{4.2}$$

Przykład 4.21. Niech $x_n = (-1)^{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Łatwo zauważyć, że ciąg ten jest postaci $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$, jego kolejne wyrazy są przemian równe 1 i -1. Jasne więc, że spełniona jest nierówność

$$-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1, \qquad n \in \mathbb{N},$$

więc ciąg jest ograniczony.

Przykład 4.22. Niech $x_n = \dfrac{2n}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Zauważmy, że dla każdego n spełnione są nierówności

$$\frac{2n}{n+1} \leq \frac{2n+2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} = 2.$$

Z drugiej strony, wszystkie wyrazu ciągu (x_n) są dodatnie, więc ostatecznie możemy zapisać

$$0 \leq x_n \leq 2, \qquad n \in \mathbb{N},$$

więc ciąg jest ograniczony.

Przykład 4.23. Niech $x_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Wykażemy, że nie ma takiej liczby b, dla której nierówność $x_n \leq b$ byłaby spełniona dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zrobimy to niewprost. Załóżmy, że istnieje $b \in \mathbb{R}$ taka, że $x_n \leq b$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Oznacza to, że dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{n^2+1}{n+1} \leq b \tag{4.3}$$

$$n^2 + 1 \leq b(n+1)$$

$$n^2 - bn + 1 - b \leq 0. \tag{4.4}$$

Rozważmy teraz funkcję kwadratową $f(x) = x^2 - bx + 1 - b$. W zależności od parametru b zachodzi jeden z trzech poniższych przypadków:

(a) f nie ma miejsc zerowych,
(b) f ma jedno miejsce zerowe x_0,
(b) f ma dwa miejsca zerowe x_1 i x_2.

Prześledźmy teraz, jak w każdym z tych trzech przypadków wygląda zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej

$$x^2 - bx + 1 - b \leq 0. \tag{4.5}$$

W przypadku (a) zbiór rozwiązań tej nierówności jest pusty.
W przypadku (b) zbiór rozwiązań jest jednoelementowy $\{x_0\}$.
W przypadku (c) zbiór rozwiązań jest przedziałem $[x_1, x_2]$.
Łatwo zauważyć, że w każdym z tych trzech przypadków istnieje liczba naturalna n_0, która do zbioru rozwiązań nierówności (4.5) nie należy. Oznacza to jednak, że liczba n_0 nie spełnia nierówności (4.4), a więc także nie spełnia nierówności (4.3). Otzrymaliśmy sprzeczność, bo założyliśmy, że (4.3) jest spełniona dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Wynika stąd, że ciąg x_n jest nieograniczony, bo nie ma takiej liczby rzeczywistej b dla której nierówność $x_n \leq b$ byłaby spełniona dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Wprowadźmy jeszcze następującą definicję.

Definicja 4.24. Mówimy, że ciąg (x_n) jest *ograniczony z dołu*, jeśli istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$ taka, że $x_n \geq a$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, tj.

$$\exists\, a \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N} :\ x_n \geq a.$$

Analogicznie mówimy, że ciąg (x_n) jest *ograniczony z góry*, jeśli istnieje liczba $b \in \mathbb{R}$ taka, że $x_n \leq b$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, tj.

$$\exists\, b \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N} :\ x_n \leq b.$$

Przykład 4.25. Zauważmy, że ciąg rozważany w Przykładzie 4.23 składa się z wyrazów dodatnich, czyli $x_n \geq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem, mimo że ciąg ten jest nieograniczony, to jest ograniczony z dołu.

Przykład 4.26. Niech $x_n = \log_2 \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Po pierwsze, z tego, że $n \geq 1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, wynika

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Przypomnijmy, że jeśli $x \in (0, 1]$, to $f(x) \leq 0$ gdzie funkcja f jest zdefiniowana wzorem $f(x) = \log_2 x$. Wnioskujemy stąd, że

$$\log_2 \frac{1}{n} \leq 0$$

dla wszystkich liczb naturalnych n, co oznacza, że ciąg (x_n) jest ograniczony z góry.

Wykażemy teraz, że nie ma takiej liczby rzeczywistej a, że nierówność

$$\log_2 \frac{1}{n} \geq a \tag{4.7}$$

jest spełniona dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy niewprost, że jest taka liczba a. Niech n_0 będzie jakąkolwiek liczbą większą od liczby 2^{-a}. Mamy wtedy nierówność

$$n_0 > 2^{-a},$$

z której wynika

$$\frac{1}{n_0} < 2^a$$
$$\log_2 \frac{1}{n_0} < a.$$

Liczba n_0 nie spełnia więc nierówności (4.7), co kłóci się z założoną własnością liczby a.

Ciąg (x_n) jest więc nieograniczony, ale jest ograniczony z góry.

Zauważmy, że prawdziwe jest niemal oczywiste

Stwierdzenie 4.27. *Ciąg jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednocześnie ograniczony z dołu i z góry.*

4.2.3. Ciągi monotoniczne.

Rozważmy następującą definicję.

Definicja 4.28. Niech (x_n) będzie ciągiem liczbowym. Mówimy, że ciąg (x_n) jest

(a) *rosnący*, jeśli $x_{n+1} > x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

(b) *słabo rosnący* (lub *niemalejący*), jeśli $x_{n+1} \geq x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
(c) *malejący*, jeśli $x_{n+1} < x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
(d) *słabo malejący* (lub *nierosnący*), jeśli $x_{n+1} \leq x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
(e) *stały*, jeśli $x_{n+1} = x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Jeśli ciąg spełnia którykolwiek z powyższych warunków, to mówimy, że jest *monotoniczny*.

Przykład 4.29. Niech (x_n) będzie ciągiem z Przykładu 4.21, tj.

$$(x_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots).$$

Ciąg ten nie jest monotoniczny, nie spełnia bowiem żadnego z warunków wymienionych w Definicji 4.28:

(a) nie jest rosnący, bo np. nie jest spełniona nierówność $x_2 > x_1$,
(b) nie jest słabo rosnący, bo np. nie jest spełniona nierówność $x_2 \geq x_1$,
(c) nie jest malejący, bo np. nie jest spełniona nierówność $x_3 < x_2$,
(d) nie jest słabo malejący, bo np. nie jest spełniona nierówność $x_3 \leq x_2$,
(a) nie jest stały, bo np. nie jest spełniona równość $x_2 = x_1$.

Zauważmy, że w każdym z pięciu warunków w Definicji 4.28 żądamy, by odpowiednia nierówność lub równość zachodziła dla każdego n. Jeśli więc chcemy pokazać, że jakiś warunek nie zachodzi, wystarczy pokazać, że dana nierówność lub równość nie jest spełniona dla jakiejś jednej konkretnej liczny naturalnej.

Przykład 4.30. Niech (x_n) będzie ciągiem z Przykładu 4.23, tj. $x_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykażemy, że jest to ciąg rosnący. Zauważmy, że warunek (a) z Definicji 4.28 można w sposób równoważny wysłowić następująco:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \; x_{n+1} - x_n > 0. \tag{4.8}$$

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wtedy mamy

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n = \\ &= \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)+1} - \frac{n^2+1}{n+1} = \\ &= \frac{n^2+2n+2}{n+2} - \frac{n^2+1}{n+1} = \\ &= \frac{(n+1)(n^2+2n+2) - (n+2)(n^2+1)}{(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{n^3+2n^2+2n+n^2+2n+2-n^3-2n^2-n-2}{(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{n^2+3n}{(n+2)(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest oczywista, bo zarówno licznik jak i mianownik ułamka w ostatniej linii są liczbami dodatnimi. Zaznaczmy, że nierówność ta jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zatem warunek (4.8) jest spełniony, czyli ciąg jest rosnący.

Na koniec przytoczmy jeszcze w miarę oczywiste

Stwierdzenie 4.31. *Niech (x_n) będzie ciągiem liczbowym.*

(1) *Jeśli ciąg (x_n) jest rosnący, to jest słabo rosnący.*
(2) *Jeśli ciąg (x_n) jest malejący, to jest słabo malejący.*
(3) *Ciąg (x_n) jest stały wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednocześnie słabo rosnący i słabo malejący.*

4.3. Zbieżność ciągów

Kluczowym pojęciem analizy matematycznej jest pojęcie zbieżności i granicy. Pojęcie to obecne w rozważaniach matematycznych już od starożytności. Jednak posługiwano się nimi w sposób intuicyjny bez definicji.

Przykład 4.32. Rozważmy odcinek o jednostkowej długości. Podzielmy go na dwie równe części. Jeden z powstałych w ten sposób odcinków podzielmy znowu na dwie równe części.

I znowu jeden z otrzymanych odcinków podzielmy na dwie równe części, itd. Długości powstałych w ten sposób odcinków są coraz mniejsze i jest intuicyjnie jasne, że te długości "dążą" do zera.

4.3.1. Definicja granicy ciągu. Jakkolwiek w ostatnim przykładzie wszystkie wydaje się oczywiste i jasne, to jednak potrzebujemy definicji, która pozwoli nam weryfikować nasze intuicje. Autorem poniższej definicji jest Augustin Louis Cauchy, francuski matematyk działający w pierwszej połowie XIX w.

Definicja 4.33. Niech (x_n) będzie ciągiem liczbowym. Mówimy, że liczba rzeczywista g jest *granicą* ciągu (x_n), jeśli

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n > N :\ |x_n - g| < \varepsilon. \tag{4.9}$$

Piszemy wtedy $g = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Mówimy, że ciąg (x_n) jest *zbieżny*, jeśli istnieje liczba g, która jest jego granicą.

Spróbujemy tę (dosyć skomplikowaną na pierwszy rzut oka) definicję wypowiedzieć w trochę inny sposób. Zacznijmy od zdefiniowania bardzo użytecznego pojęcia.

Definicja 4.34. Niech $p(n)$ będzie formą zdaniową, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Mówimy, że warunek $p(n)$ zachodzi *dla prawie wszystkich* liczb naturalnych n, jeśli zbiór $\{n \in \mathbb{N} :\sim p(n)\}$ jest skończony, tzn. zdanie $p(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich oprócz skończenie wielu liczb naturalnych n.

Równoważnie, możemy powiedzieć, że $p(n)$ jest prawdziwe dla prawie wszystkich n, jeśli istnieje liczba naturalna N taka, że $p(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich $n > N$, tj.

$$\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n > N :\ p(n).$$

Przyjrzyjmy się teraz nierówności

$$|x_n - g| < \varepsilon$$

z warunku (4.9). Możemy ją równoważnie przekształcić w następujący sposób:

$$-\varepsilon < x_n - g < \varepsilon$$

$$g - \varepsilon < x_n < g + \varepsilon$$

Ostatnie nierówności są równoważne temu, że

$$x_n \in (g-\varepsilon, g+\varepsilon).$$

Przedziały postaci $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$ nazywamy *otoczeniami* liczby g. Ostatecznie warunek (4.9) można wypowiedzieć następująco.

Liczba g jest granicą ciągu (x_n), jeśli dla każdego otoczenia $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$ liczby g prawie wszystkie wyrazy ciągu należą do tego otoczenia.

Przykład 4.35. Niech $x_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Jest to ciąg z Przykładu 4.32, o którym w intuicyjny sposób stwierdziliśmy, że ma granicę 0. Udowodnijmy to teraz posługując się Definicją 4.33.

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Musimy pokazać, że istnieje liczba naturalna N taka, że

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon.$$

Niech N będzie dowolną liczbą naturalną większą od liczby $1 - \log_2 \varepsilon$. Zatem dla dowolnej liczby naturalnej n takiej, że $n > N$ prawdziwa jest nierówność

$$n > 1 - \log_2 \varepsilon.$$

Przekształcając ją równoważnie otrzymujemy

$$n - 1 > -\log_2 \varepsilon$$

$$n - 1 > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$$

$$2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

Wykazaliśmy zatem z definicji, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$.

Przykład 4.36. Wykażemy, że ciąg $x_n = (-1)^{n-1}$ z Przykładu 4.21 nie jest zbieżny. W tym celu należy wykazać, że żadna liczba rzeczywista nie jest granicą tego ciągu. Wykażemy to niewprost. Przypuśćmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1} = g$ dla pewnej liczby rzeczywistej g. Niech $\varepsilon = 1$. Z warunku (4.9) wynika, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|(-1)^{n-1} - g| < 1 \quad \text{dla każdego } n > N. \tag{4.10}$$

Niech n_0 będzie dowolną liczbą nieparzystą większą niż N. Oczywiście wtedy mamy też $n_0 + 1 > N$. Ponieważ $(-1)^{n_0-1} = 1$ i $(-1)^{n_0} = -1$, to z (4.10) otrzymujemy

$$|1 - g| < 1 \qquad \text{i} \qquad |-1 - g| < 1.$$

Drugą nierówność można też zapisać w postaci $|1 + g| < 1$. Z nierówności tych dostajemy

$$2 = 1 + 1 = |1 + 1| = |1 - g + g + 1| \leq |1 - g| + |g + 1| < 1 + 1 = 2$$

czyli $2 < 2$, co daje oczywistą sprzeczność.

4.3.2. Własności ciągów zbieżnych. Podamy teraz kilka twierdzeń dotyczących opisujących własności ciągów zbieżnych i ich granic.

Twierdzenie 4.37. *Niech (x_n) będzie ciągiem liczbowym i niech $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g_1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g_2$, to $g_1 = g_2$.*

Powyższe twierdzenie orzeka po prostu, że każdy ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.

Twierdzenie 4.38. *Jeśli ciąg jest zbieżny, to jest ograniczony.*

Warto zwrócić uwagę, że implikacja odwrotna do tej w powyższym twierdzeniu nie jest prawdziwa. Na przykład ciąg $x_n = (-1)^{n-1}$ jest ograniczony (Przykład 4.21), ale nie jest zbieżny (Przykład 4.36).

Twierdzenie 4.39. *Niech (x_n) i (y_n) będą ciągami zbieżnymi i niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy ciągi (αx_n), $(x_n + y_n)$ i $(x_n y_n)$ są też zbieżne i prawdziwe są następujące równości:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha x_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n$,
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,
(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Jeśli dodatkowo założymy, że $y_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, to również ciąg $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ jest zbieżny oraz

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Przykład 4.40. Niech $x_n = \dfrac{3+2^n}{5-7\cdot 2^{n-1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Obliczamy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3+2^n}{5-7\cdot 2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2^{n-1}} + \frac{2^n}{2^{n-1}}}{\frac{5}{2^{n-1}} - \frac{7\cdot 2^{n-1}}{2^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot\frac{1}{2^{n-1}} + 2}{5\cdot\frac{1}{2^{n-1}} - 7} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3\cdot\frac{1}{2^{n-1}} + 2\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5\cdot\frac{1}{2^{n-1}} - 7\right)} = \frac{3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}} + 2}{5\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}} - 7} = \frac{3\cdot 0 + 2}{5\cdot 0 - 7} = -\frac{2}{7}$$

Skorzystaliśmy tutaj z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$ (patrz Przykład 4.35).

Twierdzenie 4.41. *Niech $a \in \mathbb{R}$. Jeśli (x_n) jest ciągiem zbieżnym i $x_n \geq a$, to $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq a$.*

Uwaga 4.42. Z tego, że $x_n > a$ dla $n \in \mathbb{N}$, nie wynika $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > a$.

Przykładem może tu być ciąg $x_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Mamy nierówność $\dfrac{1}{2^{n-1}} > 0$ dla każdego n, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$.

Twierdzenie 4.43. *Jeśli ciąg (x_n) jest ograniczony i monotoniczny, to jest zbieżny.*

Przykład 4.44. Niech $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Można uzasadnić, że ciąg (x_n) jest rosnący i ograniczony z góry, zatem na podstawie powyższego twierdzenia wnioskujemy, że ciąg ten jest zbieżny. Granicę tego ciągu oznaczamy literą e i nazywamy stałą Eulera. Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}. \tag{4.11}$$

Przybliżona wartość tej stałej to $\mathrm{e} \approx 2{,}71$.

Twierdzenie 4.45. (Twierdzenie o trzech ciągach) *Niech (x_n), (y_n) i (z_n) będą ciągami liczbowymi spełniającymi następujące warunki:*

(i) $x_n \leq y_n \leq z_n$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$,

(ii) *ciągi* (x_n) *i* (z_n) *są zbieżne,*

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = g$.

Wtedy ciąg (y_n) *jest zbieżny i* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = g$.

Przykład 4.46. Można uzasadnić (dowód pominiemy) następujące równości:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{4.12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \tag{4.13}$$

dla dowolnej stałej $a > 0$.

Przykład 4.47. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wykażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = 4. \tag{4.14}$$

W tym celu musimy wskazać ciągi (x_n) i (z_n) spełniające założenia Twierdzenia 4.45. Skorzystamy z następujących oczywistych nierówności:

$$4 = \sqrt[n]{4^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \leq \sqrt[n]{4^n + 4^n + 4^n} = \sqrt[n]{3 \cdot 4^n} = 4\sqrt[n]{3}$$

Na podstawie poprzedniego przykładu stwierdzamy, że

$$\lim_{n\to\infty} 4\sqrt[n]{3} = 4 \cdot 1 = 4.$$

Ponieważ po lewej stronie tych nierówności występuje ciąg stały o wartości 4, to założenia twierdzenia o trzech ciągach są spełnione. Równość (4.14) jest zatem spełniona.

4.3.3. Granice niewłaściwe. Oprócz ciągów posiadających granicę będącą liczbą rzeczywistą interesować nas także będą ciągi zbieżne do nieskończoności. O takich ciągach będziemy mówili, że mają granicę niewłaściwą.

Definicja 4.48. Niech (x_n) będzie ciągiem liczbowym. Mówimy, że ciąg ten jest *zbieżny do plus nieskończoności*, jeśli dla każdej liczby $C \in \mathbb{R}$ prawie wszystkie wyrazy tego ciągu spełniają nierówność $x_n > C$. Równoważnie:

$$\forall\, C \in \mathbb{R}\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n > N :\ x_n > C.$$

Piszemy wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Analogicznie, mówimy, że ciąg (x_n) jest *zbieżny do minus nieskończoności*, jeśli dla każdej liczby $C \in \mathbb{R}$ prawie wszystkie wyrazy tego ciągu spełniają nierówność $x_n < C$. Równoważnie:

$$\forall\, C \in \mathbb{R}\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n > N :\ x_n < C.$$

Piszemy wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Przykład 4.49. Niech $x_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$ będzie ciągiem z Przykładu 4.23. Wykażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = +\infty.$$

Wykażemy, że dla każdej liczby C nierówność

$$\frac{n^2+1}{n+1} > C \tag{4.15}$$

jest spełniona dla prawie wszystkich liczb naturalnych n. Zauważmy, że nierówność ta jest równoważna nierównościom

$$n^2+1 > C(n+1)$$

$$n^2 - Cn + 1 - C > 0. \tag{4.16}$$

Niech $f(x) = x^2 - Cx + 1 - C$. Podobnie jak w Przykładzie 4.23 rozważamy nierówność kwadratową

$$x^2 - Cx + 1 - C > 0. \tag{4.17}$$

Zbiór rozwiązań tej nierówności może być następującej postaci:

(a) cały zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ w przypadku, gdy funkcja f nie ma miejsc zerowych,
(b) $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ w przypadku, gdy f ma jedno rozwiązanie x_0,
(c) $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ w przypadku, gdy f ma dwa rozwiązania x_1, x_2 i $x_1 < x_2$.

Zauważmy, że w każdym z tych trzech przypadków będzie się w zbiorze rozwiązań zawierał przedział (N, ∞) dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że jeśli $n > N$, to n będzie rozwiązaniem nierówności (4.17). To oznacza, że n będzie także rozwiązaniem nierówności (4.16). Ta zaś jest równoważna nierówności (4.15). Wykazaliśmy zatem, że jeśli $n > N$, to n spełnia nierówność (4.15).

Omówimy teraz podstawowe własności ciągów z granicą niewłaściwą.

Twierdzenie 4.50. *Jeśli ciąg ma granicę niewłaściwą, to jest nieograniczony.*

Przykład 4.51. Niech $x_n = (-1)^n n$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Ciąg ten jest nieograniczony, bo $|x_n| = n$ dla $n \in \mathbb{N}$, a więc jest niemożliwe by istniała stała $C > 0$ taka, że nierówność $|x_n| \leq C$ jest spełniona dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Z Twierdzenia 4.38 wynika zatem, że ciąg (x_n) nie ma granicy. Ponadto ciąg ten nie ma granicy niewłaściwej: nie jest zbieżny do plus nieskończoności ani nie nie jest zbieżny do minus nieskończoności. Oznacza to, że implikacji w Twierdzeniu 4.50 nie da się odwrócić.

Twierdzenie 4.52. *Jeśli ciąg jest monotoniczny i nieograniczony, to ma granicę niewłaściwą.*

Z tego twierdzenia i z Twierdzenia 4.43 wynika, że każdy ciąg monotoniczny ma granicę właściwą lub niewłaściwą.

Twierdzenie 4.53. *Niech (x_n) i (y_n) będą ciągami mającymi granicę niewłaściwą, zaś (z_n) i (w_n) niech będą ciągami zbieżnymi.*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$,
(2) *Jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.
(3) *Jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$.
(4) *Ciąg $(x_n y_n)$ ma granicę niewłaściwą, a znak nieskończoności w granicy jest iloczynem znaków poszczególnych granic.*
(5) *Jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$, *to ciąg $(x_n z_n)$ ma granicę niewłaściwą, a znak nieskończoności w granicy jest iloczynem znaków poszczególnych granic.*
(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{x_n} = 0$. *W szczególności* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$.
(7) *Jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ *i* $z_n > 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n} = +\infty$.
(8) *Jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ *i* $z_n < 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n} = -\infty$.
(9) *Jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ *i spełniony jest jeden z następujących warunków*
  (a) $\lim\limits_{n\to\infty} w_n > 0$ *i* $z_n > 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
  (b) $\lim\limits_{n\to\infty} w_n < 0$ *i* $z_n < 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
  to $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{w_n}{z_n} = +\infty$.

(10) *Jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ *i spełniony jest jeden z następujących warunków*
(a) $\lim\limits_{n\to\infty} w_n > 0$ *i* $z_n < 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} w_n < 0$ *i* $z_n > 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
to $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{w_n}{z_n} = -\infty$.

4.3.4. Symbole nieoznaczone. Rozważmy dwa ciągi (x_n) i (y_n) takie, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Z punktu (2) Twierdzenia 4.53 wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$. Czasami zapisujemy to symbolicznie

$$\infty + \infty = \infty$$

Nasuwa się teraz pytanie, czy da się powiedzieć cos ogólnego o granicy ciągu $(x_n - y_n)$. Okazuje się, że tym razem odpowiedź jest negatywna.

Stwierdzenie 4.54. *Dla dowolnej liczby* g *istnieją ciągi* (x_n) *i* (y_n) *takie, że* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = g$.

DOWÓD. Rozważmy ciągi $x_n = g + n$, $y_n = n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $x_n - y_n = g$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. □

Zatem w przeciwieństwie do $\infty + \infty$ nie da się w sposób przypisać jednoznacznej (nawet niewłaściwej) wartości wyrażeniu $\infty - \infty$. Wyrażenia tego typu nazwiemy *symbolami nieoznaczonymi*.

Symbolami nieoznaczonymi są:

$$\infty - \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 1^{\infty} \qquad \infty^0.$$

Uwaga 4.55. Należy zaznaczyć, że nie każdy ułamek w którym licznik lub mianownik jest równy 0 lub ∞ lub inne wyrażenie jest symbolem nieoznaczonym. Z Twierdzenia 4.53 wynikają następujące równości:

$$\infty + \infty = +\infty,$$
$$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty, \qquad (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty, \qquad (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty,$$
$$\frac{1}{0^+} = +\infty, \qquad \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

$$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty, \quad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{0^+} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$$

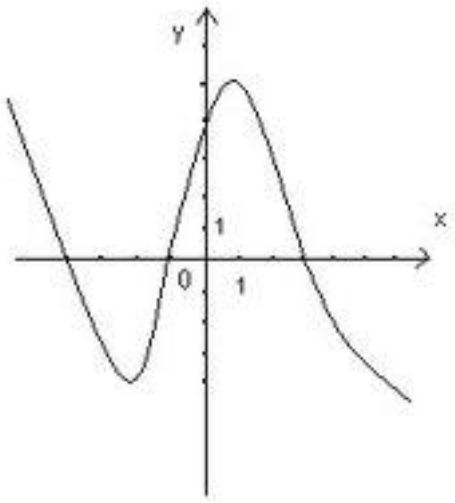
ROZDZIAŁ 5

Funkcje rzeczywiste jednej zmiennej

W dalszym ciągu naszego wykładu interesować nas będą funkcje, której dziedzina i przeciwdziedzina są podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, tj. $f : X \to Y$, gdzie $X, Y \subset \mathbb{R}$. Najczęściej jako zbiory X i Y będą tutaj występowały przedziały (mogą być nieograniczone), a reguła, według której warości są przyporządkowywane argumentom, jest opisana wzorem.

5.1. Wykres funkcji rzeczywistej

Przypomnijmy, że w Rozdziale 3 zdefiniowaliśmy funkcję $f : X \to Y$ jako podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ spełniający pewne własności (patrz Definicja 3.23).



Jeśli $X = Y = \mathbb{R}$, to $X \times Y$ jest zbiorem $\mathbb{R}^2$, który opisaliśmy w Przykładzie 2.8. Przypomnijmy, że zbiór $\mathbb{R}^2$ można interpretować graficznie jako płaszczyznę wyposażoną w kartezjański układ współrzędnych. Wynika z tego, że funkcja rzeczywsita zmiennej rzeczywistej może być utożsamiana z pewnym podzbiorem płaszczyzny. Ten podzbiór to wykres funkcji f.

Definicja 5.1. *Wykresem* funkcji $f : X \to Y$, gdzie $X, Y \subset \mathbb{R}$, nazywamy podzbiór płaszczyzny W_f złożony ze wszystkich punktów postaci $(x, f(x))$, gdzie $x \in X$, tj.

$$W_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Wykres funkcji jest bardzo użyteczną graficzną formą prezentacji funkcji. Umożliwia rozpoznawanie i obserwowanie różbych własności funkcji takich jak ekstrema, monotoniczność, ciągłość, itp., o których będziemy mówili w następnych wykładach.

5.2. Dziedzina funkcji rzeczywistej

Funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej najczęściej definiujemy poprzez podanie wzoru funkcji. Musimy jednak pamiętać, że do pełnego opisu funkcji zawsze należy sprecyzować jaka jest jej dziedzina i przeciwdziedzina.

Przykład 5.2. Przypomnijmy, że w Przykładach 3.37, 3.38, 3.43 i 3.44 rozważaliśmy funkcje o wzorze $f(x) = x^2$. Zauważyliśmy, że własności funkcji zmieniają się, gdy zmieniamy dziedzinę i/lub przeciwdziedzinę mimo, że wzór pozostaje ten sam.

- Jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to f nie jest różnowartościowa i nie jest "na".
- Jeśli $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, to f jest różnowartościowa, ale nie jest "na".
- Jeśli $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, to f jest "na", ale nie jest różnowartościowa.
- Jeśli $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, to f jest odwracalna.

W przypadku, gdy funkcja określona jest tylko wzorem, będziemy przyjmować domyślnie, że jej dziedzina i przeciwdziedzina są maksymalnymi podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych, dla których określenie funkcji danym wzorem ma sens. Oznacza to, że **domyślną przeciwdziedziną jest zawsze cały zbiór $\mathbb{R}$.**

Jeśli chodzi o domyślną dziedzinę, to będzie nią tak zwana *dziedzina naturalna* D_f, czyli zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, które da się podstawić do wzoru funkcji.

Przykład 5.3. Rozważmy funkcję zadaną wzorem $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$.

Wyrażenie $\frac{1}{x}$ ma sens dla $x \neq 0$. Z kolei pierwiastek kwadratowy ma sens tylko wtedy, gdy liczba pierwiastkowana jest nieujemna. Oznacza to, że $D_f = (0, \infty)$. Jeśli więc nie zdefiniowano dziedziny i przeciwdziedziny, to przyjmujemy $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Przykład 5.4. Niech $f(x) = \frac{\sqrt{2 - x}}{\ln x}$.

Liczba x należy do D_f wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:

(1) $2 - x \geq 0 \;\Rightarrow\; x \leq 2$, bo pierwiastkować możemy tylko liczby nieujemne,

(2) $x > 0$, bo logarytm jest określony tylko dla liczb dodatnich,

(3) $\ln x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 1$, bo liczba w mianowniku nie może być zerem.

Zbiór wszystkich x spełniających powyższe warunki jest postaci $D_f = (0, 1) \cup (1, 2]$.

5.3. Monotoniczność

W Rozdziale 4 omawialiśmy własności ciągów liczbowych. Zauważmy, że ciąg liczbowy jest szczególnym przypadkiem funkcji rzeczywistej. Zdefiniujemy teraz kilka własności analogicznych do tych, które definiowaliśmy dla ciągów.

Definicja 5.5. Niech $f : X \to Y$, gdzie $X, Y \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f jest

(a) *rosnąca* w zbiorze X, jeśli $f(x_1) < f(x_2)$ dla każdych $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X :\; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2);$$

(b) *słabo rosnąca* w zbiorze X, jeśli $f(x_1) \leq f(x_2)$ dla każdych $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X :\; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2);$$

(c) *malejąca* w zbiorze X, jeśli $f(x_1) > f(x_2)$ dla każdych $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X :\; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2);$$

(d) *słabo malejąca* w zbiorze X, jeśli $f(x_1) \geq f(x_2)$ dla każdych $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X :\; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2);$$

(e) *stała* w zbiorze X, jeśli $f(x_1) = f(x_2)$ dla każdych $x_1, x_2 \in X$.

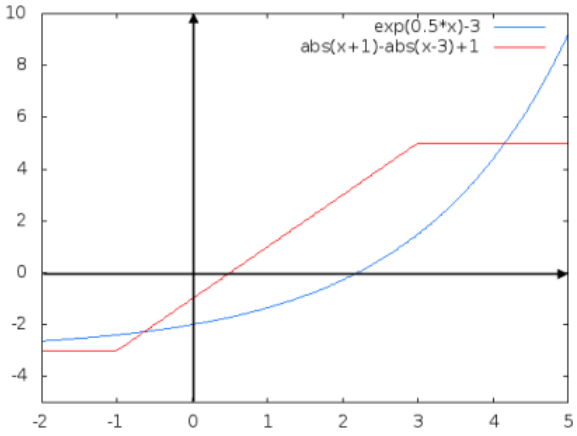
$$\forall\, x_1, x_2 \in X :\; f(x_1) < f(x_2);$$

Jeśli funkcja spełnia jeden z powyższych warunków, to mówimy, że jest *monotoniczna*.

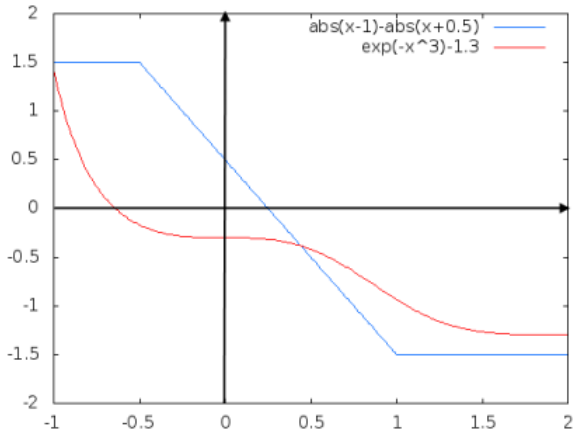
Na poniższych rysunkach widzimy przykłady wykresów dla funkcji monotonicznych. Śledzimy zachowanie się wykresu poruszając się od lewej do prawej strony. Zauważmy, że w przypadku funkcji rosnącej wykres cały wznosi się w górę. W przypadku zaś funkcji słabo rosnącej możliwe są poziome fragmenty wykresu.

Analogicznie obserwacje można poczynić dla funkcji malejących i słabo malejących.

Oczywiście nie każda funkcja musi być monotoniczna. Przykłady takich funkcji widzimy na Rysunku 5.3. Funkcja, której wykres jest niebieski nie jest ani rosnąca, ani malejąca. Z drugiej

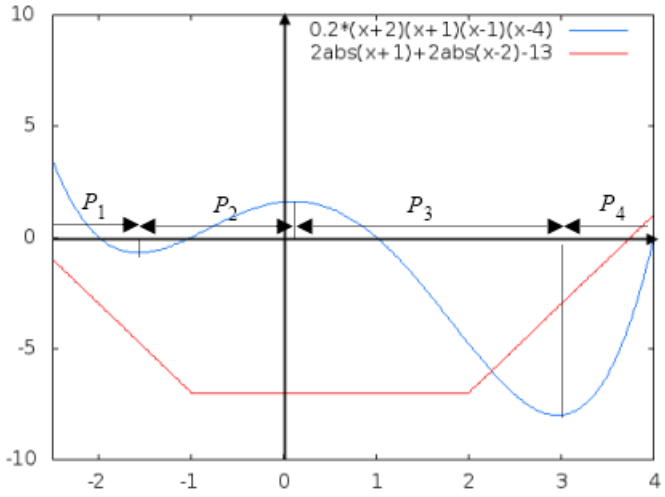


RYSUNEK 5.1. Wykres funkcji rosnącej (niebieski) i słabo rosnącej (czerwony)



RYSUNEK 5.2. Wykres funkcji malejącej (czerwony) i słabo malejącej (niebieski)

strony, łatwo zauważyć, że jeśli ograniczyć się do pewnych przedziałów na osi X, to da się wykryć monotoniczność. Na przykład, na przedziale P_2 wykres jest wznoszący. Jest to ilustracja faktu, że funkcja ta ograniczona tylko do przedziału P_2 jest rosnąca. Z kolei, na przedziale P_3 funkcja jest malejąca. Oba te przedziały mają jeszcze jedną własność. Zauważmy, że przedziału P_2 nie da się przedłużyć tak, aby funkcja na tym przedłużonym przedziale była dalej rosnąca. Podobnie jest z przedziałem P_3: jest on maksymalnym przedziałem, na którym funkcja jest malejąca. Takie maksymalne przedziały, na których funkcja jest monotoniczna, nazywamy *przedziałami monotoniczności*. Niebieska funkcja ma zatem cztery przdziały monotoniczności: P_1 i P_3, na których jest malejąca, oraz P_2 i P_4, na których jest rosnąca. Funkcja czerwona ma



RYSUNEK 5.3. Funkcje niemonotoniczne i przedziały monotoniczności

trzy monotoniczności: na przedziale $(-\infty, -1)$ jest malejąca, na $(-1, 2)$ – stała, zaś na $(2, \infty)$ – rosnąca.

5.4. Funkcje ograniczone

Podobnie jak w przypadku ciągów możemy rozważać funkcje ograniczone.

Definicja 5.6. Niech $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f jest *ograniczona* w zbiorze X, jeśli istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że

$$a \leq f(x) \leq b$$

dla każdego $x \in X$.

Równoważnie możemy powiedzieć, że f jest ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists\, C > 0\ \forall\, x \in X :\ |f(x)| \leq C. \tag{5.1}$$

5.5. Funkcje elementarne

Wymienimy tutaj wszystkie typy tzw. funkcji elementarnych i omówimy krótko ich własności. Krótko mówiąc, funkcje elementarne to funkcje rzeczywiste, które dadzą się zapisać przy pomocy podstawowych wyrażeń algebraicznych i analitycznych.

5.5.1. Funkcja liniowa. Jest to funkcja, której wzór ma postać

$$f(x) = ax + b, \tag{5.2}$$

gdzie a, b są dowolnymi współczynnikami rzeczywistymi. Współczynnik a bywa nazywany *współczynnikiem kierunkowym*.

Dziedziną funkcji liniowej jest cały zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Wykresem funkcji liniowej jest prosta o równaniu $y = ax + b$.

Ilość miejsc zerowych funkcji liniowej zależy od współczynników a i b:

- jedno miejsce zerowe $x_0 = -\frac{b}{a}$, gdy $a \neq 0$;
- brak miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$;
- każda liczba rzeczywista jest miejscem zerowym, gdy $a = b = 0$.

5.5.2. Funkcja kwadratowa. Jest to funkcja, której wzór ma postać

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{5.3}$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$.

Dziedziną funkcji kwadratowej jest cały zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Wykresem jest parabola. Ma ona ramiona skierowany do góry, gdy $a > 0$ i ramiona skierowane do dołu, gdy $a < 0$.

Wzór (5.3) można sprowadzić do tzw. *postaci kanonicznej*

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, \tag{5.4}$$

gdzie wpółczynniki p i q są współrzędnymi wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f i są zadane wzorami

$$p = -\frac{b}{2a}, \qquad q = -\frac{\Delta}{4a}. \tag{5.5}$$

Współczynnik Δ zwany jest *wyróżnikiem* trójmianu kwadratowego (5.3) i obliczamy go ze wzoru

$$\Delta = b^2 - 4ac. \tag{5.6}$$

Ilość miejsc zerowych funkcji kwadratowej zależy od znaku wyróżnika Δ:

- dwa miejsca zerowe $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, gdy $\Delta > 0$;
- jedno miejsce zerowe $x_0 = -\frac{b}{2a}$, gdy $\Delta = 0$;
- brak miejsc zerowych, gdy $\Delta < 0$.

5.5.3. Wielomian. Jest to funkcja, której wzór jest postaci

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{5.7}$$

gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ oraz $a_n \neq 0$.

Dla każdego wielomianu określamy jego *stopień*. Dla wielomianu, którego wzór jest postaci (5.7) definiujemy $\deg f = n$.

Przyjmujemy także, że wielomianem jest funkcja stale równa zero, tzn. określona warunkiem

$$f(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Nazywamy ją *wielomianem zerowym* oraz określamy stopień wielomianu zerowego jako $-\infty$.

Diedziną każdego wielomianu jest cały zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Szczególnymi przypadkami wielomianów są:

- funkcje liniowe – są to wielomiany stopnia 1, 0 lub $-\infty$,
- funkcje kwadratowe – są to wielomiany stopnia 2.

Jeżeli $n \geq 0$, to ilość miejsc zerowych wielomianu stopnia n nie przekracza n.

5.5.4. Funkcja wymierna. Jest to funkcja, której wzór ma postać

$$f(x) = \frac{W(x)}{Q(x)}, \tag{5.8}$$

gdzie W i Q są wielomianami, przy czym $\deg Q \geq 0$.

Dziedziną funkcji wymiernej postaci (5.8) jest zbiór $\mathbb{R} \setminus Z_Q$, gdzie Z_Q oznacza zbiór miejsc zerowych wielomianu Q.

Miejsca zerowe funkcji wymiernej f to elementy zbioru $Z_W \setminus Z_Q$.

5.5.5. Funkcja potęgowa. Jest funkcja zadana wzorem

$$f(x) = x^\alpha, \tag{5.9}$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dziedzina funkcji potęgowej zależy od wykładnika α:

- $\mathbb{R}$, gdy $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$[1],
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, gdy $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$,
- $[0, +\infty)$, gdy $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$,
- $(0, +\infty)$, gdy $\alpha \in \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Z}$.

Szczególnymi przypadkami funkcji potęgowej są:

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\alpha = -1$;

[1] Przyjmujemy umowę $0^0 = 1$.

- $f(x) = \sqrt{x}$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$;
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $\alpha = \dfrac{1}{3}$;
- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

5.5.6. Funkcja wykładnicza. Jest to funkcja, której wzór jest postaci

$$f(x) = a^x, \tag{5.10}$$

gdzie $a > 0$.

Dziedziną funkcji wykładniczej jest cały zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Funkcja wykładnicza nie ma miejsc zerowych i przyjmuje tylko dodatnie wartości.

5.5.7. Funkcja logarytmiczna. Jest to funkcja, której wzór jest postaci

$$f(x) = \log_a x, \tag{5.11}$$

gdzie $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Dziedziną funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb dodatnich $(0,+\infty)$.

Niezależnie od wartości współczynnika a funkcja logarytmiczna ma jedno miejsce zerowe w punkcie $x = 1$.

5.5.8. Funkcje trygonometryczne. Do funkcji trygonometrycznych zaliczamy następujące cztery funkcje:

(1) $f(x) = \sin x$,
(2) $f(x) = \cos x$,
(3) $f(x) = \operatorname{tg} x$,
(4) $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Dziedziną funkcji $\sin$ i $\cos$ jest cały zbiór liczb rzeczywistych. Dziedziną funkcji tg jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$, zaś dziedziną funkcji ctg – zbiór $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

5.5.9. Funkcje cyklometryczne. Są to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych. Zaliczamy do nich:

(1) $f(x) = \operatorname{arcsin} x$,
(2) $f(x) = \operatorname{arccos} x$,
(3) $f(x) = \operatorname{arctg} x$,
(4) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

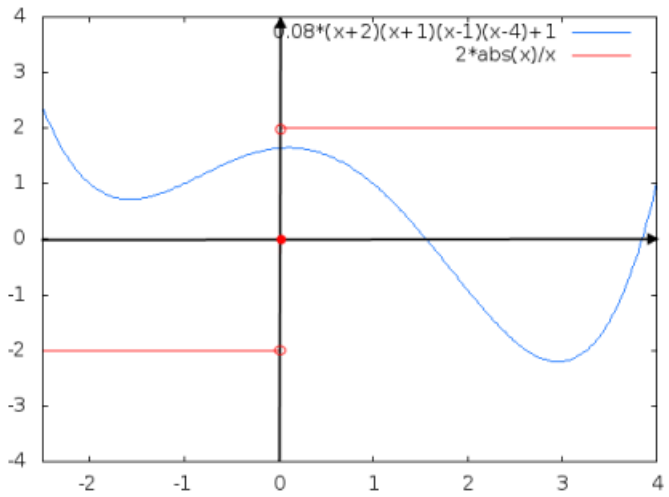
Dziedziną funkcji arcsin i arccos jest przedział $[-1,1]$, zaś dziedziną funkcji arctg i arcctg jest cały zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

ROZDZIAŁ 6

Granice i ciągłość funkcji jednej zmiennej

W Rozdziale 4 omówiliśmy jedno z podstawowych pojęć analizy matematycznej: granicy ciągu. Teraz pokażemy, jak to pojęcie można zastosować do badania funkcji rzeczywistych. Głównym naszym celem jest nadanie ścisłego znaczenia pojęciu funkcji ciągłej.

Przykład 6.1. Intuicja sugeruje, że funkcja ciągła, to taka funkcja, której wykres można narysować "bez odrywania ręki". Na rysunku wykres niebieski spełnia ten warunek. Z kolei wykres czer-



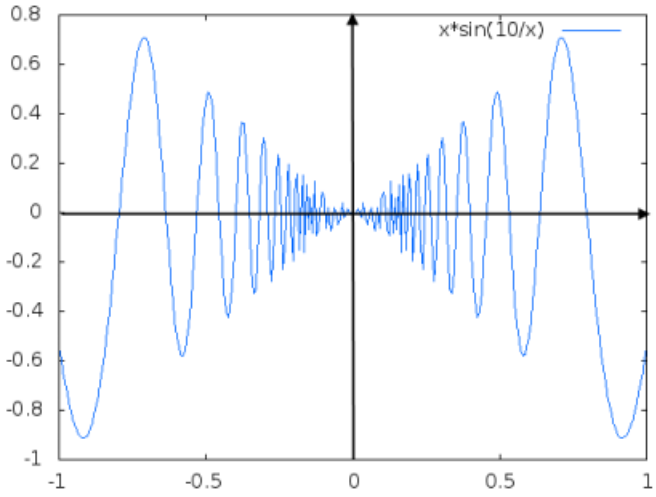
RYSUNEK 6.1. Wykres funkcji ciągłej (niebieski) i nieciągłej (czerwony)

wony składa się z trzech "kawałków": dwóch półprostuch i jednego punktu. Intuicyjnie więc rozpoznajemy, że niebieski wykres jest wykresem funkcji ciągłej, zaś wykres czerwony przedstawia funkcję nieciągłą.

Przykład 6.2. Intuicja może nas czasami zawieść. Kolejny rysunek prezentuje wykres funkcji zadanej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{10}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Mimo, że jest to funkcja ciągła, nie da się jej wykresu narysować "bez odrywania ręki", bo w



RYSUNEK 6.2. Wykres funkcji ciągłej, którego nie da się narysować "bez odrywania ręki"

każdym (nawet bardzo małym) otoczeniu punktu 0 jest nieskończenie wiele przedziałów monotoniczności.

6.1. Granica funkcji w punkcie

Kluczowym punktem w zrozumieniu czym jest ciągłość, jest pojęcie granicy funkcji w punkcie. Zanim zdefiniujeny to pojęcie, potrzebujemy kilku pojęć pomocniczych.

6.1.1. Otoczenie i sąsiedztwo punktu. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ dowolną liczbą. Dobrze jest rozumieć tę liczbę jako pewien punkt na osi liczbowej, czyli na prostej.

Definicja 6.3. *Otoczeniem* punktu x_0 nazywamy dowolny przedział otwarty postaci $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, gdzie δ jest dowolną liczbą dodatnią.

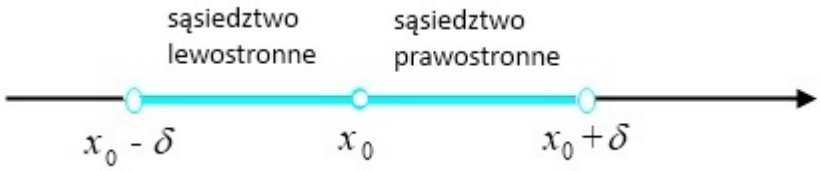
Z kolei, *sąsiedztwem* punktu x_0 nazywamy dowolny podzbiór w $\mathbb{R}$, który jest postaci $(x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$, czyli $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$, gdzie $\delta > 0$.

Jak widać, sąsiedztwo różni się od otoczenia jedynie tym, że sam punkt x_0 należy do swojego otoczenia, a nie należy do sąsiedztwa.

Czasami przedział $(x_0-\delta, x_0)$, czyli lewą "połówkę sąsiedztwa punktu x_0 nazywać będziemy *sąsiedztwem lewostronnym*, zaś przedział $(x_0, x_0+\delta)$, czyli prawą połówkę sąsiedztwa – *sąsiedztwem prawostronnym*.



RYSUNEK 6.3. Otoczenie punktu x_0



RYSUNEK 6.4. Sąsiedztwo punktu x_0

6.1.2. Określenie granicy funkcji w punkcie. Niech $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$, i niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Naszym celem jest zdefiniowanie granicy funkcji f w punkcie x_0. Aby nasze zadanie uczynić sensownym, musimy założyć, że funkcja f jest określona na pewnym sąsiedztwie punktu x_0, tzn.

$$\exists\, \delta > 0 : \ (x_0 - \delta) \cup (x_0, x_0 + \delta) \subset X. \tag{6.1}$$

Zauważmy, że w tym momencie **nie zakładamy**, że sam punkt x_0 należy do dziedziny funkcji f. Granicę funkcji można również liczyć w punktach, w których funkcja nie jest określona.

Definicja 6.4. (Definicja Heine'go) Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą funkcji f w punkcie x_0*, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

dla każdego ciągu (x_n) spełniającego warunki:

(1) $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Jeśli g jest granicą funkcji f w punkcie x_0, to piszemy $g = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Przykład 6.5. Niech $f(x) = 3x - 5$ i niech $x_0 = 4$.
Oczywiście warunek (6.1) jest spełniony, bo funkcja f jest określona na całym zbiorze $\mathbb{R}$. Rozważmy teraz ciąg $x_n = 4 + \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$,

zatem ciąg ten spełnia warunki (1) i (2) z Definicji 6.4. Obliczamy teraz

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(4+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[3\left(4+\frac{1}{n}\right)-5\right] = \lim_{n\to\infty}\left(7+\frac{3}{n}\right) = 7$$

Zauważmy, że w tym momencie nie możemy stwierdzić, czy istnieje i jaka jest granica funkcji f w punkcie 4. Definicja mówi bowiem, że **dla każdego** ciągu (x_n) spełniającego warunki (1) i (2) musiałaby zachodzić równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 7$.

Sprawdźmy, że tak jest. Niech (x_n) będzie **dowolnym** ciągiem spełniającym warunki (1) i (2), tj.takim, że $x_n \neq 4$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 4.$$

Mamy wtedy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(3x_n - 5) = 3\lim_{n\to\infty} x_n - 5 = 3\cdot 4 - 5 = 7.$$

Wykazaliśmy zatem, że $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 7$.

Przykład 6.6. Niech $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2-3x+1}$ i $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$. Warunek 6.1 jest spełniony bo np. dla $\delta = \dfrac{1}{2}$ mamy

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right) \subset D_f.$$

Wykażemy, że funkcja f ma granicę w punkcie $x_0 = \dfrac{1}{2}$. Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunki

(1) $x_n \neq \dfrac{1}{2}$ i $x_n \neq 1$ dla $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

Obliczamy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n^2+5x_n-3}{2x_n^2-3x_n+1}. \tag{6.2}$$

Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty}(2x_n^2+5x_n-3) = 2\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 + 5\lim_{n\to\infty} x_n - 3 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\cdot\frac{1}{2} - 3 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(2x_n^2-3x_n+1) = 2\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 - 3\lim_{n\to\infty} x_n + 1 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{1}{2} + 1 = 0$$

Wynika stąd, że w granicy (6.2) mamy symbol nieoznaczony $\dfrac{0}{0}$.

Zauważmy jednak, że przy okazji wykryliśmy, że obie funkcje kwadratowe z licznika i z mianownika mają wspólny pierwiastek: $\frac{1}{2}$. Znajdźmy postacie iloczynowe obu tych funkcji. W tym celu należy wyznaczyć oba pierwiastki każdej z tych funkcji. Rozwiązując odpowiednie równania kwadratowe łatwo wyliczamy, że pierwiastkami funkcji kwadratowej z licznika są -3 i $\frac{1}{2}$, zaś dla mianownika są to $\frac{1}{2}$ i 1. Stwierdzamy zatem, że

$$2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3) = (2x-1)(x+3),$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) = (2x-1)(x-1).$$

Korzystając z tego kontynuujemy obliczenia granicy z (6.2)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2x_n-1)(x_n+3)}{(2x_n-1)(x_n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n+3}{x_n-1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n + 3}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n - 1} = \frac{\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}-1} = -7.$$

Podkreślmy, że powyższa równość zachodzi **dla każdego** ciągu (x_n) spełniającego warunki (1) i (2), zatem, w myśl Definicji 6.4 wykazaliśmy, że

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x^2+5x-3}{2x^2-3x+1} = -7.$$

Przykład 6.7. Niech $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-3}{2x^2-3x+1}$ i $x_0 = 1$.

Jest to sama funkcja co w poprzednim przykładzie, a x_0 jest teraz drugim punktem, który nie należy do dziedziny funkcji f. Podobnie jak poprzednio sprawdzamy, że i tutaj spełniony jest warunek (6.1). Wykażemy, że tym razem jednak funkcja f nie ma granicy w punkcie x_0.

Niech $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Łatwo zauważyć, że ciąg ten spełnia warunki (1) i (2) w Definicji 6.4. Podobnie jak w poprzednim przykładzie wykazujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n+3}{x_n-1}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} (x_n+3) = \lim_{n\to\infty} \left(4 + \frac{1}{n}\right) = 4,$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Na podstawie punktu (9) Twierdzenia 4.53 stwierdzamy, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$, a więc ciąg $f(x_n)$ nie jest zbieżny do żadnej liczby g. To zaś wyklucza istnienie granicy funkcji f w punkcie $x_0 = 1$.

Przykład 6.8. Niech $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ i niech $x_0 = 0$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, zatem każde sąsiedztwo punktu $x_0 = 0$ zawiera się w dziedzinie, czy warunek (6.1) jest spełniony. Wykażemy, że mimo to funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$.

Tym razem rozważymy dwa ciągi $x_n = \dfrac{1}{n}$ i $x'_n = -\dfrac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Łatwo sprawdzić, że oba spełniają warunki (1) i (2) w Definicji 6.4. Obliczamy teraz:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n}\right|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{|x'_n|}{x'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|-\frac{1}{n}\right|}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1.$$

Mimo, że oba ciągi $(f(x_n))$ i $(f(x'_n))$ są zbieżne, to mają różne granice. To w myśl Definicji 6.4 wyklucza istnienie granicy funkcji f w punkcie x_0, bo do tego potrzebne jest, aby każdy ciąg $f(x_n)$ miał taką samą granicę.

Przykład 6.9. Niech $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ i $x_0 = 0$.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie stwierdzamy, że warunek (6.1) jest spełniony. I tutaj też wykażemy, że funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$ wskazując dwa ciągi (x_n) i (x'_n) zbieżne do x_0 takie, że ciągi $(f(x_n))$ i $(f(x'_n))$ mają różne granice. Niech $x_n = \dfrac{2}{\pi(4n+1)}$ i $x'_n = \dfrac{2}{\pi(4n+3)}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi(4n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{2} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x'_n) &= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x'_n} = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi(4n+3)}{2} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{3\pi}{2} = -1\end{aligned}$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie konkludujemy, że f nie ma granicy w punkcie x_0.

Warto zaznaczyć, że wspomniany już przez nas Cauchy wykazał, że przyjęta przez nas definicja Heinego granicy funkcji w punkcie równoważna jest tzw. definicji epsilonowo-deltowej, zwanej też definicją Cauchy'ego.

Twierdzenie 6.10. (Definicja Cauchy'ego) *Niech $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ i niech będzie spełniony warunek (6.1). Liczba g jest granicą funkcji w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X:\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - g| < \varepsilon.$$

6.1.3. Własności granicy funkcji w punkcie. Ponieważ do zdefiniowania granicy funkcji w punkcie użyliśmy pojęcia granicy ciągu, to oczywiście wiele własności tej ostatniej przenosi się na granicę funkcji. Przytoczymy tutaj najważniejsze twierdzenia, które w większości są wnioskami z twierdzeń z Rozdziału 4.

Twierdzenie 6.11. *Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g_1$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g_2$, to $g_1 = g_2$.*

Innymi słowy, granica funkcji w punkcie (jeśli istnieje) jest jednoznacznie wyznaczona.

Twierdzenie 6.12. *Niech f i g będą funkcjami posiadającymi granice w punkcie x_0 i niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy funkcje αf, $f + g$ i fg też mają granice w punkcie x_0 oraz zachodzą równości:*

(a) $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f(x)) = \alpha \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,

(b) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

(c) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Jeśli dodatkowo założymy, że $g(x) \neq 0$ dla x należących do pewnego sąsiedztwa punktu x_0 i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, to

(d) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

Twierdzenie 6.13. *Niech $a \in \mathbb{R}$. Jeśli f ma granicę w punkcie x_0 i $f(x) \geq a$ dla x należących do pewnego sąsiedztwa punktu x_0, to $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq a$.*

Podobnie jak w przypadku ciągów (patrz Uwaga 4.42) tutaj też nie można zastąpić słabych nierówności ($\geq$) ostrymi ($>$).

Twierdzenie 6.14. *Niech f i g będą funkcjami określonymi na pewnym sąsiedztwie punktu x_0. Jeśli $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ i g jest funkcją ograniczoną w pewnym sąsiedztwie punktu x_0, to $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.*

Przykład 6.15. Niech $f(x) = \dfrac{x}{x-1}\sin\dfrac{1}{x^2}$ i $x_0 = 0$.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Można ją przedstawić jako iloczyn dwóch funkcji:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{x}{x-1}, \\ f_2(x) &= \sin\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja $\sin$ przyjmuje wartości z przedziału $[-1,1]$, to

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x^2} \leq 1$$

dla wszystkich $x \neq 0$. Funkcja f_2 jest więc ograniczona. Ponadto obliczamy

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x-1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Z Twierdzenia 6.14 wnioskujemy więc, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-1}\sin\frac{1}{x^2} = 0.$$

6.1.4. Granice niewłaściwe. Podobnie jak dla ciągów, również dla funkcji można rozważać granice niewłaściwe. Tutaj jednak będziemy rozważali niewłaściwości dwóch rodzajów:

(I) niewłaściwy jest punkt x_0,

(II) niewłaściwa jest granica g.

6.1.4.1. *Niewłaściwości I rodzaju.* Naszym celem jest zdefiniowanie granicy funkcji, gdy argument dąży do $+\infty$ lub do $-\infty$. Można do tego zastosować Definicję 6.4, tylko trzeba przeformułować pojęcie sąsiedztwa.

Definicja 6.16. *Sąsiedztwem punktu $+\infty$* nazywamy dowolny przedział postaci (a,∞) dla pewnego $a\in\mathbb{R}$.

Sąsiedztwem punktu $-\infty$ nazywamy dowolny przedział postaci $(-\infty,a)$ dla pewnego $a\in\mathbb{R}$.

Granica funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ w $+\infty$ ma sens tylko wtedy, gdy zbiór X zawiera jakieś otoczenie punktu $+\infty$, czyli

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : (a, \infty) \subset X. \tag{6.3}$$

Przykład 6.17. Niech $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.
Element x należy do dziedziny funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $\sin x \neq 0$. Ponieważ $\sin x = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, to wnioskujemy, że

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ten zbiór nie zawiera żadnego przedziału postaci (a, ∞), czyli żadnego otoczenia punktu $+\infty$.

Podobnie, jeśli chcemy definiować granicę funkcji w punkcie $-\infty$, to zakładamy, że

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : (-\infty, a) \subset X. \tag{6.4}$$

Definicja 6.18. (Definicja Heine'go) Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą funkcji f w punkcie* $+\infty$, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

dla każdego ciągu (x_n) spełniającego warunki:

(1) $x_n \in X$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Analogicznie, liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą funkcji f w punkcie* $-\infty$, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

dla każdego ciągu (x_n) spełniającego warunki:

(1) $x_n \in X$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Jeśli g jest granicą funkcji f w punkcie $+\infty$, to piszemy $g = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, a jeśli jest granicą w punkcie $-\infty$, to piszemy $g = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

6.1.4.2. *Niewłaściwości II rodzaju.* Tym razem chcemy powiedzieć, co to znaczy, że funkcja f ma niewłasciwą granicę w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$. Ponownie musimy założyć, że f jest określona na pewnym sąsiedztwie punktu x_0, tzn. spełnia warunek (6.1).

Definicja 6.19. (Definicja Heine'go) Mówimy, że $+\infty$ jest *granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie x_0*, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$$

dla każdego ciągu (x_n) spełniającego warunki:

(1) $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Analogicznie, mówimy, że $-\infty$ jest *granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie x_0*, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$$

dla każdego ciągu (x_n) spełniającego warunki:

(1) $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Jeśli $+\infty$ jest granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie x_0, to zapisujemy to $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, a jeśli $-\infty$ jest granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie x_0, to piszemy $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

6.1.4.3. *Kombinacje niewłaściwości I i II rodzaju.* Modyfikując odpowiednio Definicje 6.18 i 6.19 możemy zdefiniować następujące sytuacje:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= -\infty,\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= +\infty,\\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= -\infty,\\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty.
\end{aligned}$$

W każdym z tych wypadków musimy założyć odpowiedni warunek spośród (6.3) i (6.4). Dla przykładu podajmy definicję pierwszej sytuacji.

Definicja 6.20. (Definicja Heine'go) Mówimy, że $-\infty$ jest *granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie $-\infty$*, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$$

dla każdego ciągu (x_n) spełniającego warunki:

(1) $x_n \in X$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Pozostałe sytuacje definiuje się analogicznie.

6.1.5. Granice jednostronne. Zdefiniujemy teraz granicę lewostronną i prawostronną funkcji f w punkcie x_0. Należy teraz założyć, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest określona na odpowiednio lewostronnym lub prawostronnym sąsiedztwie punktu x_0, tzn.

$$\exists\, \delta > 0 : \ (x_0 - \delta, x_0) \subset X \tag{6.5}$$

lub

$$\exists\, \delta > 0 : \ (x_0, x_0 + \delta) \subset X \tag{6.6}$$

Definicja 6.21. (Definicja Heine'go) Mówimy, że $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ jest *granicą lewostronną funkcji f w punkcie x_0*, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

dla każdego ciągu (x_n) spełniającego warunki:

(1) $x_n \in X$ i $x_n < x_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Analogicznie, $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ jest *granicą prawostronną funkcji f w punkcie x_0*, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

dla każdego ciągu (x_n) spełniającego warunki:

(1) $x_n \in X$ i $x_n > x_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Jeśli g jest granicą lewostronną funkcji f w punkcie x_0, to piszemy $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g$, a jeśli g jest granicą prawostronną funkcji f w punkcie x_0, to piszemy $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g$.

Twierdzenie 6.22. *Funkcja f ma granicę w punkcie x_0 (właściwą lub niewłaściwą) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją obie granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0 i są sobie równe. W takim wypadku granica funkcji w punkcie jest równa wspólnej wartości obu granic jednostronnych.*

6.2. Ciągłość

6.2.1. Ciągłość funkcji w punkcie. Niech $f : X \to \mathbb{R}$ i niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Tym razem będziemy zakładali, że funkcja f jest określona na pewnym otoczeniu punktu x_0, tzn.

$$\exists\, \delta > 0 : \ (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X. \tag{6.7}$$

Zauważmy, że teraz zakładamy, że funkcja f jest też określona w samym punkcie x_0.

Definicja 6.23. Mówimy, że funkcja f jest *ciągła w punkcie* x_0, jeśli spełnione są warunki:

(1) funkcja f ma granicę (właściwą) w punkcie x_0,
(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Powołując się na definicję Heinego granicy funkcji w punkcie (Definicja 6.4) można sformułować następujący warunek równoważny powyższej definicji.

Twierdzenie 6.24. (Definicja Heinego ciągłości funkcji w punkcie) *Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ spełniająca warunek (6.7) jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy gdy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ dla każdego ciągu (x_n) takiego, że*

(1) *$x_n \in X$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,*
(2) *$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.*

Analogicznie, powołując się na Twierdzenie 6.10 można sformułować warunek zwany definicją Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie.

Twierdzenie 6.25. (Definicja Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie) *Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ spełniająca warunek (6.7) jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X : \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Przykład 6.26. Rozważmy funkcję zadaną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 2x - 8}, & \text{gdy } x \notin \{-2, 4\}, \\ -2, & \text{gdy } x = -2. \end{cases}$$

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. Niech $x_0 = -2$. Funkcja f jest określona na otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$, np. na zbiorze

$$(-8, 4) = (-2 - 6, -2 + 6).$$

Zbadamy, czy f jest ciągła w punkcie $x_0 = -2$. Powołując się na Definicję 6.23 zbadamy najpierw czy funkcja f ma granicę w punkcie x_0. Pamiętajmy, że o granicy funkcji w punkcie x_0 decyduje to, jakie wartości osiąga ona na sąsiedztwie punktu x_0, a nie w samym punkcie x_0. Mamy zatem

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to -2} f(x) = \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-2x-8} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-4)} = \\
&= \lim_{x\to -2} \frac{x^2-2x+4}{x-4} = \frac{(-2)^2 - 2\cdot(-2)+4}{-2-4} = \frac{12}{-6} = -2.
\end{aligned}$$

Punkt (1) w Definicji 6.23 jest zatem spełniony. Ponieważ

$$f(x_0) = f(-2) = -2.$$

to mamy również równość

$$\lim_{x\to -2} f(x) = f(-2),$$

co oznacza, że warunek (2) również zachodzi. Stwierdzamy zatem, że f jest ciągła w punkcie $x_0 = -2$.

Przykład 6.27. Rozważmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+7x+3}{2x^2-x-1}, & \text{gdy } x < -\dfrac{1}{2}, \\ 0, & \text{gdy } x = -\dfrac{1}{2}, \\ 5x + \dfrac{5}{6}, & \text{gdy } x > -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Dziedziną tej funkcji jest cały zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Zbadamy, czy f jest ciągła w punkcie $x_0 = -\dfrac{1}{2}$. Najpierw musimy zbadać, czy spełniony jest warunek (1) w Definicji 6.23, czy f ma granicę w punkcie $x_0 = -\dfrac{1}{2}$. Ponieważ na lewo i na prawo od tego punktu funkcja określona jest różnymi wzorami, to skorzystamy z Twierdzenia 6.22. Obliczymy zatem napierw obie granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} \frac{2x^2+7x+3}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to \frac{1}{2}^-} \frac{(2x+1)(x+3)}{(2x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} \frac{x+3}{x-1} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{5}{3}$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} \left(5x + \frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{2} + \frac{5}{6} = -\frac{5}{3}$$

Ponieważ

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x) = -\frac{5}{3} = \lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x),$$

z Twierdzenia 6.22 wnioskujemy, że

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x) = -\frac{5}{3}.$$

Warunek (1) z Definicji 6.23 jest zatem spełniony. Z drugiej strony mamy $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, zatem

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x) \neq f\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Warunek (2) nie jest więc spełniony. Stwierdzamy zatem, że funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Uwaga 6.28. Można łatwo sprawdzić, że funkcje elementarne wymienione w paragrafie 5.5 są ciągłe w każdym punkcie należącym do ich dziedziny.

W Rozdziale 6.1.5 stwierdziliśmy, że istnienie granicy funkcji w punkcie jest równoważne istnieniu granic lewo- i prawostronnej oraz równości obu tych granic. Podobny wynik możemy sformułować dla pojęcia ciągłości w punkcie

Definicja 6.29. Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie określona na pewnym otoczeniu lewostronnym punktu x_0, tzn. $(x_0 - \delta, x_0] \subset X$ dla pewnej liczby $\delta > 0$. Mówimy, że funkcja f jest *lewostronnie ciągła w punkcie* x_0, jeśli spełnione są warunki:

(1) istnieje (właściwa) granica lewostronna funkcji f w punkcie x_0,
(2) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Analogicznie, rozważmy funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ określoną na pewnym otoczeniu prawostronnym punktu x_0, tzn. taką, że $[x_0, x_0 + \delta) \subset X$ dla pewnej liczby $\delta > 0$. Mówimy, że funkcja f jest *prawostronnie ciągła w punkcie* x_0, jeśli spełnione są warunki:

(1) istnieje (właściwa) granica prawostronna funkcji f w punkcie x_0,
(2) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Podobnie jak dla ciągłości funkcji w punkcie, łatwo można sformułować definicje Heinego i Cauchy'ego ciągłości lewo- i prawostronnej funkcji w punkcie. Czytelnik może to potraktować jako ćwiczenie.

Wnioskiem z Definicji 6.23 i Twierdzenia 6.22 jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.30. *Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na pewnym otoczeniu punktu x_0. Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednocześnie lewo- i prawostronnie ciągła.*

6.2.2. Własności funkcji ciągłych w punkcie. Jak już wcześniej wspominaliśmy, granica funkcji w punkcie x_0 opisuje zachowanie się funkcji w bardzo bliskim sąsiedztwie punktu x_0, ale nie w samym punkcie x_0. Ciągłość funkcji w punkcie x_0 oznacza, że zachowanie się funkcji w bardzo bliskim sąsiedztwie punktu x_0 i w samym punkcie x_0 są ze sobą uzgodnione. Tłumaczymy to sobie tak, że w otoczeniu punktu x_0 funkcja f jest regularna.

Wyrazem powyższej regularności może być na przykład następująca własność.

Twierdzenie 6.31. *Załóżmy, że funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 i jest w tym punkcie ciągła. Wtedy, jeśli $f(x_0) > C$ dla pewnej liczby $C \in \mathbb{R}$, to istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f(x) > C$ dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Wniosek 6.32. *Jeśli f jest ciągła w punkcie x_0 i $f(x_0) \neq 0$, to $f(x) \neq 0$ dla argumentów x należących do pewnego otoczenia punktu x_0.*

Z kolei, z Twierdzenia 6.12 łatwo można wywieść następujące własności

Twierdzenie 6.33. *Niech f i g będą funkcjami ciągłymi w punkcie x_0 i $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy funkcje αf, $f + g$, $f - g$ i $f \cdot g$ są także funkcjami ciągłymi w punkcie x_0. Jeśli ponadto $g(x_0) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ jest dobrze określona na pewnym otoczeniu punktu x_0 i jest w tym punkcie ciągła.*

Przykład 6.34. Niech $f(x) = \dfrac{5\sqrt[3]{x} + \sin x \log_2 x}{x^2 2^x}$ i $x_0 = 1$.

Rozważmy następujących pięć funkcji:

$$f_1(x) = \sqrt[3]{x}, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = \log_2 x, \quad f_4(x) = x^2, \quad f_5(x) = 2^x.$$

Każda z tych funkcji jest jedną z funkcji elementarnych, o których wspomina Uwaga 6.28. Zatem każda z nich jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$. Zauważamy teraz, że

$$f(x) = \frac{5f_1(x) + f_2(x)f_3(x)}{f_4(x)f_5(x)}$$

i stosując sukcesywnie Twierdzenie 6.33 wnioskujemy, że f jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenie 6.35. *Niech $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że funkcja ϕ jest określona na pewnym otoczeniu punktu x_0, zaś funkcja ψ – na pewnym otoczeniu punktu y_0. Załóżmy ponadto, że $\phi(x_0) = y_0$. Jeśli ϕ jest ciągła w punkcie x_0 i ψ jest ciągła w punkcie y_0, to funkcja $f(x) = \psi(\phi(x))$ jest ciągła w punkcie x_0.*

Przykład 6.36. Niech $f(x) = \ln(\sin^3 2x)$ i $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

Rozważmy następujące funkcje

$$\phi_1(x) = 2x, \quad \phi_2(y) = \sin y, \quad \phi_3(t) = t^3, \quad \phi_4(u) = \ln u.$$

Zauważmy, że

$$f(x) = \phi_4(\phi_3(\phi_2(\phi_1(x)))).$$

Niech

$$y_0 = \frac{2\pi}{3}, \quad t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad u_0 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Spełnione są wtedy następujące równości

$$\phi_1(x_0) = y_0, \quad \phi_2(y_0) = t_0, \quad \phi_3(t_0) = u_0.$$

Ponieważ funkcje $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ należą do klasy funkcji elementarnych, o których mowa w Uwadze 6.28, są one ciągłe w każdym punkcie należącym do ich dziedziny. Z Twierdzenia 6.35 wynika zatem, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0.

6.2.3. Funkcje ciągłe. W poprzednim rozdziale rozważaliśmy lokalną własność ciągłości funkcji w pojedynczym punkcie należącym do dziedziny funkcji f. Możemy teraz rozpatrywać następującą globalną własność ciągłości funkcji.

Potrzebne nam będzie następujące pojęcie

Definicja 6.37. Podzbiór $U \subset \mathbb{R}$ nazywamy *zbiorem otwartym*, jeśli dla każdego $x \in U$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $(x - \delta, x + \delta) \subset U$.

Innymi słowy, zbiór U jest otwarty, jeśli dla każdego punktu ze zbioru U istnieje otoczenie zawarte w U[1].

Definicja 6.38. Niech $U \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem otwartym i niech $f : U \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f jest *ciągła*, jeśli jest ciągła w każdym punkcie należącym do zbioru U.

Uwaga 6.39. Pojęcie *ciągłości* funkcji różni się od pojęcia *ciągłości w punkcie*. To pierwsze pojęcie jest własnością funkcji: funkcja albo jest ciągła albo nie jest.

Jeśli chodzi o ciągłość w punkcie to jest to własność funkcji związana z punktem x_0, w którym się ją rozpatruje: w jednym punkcie funkcja może być ciągła, a w innym punkcie ta sama funkcja może być nieciągła.

Przykład 6.40. Rozważmy funkcję z Przykładu 6.26. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $U = \mathbb{R}\setminus\{4\} = (-\infty, 4)\cup(4, +\infty)$. Dla $x \notin \{-2, 4\}$ mamy $f(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2-2x-8}$, czy f jest ilorazem funkcji elementarnych spełniających założenia Twierdzenia 6.33. Wnioskujemy zatem, że f jest ciągła w każdym punkcie ze zbioru $\mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$. Ponadto, w Przykładzie 6.26 wykazaliśmy, że f jest ciągła w punkcie $x = -2$.

Z rozważań tych wynika, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie należącym do zbioru U. Jest zatem ciągła.

Przykład 6.41. Niech

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+8}{x^2-2x-8}, & \text{gdy } x \notin \{-2, 4\}, \\ -2, & \text{gdy } x = -2, \\ 2, & \text{gdy } x = 4. \end{cases}$$

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $U = \mathbb{R}$. Zauważmy, że na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ funkcja ta pokrywa się z funkcją rozważaną w poprzednim przykładzie. Ponieważ stwierdziliśmy, że tamta funkcja jest ciągła, wnioskujemy, że funkcja g jest ciągła w każdym punkcie należącym do zbioru $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. Pozostaje zbadać ciągłość funkcji g w samym punkcie $x_0 = 4$.

Sprawdzamy istnienie granicy w punkcie x_0:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{x^3+8}{x^2-2x-8} = \frac{72}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{x^3+8}{x^2-2x-8} = \frac{72}{0^+} = +\infty$$

[1] Szerzej będziemy o tym mówić w Rozdziale 11.1.4.

Z powyższych równości wynika, że funkcja g nie ma granicy w punkcie $x_0 = 4$, nie jest zatem w tym punkcie ciągła. Z tego zaś wynika, że funkcja g nie jest ciągła.

Uwaga 6.42. Z powyższych dwóch przykładów wynika następujący wniosek

Własność ciągłości funkcji w istotny sposób zależy od określenia dziedziny.

Biorąc pod uwagę definicję Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie (patrz Twierdzenie 6.10) możemy sformułować następującą charakteryzację funkcji ciągłych

Twierdzenie 6.43. *Niech $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem otwartym. Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\, x \in U\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x' \in U :\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Własność ciągłości możemy definiować także dla funkcji $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$, gdzie X jest zbiorem niekoniecznie otwartym (może to być np. przedział domknięty).

Definicja 6.44. Niech $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$ jest dowolnym podzbiorem. Mówimy, że funkcja f jest *ciągła*, jeśli istnieje zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}$ i funkcja ciągła $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ takie, że $X \subset U$ i $f(x) = \tilde{f}(x)$ dla każdego $x \in X$.

Można wykazać następujące twierdzenie charakteryzujące funkcje ciągłe na przedziałach domkniętych.

Twierdzenie 6.45. *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Funkcja f jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x \in (a, b)$, prawostronnie ciągła w punkcie a i lewostronnie ciągła w punkcie b.*

6.2.4. Własności funkcji ciągłych. Warunek ciągłości funkcji f wymusza dużą regularność jej regularność. Mówiąc mało precyzyjnie, można powiedzieć, że funkcja jest ciągła jeśli jej wykres składa się z jednego "kawałka".

Bardziej precyjnie, funkcja ciągła ma następującą własność przyjmowania wartości pośrednich

Twierdzenie 6.46. (Własność Darboux) *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Dla każdej liczby η leżącej między wartościami $f(a)$ i $f(b)$ (tzn. $\eta \in (f(a), f(b))$, jeśli $f(a) < f(b)$ i $\eta \in (f(b), f(a))$, jeśli $f(b) < f(a)$) istnieje punkt $\xi \in (a, b)$ taki, że $f(\xi) = \eta$.*

Powyższa własność ma bardzo proste zastosowanie w szukaniu przybliżonych rozwiązań równań.

Przykład 6.47. Rozważmy równanie

$$x^3 + x - 1 = 0. \tag{6.8}$$

Z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianów o współczynnikach całkowitych wynika, że równanie to nie ma pierwiastków wymiernych. Nie dysponujemy też wzorami pozwalającymi na rozwiązanie tego równania[2]. Znajdziemy przybliżone rozwiązanie tego równania leżące w przedziale $(0, 1)$.

Rozważmy funkcję $f(x) = x^3 + x - 1$. Jest to funkcja ciągła. Obliczmy jej wartości na końcach przedziału $[0, 1]$:

$$f(0) = -1, \qquad f(1) = 1.$$

Zauważmy, że wartość $\eta = 0$ leży pomiędzy $f(0)$ i $f(1)$. Z własności Darboux wynika zatem, że istnieje $\xi \in (0, 1)$ takie, że $f(\xi) = 0$. Liczba ξ jest rozwiązaniem równania (6.8). Niestety, nie znamy jej dokładnej wartości. Wiemy jedynie, że $0 < \xi < 1$. Zauważmy, że jeśli przyjęlibyśmy, że rozwiązaniem tego równania jest liczba $x_1 = \frac{1}{2}$, to błąd, jaki popełnimy nie przekracza $0{,}5$, bo mamy nierówność $|x_1 - \xi| < 0{,}5$. Można więc powiedzieć, że $x_1 = \frac{1}{2}$ jest przybliżonym z dokładnością $0{,}5$ rozwiązaniem równiania (6.8).

Zwiększymy teraz dokładność przybliżenia. Obliczamy

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{8}.$$

Ponieważ $\eta = 0$ leży pomiędzy $f\left(\frac{1}{2}\right)$ i $f(1)$, to stwierdzamy, że miejsce zerowe ξ funkcji f leży w przedziale $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Jeśli teraz przyjmiemy jako przybliżoną wartość rozwiązania równania środek przedziału $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, czyli liczbę $x_2 = \frac{3}{4}$, to błąd, jaki popełnimy, tym razem jest mniejszy niż $0{,}25$.

[2] W rzeczywistości takie wzory istnieją. Są to tzw. *wzory Cardano*. Wykraczają one jednak poza zakres tego wykładu.

Tę procedurę możemy kontynuować. Za każdym razem zmniejszamy błąd przybliżenia o połowę. Wynika stąd, że już po siedmiu krokach osiągniemy całkiem przyzwoitą dokładność $0{,}0078125 < 0{,}01$. Oczywiście zaprzęgnięcie do tego zadania komputera znacznie przyspieszy proces zwiększania dokładności.

Rozdział ten zakończymy następującą ważną własnością funkcji ciągłych na przedziałach domkniętych

Twierdzenie 6.48. (Twierdzenie Weierstrassa) *Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to f przyjmuje na przedziale $[a,b]$ wartość największą i wartość najmniejszą, tzn. istnieją punkty $x_{\mathrm{m}}, x_{\mathrm{M}} \in [a,b]$ takie, że $f(x_{\mathrm{m}}) \leq f(x)$ dla każdego $x \in [a,b]$ i $f(x_{\mathrm{M}}) \geq f(x)$ dla każdego $x \in [a,b]$.*

Przykład 6.49. Jeśli $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, to teza powyższego twierdzenia nie musi zachodzić. Rozważmy na przykład funkcję $f(x) = \dfrac{1}{x}$ określoną na przedziale $(0,1)$. Ponieważ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, dla każdej liczby $c \in \mathbb{R}$ istnieje punkt $x \in (0,1)$ taki, $f(x) > c$. Funkcja f nie może zatem przyjmować wartości największej, bo jest nieograniczona z góry.

Funkcja f jest ograniczona z dołu, ale nie przyjmuje też wartości największej. Zauważmy, że dla każdego $x \in (0,1)$ zachodzi nierówność $x < 1$, która implikuje nierówność $f(x) = \dfrac{1}{x} > 1$. Funkcja f nie przyjmuje zatem wartości równej 1. Z drugiej strony, wartością najmniejszą nie może być żadna liczba większa od 1, bo $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$. To ostatnie implikuje, że dla każdej liczby $c > 1$ istnieje punkt $x \in (0,1)$ taki, że $f(x) < c$.

ROZDZIAŁ 7

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

Koncepcja pochodnej jest kluczowym pomysłem, który pozwolił na nadanie precyzyjnej matematycznej formy zasadom dynamiki. Z czasem rachunek różniczkowy stał się podstawowym narzędziem mechaniki.

7.1. Określenie pochodnej funkcji

Rozważamy funkcję $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Będziemy zakładali, że funkcja f jest określona na pewnym otoczeniu punktu x_0, tzn. spełniony jest warunek (6.7)

Definicja 7.1. Mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna w punkcie* x_0, jeśli istnieje granica

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{7.1}$$

Granicę tę nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$.

Występujące w granicy (7.1) nazywamy *ilorazem róznicowym*. Równoważnie można zapisać

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{7.2}$$

Przykład 7.2. Niech $f(x) = ax + b$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ niech będzie dowolnym punktem. Obliczamy granicę (7.1)

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{a(x_0+h)+b-(ax_0+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ax_0+ah+b-ax_0-b}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a.$$

Wykazaliśmy zatem, że funkcja liniowa jest różniczkowalna w każdym punkcie i pochodna w każdym punkcie jest równa współczynnikowi kierunkowemu a.

Przykład 7.3. Niech $f(x) = x^2$ i niech $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie dowolnym punktem. Wtedy

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h+h^2}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x_0+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x_0+h) = 2x_0. \end{aligned}$$

Przykład 7.4. Niech $f(x) = x^3$ i niech $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie dowolnym punktem. Wtedy

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3x_0^2 + 3x_0 h + h^2)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} (3x_0^2 + 3x_0 h + h^2) = 3x_0^2. \end{aligned}$$

Przykład 7.5. Niech $f(x) = \sqrt{x}$ i niech $x_0 > 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}\right)}{h\left(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}\right)} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h) - x_0}{h\left(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}\right)} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

Przykład 7.6. Niech $f(x) = \dfrac{1}{x}$ i niech $x_0 \neq 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x_0+h} - \dfrac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0 - (x_0+h)}{h x_0 (x_0+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h x_0 (x_0+h)} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x_0(x_0+h)} = -\frac{1}{x_0^2} \end{aligned}$$

Przykład 7.7. Niech $f(x) = |x|$ i $x_0 = 0$.

Pokażemy, że granica (7.1) w tym wypadku nie istnieje. Skorzystamy z Twierdzenia 6.22. Wykażemy mianowicie, że

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Obliczamy

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

Z Twierdzenia 6.22 wnioskujemy, że granica (7.1) nie istnieje, zatem f nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

Rozważmy teraz funkcję, która jest określona na pewnym przedziale postaci (a, b), gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ (dopuszczamy też sytuację $a = -\infty$ lub $b = +\infty$). Zauważmy, że jeśli $x \in D_f$, to

f jest też określona na pewnym otoczeniu punktu x. Dla każdego punktu z dziedziny jest sens pytać o różniczkowalność funkcji f w tym punkcie.

Definicja 7.8. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna w przedziale* (a, b), jeśli jest różniczkowalna w każdym punkcie należącym do tego przedziału.

W takim wypadku funkcję $(a, b) \to \mathbb{R}$, która każdemu punktowi $x \in (a, b)$ przyporządkowuje pochodną $f'(x)$ funkcji f w punkcie x, nazywamy *pochodną* funkcji f i oznaczamy f'.

Tabela na następnej stronie zawiera podstawowe wzory na pochodne z tzw. funkcji elementarnych

TABLICA 7.1. Pochodne funkcji elementarnych

$f(x)$	$f'(x)$	Uwagi
const	0	
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$ Jeśli $\alpha > 0$ i $\alpha \notin \mathbb{N}$, to $x \geq 0$ Jeśli $\alpha < 0$ i $\alpha \in \mathbb{Z}$, to $x \neq 0$ Jeśli $\alpha < 0$ i $\alpha \notin \mathbb{Z}$, to $x > 0$
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$, $x \in \mathbb{R}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$	$x \neq k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{arcsin} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\operatorname{arccos} x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

7.2. Obliczanie pochodnych

W poprzednim rozdziale podaliśmy wzory na pochodne z funkcji elementarnych. Następne twierdzenie podaje reguły różniczkowanie funkcji, które są wynikiem podstawowych działań algebraicznych na funkcjach elementarnych.

Twierdzenie 7.9. *Niech f i g będą funkcjami różniczkowalnymi w punkcie x_0 i niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy funkcje αf, $f+g$, fg są funkcjami różniczkowalnymi w punkcie x_0 oraz prawdziwe są następujące równości:*

(a) $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$,
(b) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
(c) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Jeśli ponadto $g(x) \neq 0$ dla x należących do pewnego otoczenia punktu x_0, to również funkcja $\frac{f}{g}$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Wzór (c) w powyższym twierdzeniu nazywa się *wzorem Leibnitza*.

Przykład 7.10. Niech $f(x) = (x^2 + 3\sqrt{x}) \sin x$.

Funkcja f jest iloczynem dwóch funkcji: $x^2 + 3\sqrt{x}$ i $\sin x$. Korzystając z punktu (c) mamy zatem

$$f'(x) = \left(x^2 + 3\sqrt{x}\right)' \sin x + \left(x^2 + 3\sqrt{x}\right) (\sin x)'.$$

Dalej, korzystamy z punktów (a) i (b) i obliczamy pochodną pierwszego czynnika:

$$\begin{aligned} f'(x) = & \\ = & \left((x^2)' + \left(3\sqrt{x}\right)'\right) \sin x + \left(x^2 + 3\sqrt{x}\right) (\sin x)' = \\ = & \left((x^2)' + 3\left(\sqrt{x}\right)'\right) \sin x + \left(x^2 + 3\sqrt{x}\right) (\sin x)' = \\ = & \left(2x + 3\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \sin x + \left(x^2 + 3\sqrt{x}\right) \cos x = \\ = & \left(2x + \frac{3}{2\sqrt{x}}\right) \sin x + \left(x^2 + 3\sqrt{x}\right) \cos x \end{aligned}$$

Przykład 7.11. Niech $f(x) = \frac{2^x}{x^2}$.

Funkcja f jest ilorazem dwóch funkcji: 2^x i x^2. Korzystamy zatem z punktu (d):

$$f'(x) = \frac{(2^x)'x^2 - 2^x(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{2^x \ln 2 \cdot x^2 - 2^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{2^x(x \ln 2 - 2)}{x^3}.$$

Kolejne twierdzenie podaje regułę obliczania pochodnych z funkcji złożonych. Niech funkcja f będzie postaci $f(x) = F(\varphi(x))$ dla pewnych funkcji F i φ. Funkcję F będziemy nazywać funkcją zewnętrzną, zaś φ – funkcją wewnętrzną.

Twierdzenie 7.12. *Niech $f(x) = F(\varphi(x))$ dla pewnych funkcji rzeczywistych F i φ. Jeśli funkcja φ jest różniczkowalna w punkcie x_0, a funkcja F jest różniczkowalna w punkcie $\varphi(x_0)$, to funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz prawdziwa jest równość*

$$f'(x_0) = F'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0). \tag{7.3}$$

Przykład 7.13. Niech $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
Jest funkcja złożona. Możemy zapisać $f(x) = F(\varphi(x))$, gdzie

$$\begin{aligned} F(t) &= \sqrt{t} \\ \varphi(x) &= 1 + x^2 \end{aligned}$$

Obliczamy pochodne:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ \varphi'(x) &= 2x \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru (7.3) otrzymujemy

$$f'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x)}}\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Przykład 7.14. Niech $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.
Możemy zapisać $f(x) = F(\varphi(x))$, gdzie

$$\begin{aligned} F(t) &= \sin t \\ \varphi(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Obliczamy pochodne:

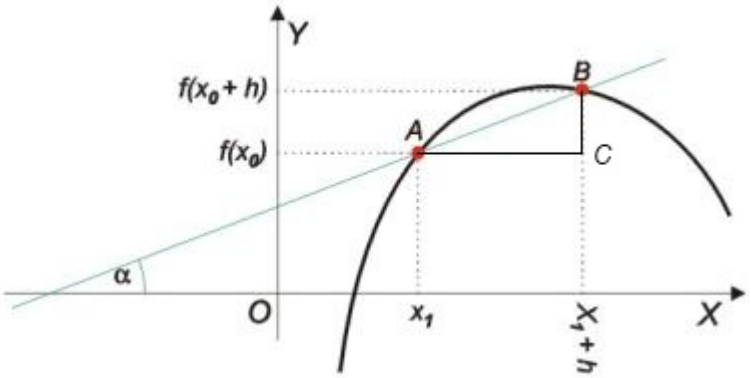
$$\begin{aligned} F'(t) &= \cos t \\ \varphi'(x) &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru (7.3) otrzymujemy

$$f'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = \cos\varphi(x) \cdot \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}.$$

7.3. Interpretacja geometryczna pochodnej

Pokażemy, że ilorazy różnicowe występujące w określeniu granicy (7.1) mają bardzo intuicyjny sens geometryczny. Spójrzmy na nastepujący rysunek. Przedstawia on wykres funkcji



$y = f(x)$ oraz tzw. *sieczną* czyli prostą przecinającą ten wykres w dwóch punktach: A i B. Punkty te mają rzędne opowiednio: x_0 i $x_0 + h$. Odcięte tych punktów są wartościami funkcji f dla rzędnych, czyli są równe odpowiednio: $f(x_0)$ i $f(x_0 + h)$. Niech α oznacza kąt nachylenia siecznej AB względem osi OX.

Rozważmy teraz trójkąt prostokątny ABC. Zauważmy, że $\sphericalangle CAB = \alpha$. Oczywiście

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|BC|}{|AC|}.$$

Ponadto, łatwo zauważyć, że

$$|BC| = f(x_0 + h) - f(x_0), \qquad |AC| = (x_0 + h) - x_0 = h.$$

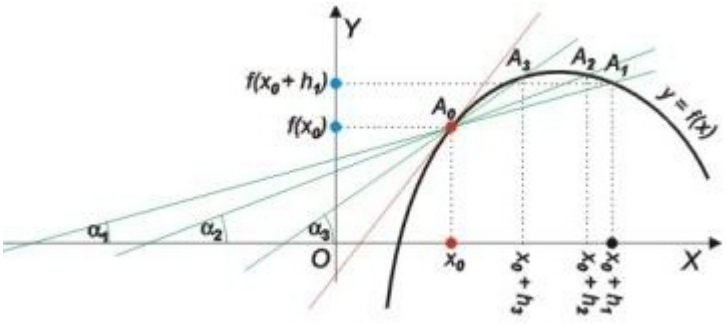
Stąd otrzymujemy związek

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{7.4}$$

Z naszych rozważań wynika następujący wniosek.

Wniosek 7.15. *Niech A i B będą punktami na wykresie funkcji f o rzędnych odpowiednio x_0 i $x_0 + h$. Tangens kąta nachylenia siecznej przechodzącej przez punkty A i B względem osi OX jest równy ilorazowi różnicowemu $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.*

Jeśli teraz dla ustalonego punktu x_0 będziemy rozważali różne wartości h, to na rysunku otrzymamy różne sieczne przechodzące przez ustalony punkt A odpowiadający rzędnej x_0 (na kolejnym rysunku oznaczony jako A_0). Zauważmy, że jeśli h dąży do zera, to drugi punkt, przez który przechodzi sieczna, leży coraz bliżej punktu A_0. Granicznym położeniem tych siecznych jest zatem styczna do wykresy funkcji f poprowadzona w punkcie A_0. Na rysunku jest to prosta wyróżniona kolorem fioletowym. Niech α_0 oznacza teraz kąt, jaki tworzy fioletowa styczna z



osią OX. Rozważmy ciąg (h_n) taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$. Każdej liczbie h_n odpowiada sieczna, która tworzy z osią OX kąt α_n. Oczywiście

$$\alpha_0 = \lim_{n\to\infty} \alpha_n.$$

Z równości (7.4) otrzymujemy więc równość

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}\alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}.$$

Ponieważ rozważaliśmy dowolny ciąg (h_n) dążący do zera, to powołując się definicję Heinego garnicy funkcji w punkcie (patrz Definicja 6.4) i definicję pochodnej (7.1) otrzymujemy równość

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0). \tag{7.5}$$

Zatem

Wniosek 7.16. *Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to tangens kąta nachylenia stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ względem osi OX jest równy pochodnej $f'(x_0)$ funkcji f w punkcie x_0.*

Przykład 7.17. Obliczymy kąt α_0 jaki tworzy z osią OX styczna do wykresu funkcji

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

poprowadzona w punkcie $(x_0, f(x_0))$, gdzie $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Oczywiście będziemy korzystać z równości (7.5). Obliczamy pochodną

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Zatem $\alpha_0 = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6} = 30^\circ$.

Z powyższych rozważań wynika jeszcze następująca uwaga.

Uwaga 7.18. Własność różniczkowalności funkcji f na przedziale (a, b) możemy interpretować jako następującą własność wykresu funkcji:

Dla każdego $x \in (a, b)$ istnieje styczna do wykresu przechodząca przez punkt $(x, f(x))$.

Przypomnijmy teraz, że jeśli prosta ma równanie $y = ax + b$, to prawdziwy jest związek

$$a = \operatorname{tg} \alpha,$$

gdzie α jest kątem jaki tworzy prosta z osią OX

Jeśli zatem $y = ax + b$ jest równaniem stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, to współczynnik kierunkowy a obliczamy ze wzoru

$$a = f'(x_0).$$

Z kolei współczynnik b obliczamy korzystając z faktu, że współrzędne punktu styczności $(x_0, f(x_0))$ spełniają równanie prostej $y = ax + b$. Prawdziwa jest bowiem równość

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b,$$

z której wynika, że

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Wniosek 7.19. *Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma równanie*

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

lub inaczej

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Przykład 7.20. Wyznaczymy równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x\sin^2 x$ poprowadzonej w punkcie $(x_0, f(x_0))$, gdzie $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Obliczamy wzór pochodnej

$$f'(x) = \sin^2 x + 2x\sin x\cos x = \sin^2 x + x\sin 2x.$$

Zgodnie z Wnioskiem 7.19 potrzebne nam są wartości $f(x_0)$ i $f'(x_0)$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\pi}{4}\sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{8} \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin^2\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Równanie stycznej ma zatem postać

$$y = \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)x + \frac{\pi}{8} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4},$$

czyli

$$y = \frac{2+\pi}{4}\,x - \frac{\pi^2}{16}.$$

7.4. Interpretacja fizyczna pochodnej

Z pojęciem pochodnej zetknęliśmy się po raz pierwszy w szkole na lekcjach fizyki. Załóżmy, że pewien obiekt porusza się po prostej (osi liczbowej) i niech $s(t)$ oznacza położenie tego obiektu w chwili t. Określiliśmy w ten sposób pewną funkcję s. Wyznaczając *prędkość średnią* tego obiektu z jaką poruszał się on w czasie od chwili t_0 do chwili t_1, dzielimy długość Δs drogi przebytej w tym czasie przez długość Δt tego odcinka czasowego:

$$v_{\text{średnia}} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

gdzie

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0), \qquad \Delta t = t_1 - t_0.$$

Zauważmy, że pomiar prędkości jest tym lepszy i bardziej adekwatny do stanu obiektu w określonej chwili, im odcinek czasu Δt pomiędzy kolejnymi chwilami t_0 a t_1 jest krótszy. Granicę ilorazu

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

nazywamy *prędkością chwilową* w chwili t_0 i oznaczamy $v(t_0)$. Porównując powyższą granicę z (7.1) dochodzimy do równości

$$v(t_0) = s'(t_0). \tag{7.6}$$

Przykład 7.21. Załóżmy, że funkcja s opisująca położenie obiektu w zależności od czasu wyraża się wzorem

$$s(t) = 1 + t + e^{-t}, \qquad t \geq 0.$$

Wtedy prędkość chwilowa obiektu w chwili $t > 0$ wyraża się wzorem

$$v(t) = s'(t) = 1 - e^{-t}.$$

7.5. Własności funkcji różniczkowalnych i pochodnych

Wymienimy teraz podstawowe własności funkcji różniczkowalnych i pochodnych.

7.5.1. Ciągłość funkcji różniczkowalnych. Pierwsza własność opisuje związki między różniczkowalnością funkcji, a omawianą wcześniej własnością ciągłości.

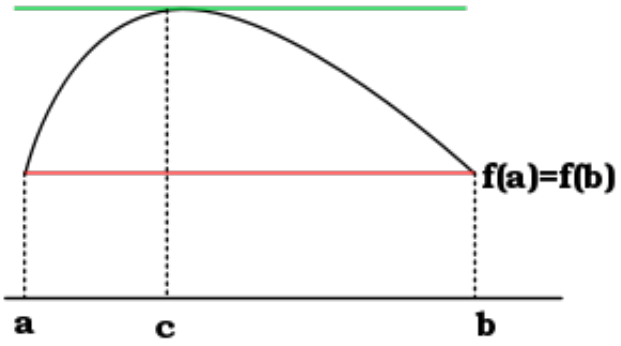
Przypomnijmy, że z geometrycznego punktu widzenia różniczkowalność oznacza istnienie stycznej do wykresu w odpowiednim punkcie. Wydaje się intuicyjnie jasne, że ta własność wymaga tego, aby wykres w okolicach tego punktu nie miał żadnych „przerw" czyli nieciągłości.

Ściśle tę zależność opisuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.22. *Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła.*

Zauważmy, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. W Przykładzie 7.7 wykazaliśmy, że istnieje funkcja ciągła, która nie jest różniczkowalna.

7.5.2. Twierdzenie Rolle'a. Kolejny rysunek przedstawia wykres funkcji ciągłej na pewnym przedziale domkniętym mającej tę własność, że wartości na końcach tego przedziału są równe, tzn. $f(a) = f(b)$. Oznacza to, że sieczna (czerwona prosta) do wykresu przechodząca



przez punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ jest pozioma. Dodatkowo zakładamy, że funkcja f jest różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b), tzn. dla każdego $c \in (a, b)$ istnieje styczna do wykresu funkcji f przechodząca przez punkt $(c, f(c))$. Intuicja mówi nam, że wewnątrz przedziału (a, b) musi istnieć przynajmniej jedna $c \in (a, b)$ taka, że styczna poprowadzona do wykresu funkcji f w punkcie $(c, f(c))$ jest równoległa do opisanej wyżej siecznej, czyli też pozioma. Na rysunku styczna ta zaznaczona jest kolorem zielonym. Współczynnik kierunkowy stycznej jest więc równy 0. Z Wniosku 7.19 wynika zatem, że $f'(c) = 0$.

Oczywiście intuicja nie jest wystarczającym w matematyce argumentem. Ścisły sens powyższym rozważaniom nadaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.23. (Rolle'a) *Załóżmy, że $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalną w (a, b). Jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $\xi \in (a, b)$ taki, że $f'(\xi) = 0$.*

Przykład 7.24. Wykażemy, że wielomian

$$w(x) = 2x^5 - \frac{130}{3}x^3 + 360x + c,$$

gdzie c jest dowolną stałą, nie może mieć dwóch różnych pierwiastków w przedziale $(-2, 2)$.

Przypuśćmy, że istnieją dwa różne pierwiastki $x_1, x_2 \in (-2, 2)$. Pokażemy, że to założenie prowadzi do sprzeczności. Ponieważ $x_1 \neq x_2$, możemy założyć, że spełnione są nierówności

$$-2 < x_1 < x_2 < 2. \tag{7.7}$$

Fakt, że x_1 i x_2 są pierwiastkami wielomianu w oznacza, że $w(x_1) = 0$ i $w(x_2) = 0$, czyli $w(x_1) = w(x_2)$. Z twierdzenia Rolle'a wnioskujemy, że istnieje liczba $\xi \in (x_1, x_2)$ taka, że $w'(\xi) = 0$. Obliczmy wzór pochodnej wielomianu w

$$w'(x) = 10x^4 - 130x^2 + 360$$

i wyznaczmy jej miejsca zerowe. W tym celu należy rozwiązać równanie

$$10x^4 - 130x^2 + 360 = 0.$$

Dzieląc obie strony tego równania przez 10 i wprowadzając podstawienie $t = x^2$ otrzymujemy równanie kwadratowe

$$t^2 - 13t + 36 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są $t_1 = 4$ i $t_2 = 9$. Teraz pozostaje rozwiązać równania

$$x^2 = 4, \qquad x^2 = 9.$$

Stwierdzamy zatem, że pochodna w' ma cztery miejsca zerowe $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$ i $x_4 = 3$, czyli $w'(x) = 10(x+3)(x+2)(x-2)(x-3)$.

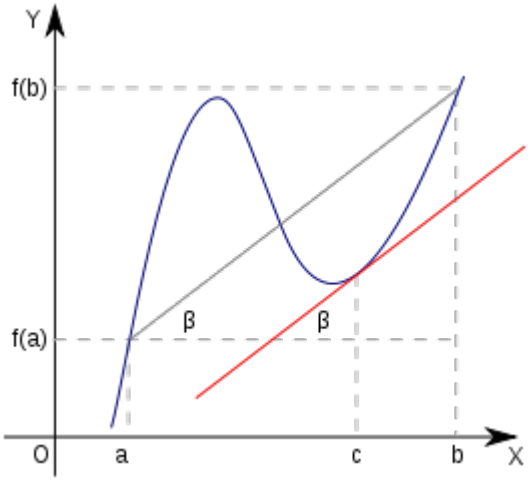
Zauważmy, że w' nie ma żadnego miejsca zerowego należącego do przedziału $(-2, 2)$. Z (7.7) wynika, że $(x_1, x_2) \subset (-2, 2)$. Tym bardziej więc nie jest możliwe, by istniała liczba $\xi \in (x_1, x_2)$ taka, że $w'(\xi) = 0$. Doszliśmy zatem do zapowiadanej sprzeczności.

7.5.3. Twierdzenie Lagrange'a. Wnioskiem z twierdzenia Rolle'a jest następujące ważne

Twierdzenie 7.25. (Lagrange'a, o wartości średniej) *Załóżmy, że $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalną w (a, b). Wtedy istnieje punkt $\xi \in (a, b)$ taki, że*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{7.8}$$

Można je zilustrować następującym rysunkiem. Podobnie jak w twierdzeniu Rolle'a zakładamy, że funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b). Nie zakładamy tym razem, że wartości funkcji f na końcach przedziału są równe. W związku z tym sieczna poprowadzona przez punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ (na rysunku fioletowa prosta) nie musi być pozioma. Teza jest jednak taka sama, jak w twierdzeniu Rolle'a. Musi istnieć wewnątrz przedziału (a, b) liczba c taka, że styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(c, f(c))$ (na rysunku czerwona prosta) jest równoległa do tej siecznej. Równoległość prostych oznacza, że kąty jakie tworzą z osią OX są równe. Zgodnie z Wnioskiem 7.15 tangens kąta utworzonego przez sieczną z osią OX jest równy ilorazowi



różnicowemu $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Z Wniosku 7.16 wynika zaś, że dla stycznej tangens odpowiedniego kąta jest równy pochodnej $f'(c)$. Z równości tangensów otrzymujemy równość (7.8).

Twierdzenie Lagrange'a wykorzystuje się przy uzasadnianiu różnych użytecznych nierówności.

Przykład 7.26. Wykażemy, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y|.$$

Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $x > y$ (dla $x = y$ nierówność jest oczywista). Funkcja $f(t) = \sin t$ spełnia oczywiście założenia twierdzenia Lagrange'a na przedziale $[y, x]$. Istnieje zatem liczba $\xi \in (y, x)$ czyli taka, że $y < \xi < x$, dla której spełniona jest równość

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$

Ponieważ $f'(\xi) = \cos\xi$, otrzymujemy równość

$$\cos\xi = \frac{\sin x - \sin y}{x-y}. \tag{7.9}$$

Z twierdzenia Lagrange'a nie wynika, jaka jest liczba ξ poza tym, że należy ona do przedziału (y, x). Z własności funkcji cosinus wynika jednak, że niezależnie od tego jakie jest ξ spełnione są nierówności $-1 \leq \cos\xi \leq 1$, które są równoważne nierówności

$$|\cos\xi| \leq 1.$$

Korzystając z równości (7.9) otrzymujemy

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x-y}\right| \leq 1.$$

Przekształcenia powyższej nierówności prowadzą do

$$\frac{|\sin x - \sin y|}{|x-y|} \leq 1$$

czyli

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y|.$$

Przykład 7.27. Wykażemy, że dla dowolnych $0 < a < b$ zachodzą nierówności

$$\frac{b-a}{1+b^2} \leq \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a \leq \frac{b-a}{1+a^2}. \tag{7.10}$$

Funkcja $f(x) = \operatorname{arctg} x$ spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a na przedziale $[a, b]$. Istnieje zatem punkt $\xi \in (a, b)$ taki, że

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ponieważ $f'(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi^2}$, mamy równość

$$\frac{1}{1+\xi^2} = \frac{\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a}{b-a}. \tag{7.11}$$

Z tego, że $a < \xi < b$, wynikają nierówności

$$\frac{1}{1+b^2} \leq \frac{1}{1+\xi^2} \leq \frac{1}{1+a^2}.$$

Biorąc pod uwagę równość (7.11) otrzymujemy

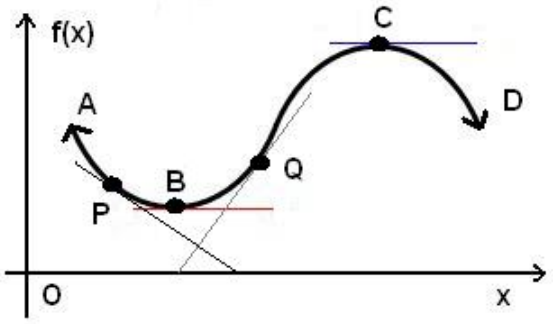
$$\frac{1}{1+b^2} \leq \frac{\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a}{b-a} \leq \frac{1}{1+a^2}.$$

Mnożąc wszystkie wyrażenia w powyższych nierównościach przez $b-a$ otrzymujemy (7.10).

7.6. Zastosowania rachunku różniczkowego

7.6.1. Związki pochodnej z monotonicznością. W Rozdziale 5.3 zdefiniowaliśmy pojęcie funkcji stałej, rosnącej i malejącej na jakimś przedziale otwartym (a, b). Powiedzieliśmy też, co to są przedziały monotoniczności (str. 86). Okazuje się, że jeśli funkcja jest różniczkowalna, to można wykorzystać pochodną do badania jej monotoniczności.

Spójrzmy na poniższy rysunek. Pamiętamy, że różniczkowalność oznacza, że w każdym swoim punkcie wykres funkcji f posiada styczną. Zwróćmy uwagę na związek między kątem nachylenia stycznej do osi OX a monoticznością funkcji w otoczeniu punktu styczności. Na przykład, w okolicach punktu Q funkcja f jest rosnąca i kąt nachylenia stycznej jest ostry. Z kolei, w otoczeniu punktu P funkcja f jest malejąca i kąt nachylenia stycznej jest rozwarty. Zatem tam gdzie funkcja jest rosnąca, współczynnik kierunkowy (równy tangensowi kąta nachylenia) stycznej jest dodatni, zaś w obszarze, w którym f jest malejąca współczynnik kierunkowy jest ujemny. Jeśli uwzględnimy teraz równość współczynnika kierunkowego stycznej i pochodnej w punkcie odpowiadającym punktowi styczności (patrz Wniosek 7.19), to uzyskamy pełną ilustrację następującego twierdzenia.



Twierdzenie 7.28. *Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną.*

(i) *Jeśli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale (a, b).*

(ii) *Jeśli* $f'(x) < 0$ *dla każdego* $x \in (a, b)$*, to funkcja* f *jest malejąca w przedziale* (a, b).

Uwaga 7.29. Implikacje odwrotne do tych z punktów (i) i (ii) w Twierdzeniu 7.28 nie są prawdziwe.

Przykład 7.30. Rozważmy funkcję $f(x) = x^3$. Jest to funkcja rosnąca w całym zbiorze $\mathbb{R}$. Pochodna $f'(x) = 3x^2$. Zauważmy, że $f'(0) = 0$. Oznacza to, że implikacji w punkcie (i) powyższego twierdzenia nie da się odwrócić.

Prawdziwe jest za to następująca troszeczkę słabsza wersja powyższego twierdzenia.

Twierdzenie 7.31. *Niech* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją różniczkowalną.*

(i) *Funkcja* f *jest słabo rosnąca w przedziale* (a, b) *wtedy i tylko wtedy, gdy* $f'(x) \geq 0$ *dla każdego* $x \in (a, b)$.

(ii) *Funkcja* f *jest słabo malejąca w przedziale* (a, b) *wtedy i tylko wtedy, gdy* $f'(x) \leq 0$ *dla każdego* $x \in (a, b)$.

Przykład 7.32. Wyznaczymy przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

W tym celu obliczamy pochodną i jej miejsca zerowe:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3).$$

Miejscami zerowymi pochodnej są zatem $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. Korzystając z Twierdzenia 7.28 musimy teraz zbadać, dla jakich arumentów pochodna f' przyjmuje wartości dodatnie a dla jakich ujemne. Innymi słowy, musimy znaleźć zbiory rozwiązań nierówności

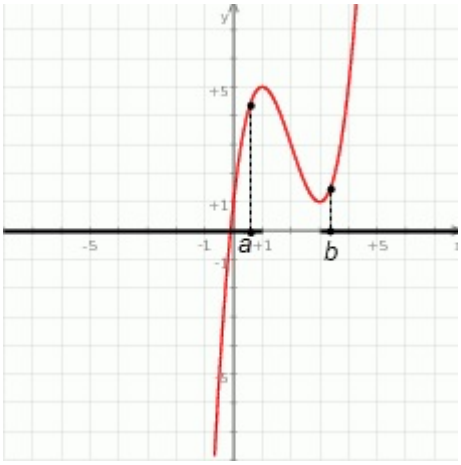
$$\text{(i)} \quad 3(x - 1)(x - 3) > 0, \qquad \text{(ii)} \quad 3(x - 1)(x - 3) < 0.$$

Są to nierówności kwadratowe, które rozwiązujemy standardowo. Zbiorem rozwiązań nierówności (i) jest $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, zaś zbiór rozwiązań nierówności (ii) to $(1, 3)$.

Ostatecznie, funkcja jest rosnąca na przedziałach $(-\infty, 1)$ i $(3, +\infty)$, malejąca na przedziale $(1, 3)$.

Uwaga 7.33. W założeniu Twierdzenia 7.28 rozważamy funkcję określoną na przedziale otwartym (a, b). Jest to istotne założenie. Nie da się zastąpić przedziału dowolnym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}$. Rozważmy na przykład funkcję f z Przykładu 7.32. Z obliczeń wynika, że $f'(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. Spójrzmy jednak na wykres funkcji f. Widzimy, że

$a, b \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ i $a < b$, ale $f(a) > f(b)$. Oznacza to, że f nie jest rosnąca na zbiorze $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.



Przykład 7.34. Wyznaczymy przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór tych liczb rzeczywistych x, dla których $3 - x^2 \neq 0$, czyli zbiór $D_f = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. Obliczamy pochodną

$$f'(x) = \frac{3x^2(3 - x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(3 - x^2)^2} = \frac{-x^4 + 9x^2}{(3 - x^2)^2} = \frac{x^2(9 - x^2)}{(3 - x^2)^2} = \frac{x^2(3 - x)(3 + x)}{(3 - x^2)^2}$$

Wzór ten możemy zapisać w następującej postaci

$$f'(x) = \frac{x^2}{(3 - x^2)^2} \cdot (3 - x)(3 + x).$$

Wynika z niej, że znaki tej funkcji zależą tylko od znaków drugiego czynnika. Ponieważ mamy

$$\begin{aligned} (3 - x)(3 + x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \in (-3, 3) \\ (3 - x)(3 + x) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty) \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę postać dziedziny funkcji f otrzymujemy następujące przedziały monotoniczności:

- f jest rosnąca na przedziałach $(-3, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ i $(\sqrt{3}, 3)$,
- f jest malejąca na przedziałach $(-\infty, -3)$ i $(3, \infty)$.

7.6.2. Pochodna a ekstrema lokalne. Spójrzmy jeszcze raz na rysunek na stronie 125. Widać na nim fragment wykresu pewnej funkcji. Zakładamy, że funkcja jest też określona na szerszym zbiorze niż ten widoczny na rysunku. Punkt B tego wykresu ma pewną szczególną własność. Leży on mianowicie najniżej w stosunku do punktów leżacych w jego pobliżu. Nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy jest to najniższy punkt całego wykresu, bo tego w całości nie

widzimy. Możemy jedynie powiedzieć, że *lokalnie* jest on najniższy. Podobnie o punkcie A powiemy, że jest on *lokalnie* najwyższy. Ściśle te własności opisuje następująca definicja.

Definicja 7.35. Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie określona na pewnym otoczeniu punktu x_0. Mówimy, że funkcja f osiąga w punkcie x_0 *maksimum lokalne*, jeśli istnieje otoczenie punktu x_0 takie, że $f(x_0)$ jest największą wartością funkcji spośród wartości przyjmowanych przez funkcję f na całym tym otoczeniu. Można to zapisać

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X :\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x_0) > f(x). \tag{7.12}$$

Analogicznie, funkcja f osiąga w punkcie x_0 *minimum lokalne*, jeśli istnieje otoczenie punktu x_0 takie, że $f(x_0)$ jest najmniejszą wartością funkcji spośród wartości przyjmowanych przez funkcję f na całym tym otoczeniu, co można zapisać

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X :\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x_0) < f(x). \tag{7.13}$$

Maksima i minima lokalne określamy wspólną nazwą *ekstremów lokalnych*.

Załóżmy teraz, że f jest funkcją różniczkowalną. Oznacza to, że w każdym punkcie wykresu da się poprowadzić styczną do wykresu. Zauważmy, że na rysunku na stronie 125 styczne do wykresu poprowadzone w punktach A i B są poziome. Oznacza to, że pochodna funkcji w obu tych punktach jest równa 0. Nie jest to przypadek. Sytuację tę opisuje następujące twierdzenie>

Twierdzenie 7.36. (Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego) *Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i osiąga w tym punkcie ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$.*

Uwaga 7.37. Twierdzenie odwrotne do powyższego nie jest prawdziwe! W Przykładzie 7.30 analizowaliśmy funkcję $f(x) = x^3$. W punkcie $x_0 = 0$ pochodna tej funkcji zeruje się mimo, że funkcja ta (jako funkcja rosnąca) nie ma żadnych ekstremów lokalnych.

Przykład 7.38. Rozważmy funkcję $f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$ z Przykładu 7.34.

Przypomnijmy, że jej pochodna wyraża się wzorem:

$$f'(x) = \frac{x^2(3 - x)(3 + x)}{(3 - x^2)^2}$$

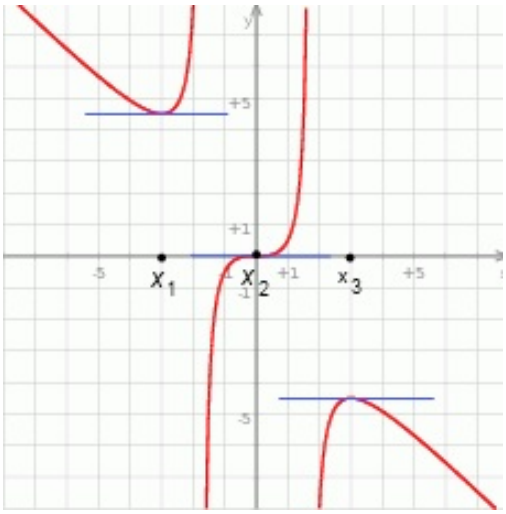
Stąd łatwo wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ i $x_3 = 3$. Z Twierdzenia 7.36 wynika, że funkcja f może przyjmować ekstrema tylko w tych trzech punktach. Nie oznacza to jednak, że w każdym z tych punktów musi być przyjęte ekstremum lokalne. W Uwadze 7.37

zauważyliśmy, że funkcja nie musi przyjmować ekstremum w miejscu zerowym pochodnej. Na obecnym etapie rozsądnie więc jest traktować punkty x_1, x_2 i x_3 jako punkty „podejrzane" o istnienie w nich ekstremum lokalnego.

Czasami punkty $x_0 \in D_f$, w których funkcja f jest różniczkowalna i $f'(x_0) = 0$, nazywamy *punktami krytycznymi* funkcji f. Twierdzenie 7.36 można więc też wysłowić następująco:

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i f przyjmuje w punkcie x_0 ekstremum lokalne, to x_0 jest punktem krytycznym funkcji f.

Rozważmy jeszcze raz funkcję $f(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}$ z Przykładu 7.34. Na rysunku przedstawiamy szkic wykresu tej funkcji. Uwidoczniliśmy też wyznaczone w Przykładzie 7.40 trzy punkty krytyczne. Zauważmy, że tylko w dwóch spośród nich funkcja f przyjmuje ekstrema lokalne: minimum w x_1 i maksimum w x_3. W punkcie x_2, mimo, że jest on krytyczny, funkcja f nie przyjmuje ekstremum lokalnego.



Zauważmy, że punkty x_1 i x_3 mają własność, której nie ma punkt x_2. W obu tych punktach zmienia się charakter monotoniczności funkcji f. W lewostronnym sąsiedztwie punktu x_1 funkcja f jest malejąca, podczas gdy w prawostronnym sąsiedztwie jest rosnąca. Dla punktu x_3 jest na odwrót: w lewostronnym sąsiedztwie f jest rosnąca, a w prawostronnym – malejąca. Jeśli chodzi o punkt x_2, w całym sąsiedztwie tego punktu funkcja f jest rosnąca. Obserwację tę w sposób ścisły precyzuje następne twierdzenie, które będzie głównym narzędziem do wyznaczania ekstremów lokalnych funkcji.

Twierdzenie 7.39. (Warunek konieczny i wystarczający istnienia ekstremum) *Załóżmy, że funkcja f jest określona na pewnym otoczeniu punktu x_0 i różniczkowalna w pewnym sąsiedztwie tego punktu.*

(1) *Funkcja f osiąga w punkcie x_0 maksimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.*

(2) *Funkcja f osiąga w punkcie x_0 minimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.*

Warunek sformułowany w powyższym twierdzeniu wypowiada się czasami w następującej (niezbyt ścisłej) formie:

Funkcja f osiąga w punkcie x_0 ekstremum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy pochodna zmienia w tym punkcie znak.

Przykład 7.40. Jeszcze raz przyjrzyjmy się funkcji $f(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}$. W Przykładzie stwierdziliśmy, że ma ona trzy punkty krytyczne: $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ i $x_3 = 3$. Zastosujmy teraz Twierdzenie 7.39. W Przykładzie 7.34 wyznaczyliśmy znaki pochodnej f':

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\quad\Leftrightarrow\quad x \in (-3, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3) \\ f'(x) < 0 &\quad\Leftrightarrow\quad x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty). \end{aligned}$$

Z punktu (2) Twierdzenia 7.39 wynika więc, że w punkcie $x_1 = -3$ funkcja f osiąga minimum lokalne, a z warunku (1) wynika, że f przyjmuje maksimum lokalne w punkcie $x_3 = 3$. Ponadto, ponieważ w punkcie $x_2 = 0$ nie jest spełniony ani warunek (1) ani warunek (2) Twierdzenia 7.39, w punkcie tym funkcja f nie osiąga ekstremum lokalnego.

Oczywiście powyższe zgadza się z naszą wcześniejszą analizą wykresu funkcji f.

Uwaga 7.41. Zauważmy, że w założeniach Twierdzenia 7.39 nie wymaga się, by funkcja była różniczkowalna w samym punkcie x_0, a jedynie w pewnym sąsiedztwie tego punktu. Jeśli więc istnieją takie punkty dziedziny funkcji f, w których funkcja nie jest różniczkowalna, to należy też traktować je jako punkty „podejrzane” o istnienie ekstremum.

Przykład 7.42. Rozważmy funkcję $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$.

Jest ona określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, przy czym

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}, & \text{gdy } x \geq 0, \\ -\dfrac{x}{x^2+1}, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Pomocniczo obliczamy

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Wynika stąd natychmiast

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, & \text{gdy } x > 0, \\ \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

W punkcie $x_0 = 0$ funkcja f nie jest różniczkowalna. Wynika to z następujących obliczeń

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\frac{h}{\sqrt{h^2+1}}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \left(-\frac{1}{h^2+1}\right) = -1$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h}{\sqrt{h^2+1}}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^2+1} = 1$$

Ponieważ lewostronna granica ilorazów róznicowych nie jest równa granicy prawostronnej, nie istnieje granica definiująca pochodną funkcji f w zerze.

Pochodna f' ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Zgodnie z Uwagą 7.41 do zbioru punktów „podejrzanych" dołączamy jeszcze $x_3 = 0$.

Badamy teraz znaki pochodnej:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} > 0 \wedge x > 0\right) \vee \left(\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} > 0 \wedge x < 0\right) \\ &\Leftrightarrow \big(1-x^2 > 0 \wedge x > 0\big) \vee \big(x^2-1 > 0 \wedge x < 0\big) \\ &\Leftrightarrow (0 < x < 1) \vee (x < -1) \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \wedge x > 0\right) \vee \left(\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} < 0 \wedge x < 0\right) \\ &\Leftrightarrow \big(1-x^2 < 0 \wedge x > 0\big) \vee \big(x^2-1 < 0 \wedge x < 0\big) \\ &\Leftrightarrow (x > 1) \vee (-1 < x < 0) \\ &\Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, \infty). \end{aligned}$$

Z warunku (2) Twierdzenia 7.39 wynika zatem, że w punktach 1 i -1 funkcja f osiąga maksima lokalne, natomiast w punkcie 0 osiąga minimum lokalne (mimo, że nie jest w tym punkcie różniczkowalna!).

7.6.3. Druga pochodna a wypukłość.

7.6.3.1. *Pochodne wyższych rzędów.* Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (a, b), to wyznacza ona kolejną funkcję określoną na przedziale (a, b): swoją pochodną f'. Jeśli funkcja f' jest ciągła, to mówimy, że funkcja f jest klasy C^1 i piszemy $f \in C^1(a, b)$.

Oprócz badania ciągłości funkcji f' możemy również zadać pytanie o jej różniczkowalność. Jeśli jest ona różniczkowalna, to jej pochodną oznaczamy f'' i nazywamy drugą pochodną funkcji f. O funkcji f mówimy wtedy, że jest dwukrotnie różniczkowalna. Jeśli druga pochodna f'' jest ciągła, to mówimy, że funkcja f jest klasy C^2 i piszemy $f \in C^2(a, b)$.

Procedurę tę możemy kontynuować i tak dochodzimy do pojęcia n-tej pochodnej (albo pochodnej rzędu n) dla dowolnej liczby naturalnej n. Pochodną rzędu n funkcji f oznaczamy $f^{(n)}$.

Możemy tutaj zastosować definicję rekurencyjną. Określiliśmy już pierwszą pochodną. Załóżmy teraz, że mamy określoną n-tą pochodną $f^{(n)}$. Wtedy pochodną rzędu $n+1$ definiujemy jako pochodną funkcji $f^{(n)}$, o ile funkcja $f^{(n)}$ jest różniczkowalna:

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$

Jeśli n-ta pochodna funkcji f jest ciągła, to mówimy, że f jest klasy C^n i piszemy $f \in C^n(a,b)$. Jeśli istnieje n-ta pochodna funkcji f dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to mówimy, że funkcja f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna albo klasy C^∞ i piszemy $f \in C^\infty(a,b)$.

Przyjmować będziemy też umowę, że pochodna rzędu 0 to funkcja f, tzn. $f^{(0)} = f$.

Przykład 7.43. Niech $f(x) = \mathrm{e}^x$.
Wtedy $f'(x) = \mathrm{e}^x = f(x)$. Łatwo zauważyć, że pochodna dowolnego rzędu będzie zawsze równa funkcji f, czyli $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 7.44. Niech $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Obliczmy pochodne kilku początkowych rzędów:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\
f''(x) &= \left(-x^{-2}\right)' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \\
f^{(3)}(x) &= \left(2x^{-3}\right)' = -2 \cdot 3x^{-4} = -\frac{6}{x^4} \\
f^{(4)}(x) &= \left(-2 \cdot 3x^{-4}\right)' = 2 \cdot 3 \cdot 4x^{-5} = -\frac{24}{x^5}
\end{aligned}$$

Analizując otrzymane wzory odgadujemy wzór na n-tą pochodną dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

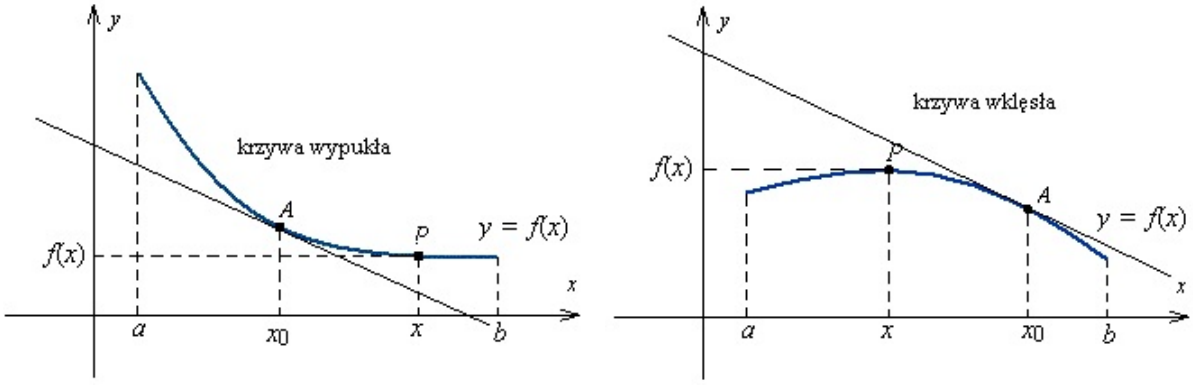
Przykład 7.45. Niech $f(x) = \sin x$.
Obliczmy pochodne kilku początkowych rzędów:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\sin x)' = \cos x \\
f''(x) &= (\cos x)' = -\sin x \\
f^{(3)}(x) &= (-\sin x)' = -\cos x \\
f^{(4)}(x) &= (-\cos x)' = \sin x
\end{aligned}$$

Widać, że przy liczeniu pochodnych wyższych rzędów otrzymana sekwencja będzie się powtarzać. W wyniku tego otrzymamy

$$f^{(n)} = \begin{cases} (-1)^k \cos x, & \text{gdy } n = 2k+1 \text{ dla } k = 0,1,2,\ldots, \\ (-1)^k \sin x, & \text{gdy } n = 2k \text{ dla } k = 0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

7.6.3.2. *Badanie kształtu wykresu.* Rozważmy następujące dwa rysunku przedstawiające wykresy dwóch różnych funkcji. Na obu rysunkach wyróżniony jest pewien punkt x_0 należący



do dziedziny. Ma on tę własność, że przez odpowiadający mu punkt na wykresie da się poprowadzić styczną do wykresu, czyli f jest różniczkowalna w x_0. Zauważmy, że pierwszy wykres ma tę własność, że istnieje takie sąsiedztwo punktu x_0, że dla każdego x z tego sąsiedztwa punkt $P = (x, f(x))$ wykresu leży powyżej stycznej poprowadzonej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Analogicznie, na drugim rysunku istnieje takie sąsiedztwo punktu x_0, że dla każdego x z tego sąsiedztwa punkt $P = (x, f(x))$ wykresu leży poniżej stycznej poprowadzonej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Definicja 7.46. Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Jeśli dla każdego $x_0 \in (a,b)$ zachodzi sytuacja przedstawiona na pierwszym rysunku, to mówimy, że f jest *funkcją wypukłą* na przedziale (a,b).

Analogicznie, jeśli dla każdego $x_0 \in (a,b)$ zachodzi sytuacja z rysunku drugiego, to f jest *funkcją wklęsłą* na przedziale (a,b).

Następujące twierdzenie formułuje warunki równoważne tym opisanym w powyższej definicji.

Twierdzenie 7.47. *Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną.*

(1) *Funkcja f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\, x, y \in (a,b)\ \forall\, \alpha \in (0,1):\ f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

(2) *Funkcja f jest wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\, x, y \in (a,b)\ \forall\, \alpha \in (0,1):\ f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Podobnie jak w przypadku przedziałów monotoniczności, dla każdej funkcji różniczkowalnej można mówić o przedziałach wypukłości i przedziałach wklęsłości. W wyznaczaniu tych przedziałów pomocne jest następujące twierdzenie, które jest analogonem Twierdzenia 7.28.

Twierdzenie 7.48. *Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną.*

(i) *Jeśli $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in (a,b)$, to funkcja f jest wypukła w przedziale (a,b).*

(ii) *Jeśli $f''(x) < 0$ dla każdego $x \in (a,b)$, to funkcja f jest wklęsła w przedziale (a,b).*

Przykład 7.49. Niech $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 7x + 2$. Wyznaczymy przedziały wypukłości i przedziały wklęsłości funkcji f.

Obliczamy pierwszą i drugą pochodną

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 24x^2 + 36x - 7, \\ f''(x) &= 12x^2 + 48x + 36 = 12(x^2 + 4x + 3) = 12(x+3)(x+1). \end{aligned}$$

Wyznaczamy teraz znaki drugiej pochodnej f''

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\ \Leftrightarrow\ (x+3)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty), \\ f''(x) < 0 &\ \Leftrightarrow\ (x+3)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -1). \end{aligned}$$

Zgodnie zatem z Twierdzeniem 7.48:

- f jest wypukła na przedziałach $(-\infty, -3)$ i $(-1, \infty)$,
- f jest wklęsła na przedziale $(-3, -1)$.

Definicja 7.50. Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną i niech $x_0 \in (a,b)$. Mówimy, że x_0 jest *punktem przegięcia* wykresu funkcji f, jeśli spełniony jest jeden z następujących warunków:

(i) istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że funkcja f jest wypukła na przedziale $(x_0 - \delta, x_0)$ i wklęsła na przedziale $(x_0, x_0 + \delta)$;

(i) istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że funkcja f jest wklęsła na przedziale $(x_0 - \delta, x_0)$ i wypukła na przedziale $(x_0, x_0 + \delta)$.

Okazuje się, że technika wyznaczania punktów przegięcia wykresu funkcji f jest analogiczna do techniki wyznaczania ekstremów lokalnych. Różnica polega na tym, że zamiast pierwszej pochodnej używamy drugiej.

Twierdzenie 7.51. *Jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie x_0 i ma w tym punkcie punkt przegięcia, to $f''(x_0) = 0$.*

Uwaga 7.52. Powyższe twierdzenie jest analogonem Twierdzenia 7.36. Pozwala ono na wyznaczanie punktów „podejrzanych" o punkty przegięcia.

Oczywistym wnioskiem z Twierdzenia 7.48 i definicji punktu przegięcia jest następujące twierdzenie będące analogonem Twierdzenia 7.39. Tutaj również pierwsza pochodna zastąpiona jest przez drugą pochodną.

Twierdzenie 7.53. *Załóżmy, że funkcja f jest określona na pewnym otoczeniu punktu x_0 i dwukrotnie różniczkowalna w pewnym sąsiedztwie tego punktu. Funkcja f ma w tym punkcie punkt przegięcia jeśli spełniony jest jeden z następujących warunków:*

(i) *istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f''(x) > 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ i $f''(x) < 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$;*

(ii) *istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f''(x) < 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ i $f''(x) > 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.*

Przykład 7.54. Rozważmy funkcję f z Przykładu 7.50. Z rachunków tam poczynionych widać, że miejscami zerowymi funkcji f'' są punkty $x_1 = -3$ i $x_2 = -1$. Z analizy znaków drugiej pochodnej wynika, że punkt x_1 spełnia warunek (ii) powyższego twierdzenia, zaś punkt x_2 spełnia warunek (i). Oba punkty są więc punktami przegięcia wykresu funkcji f.

Uwaga 7.55. Zwróćmy uwagę, że w założeniach Twierdzenia 7.53 nie ma warunku, że istnieje druga pochodna w punkcie x_0. Jest to sytuacja analogiczna jak w przypadku Twierdzenia 7.39 (patrz Uwaga 7.41).

7.6.4. Wyznaczanie ekstremów lokalnych przy pomocy pochodnych wyższego rzędu. Dla funkcji, które posiadają pochodne wyższych rzędów mamy następujące twierdzenie charakteryzujące punkty, w których te funkcje osiągają ekstrema.

Twierdzenie 7.56. *Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$. Załóżmy, że funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest klasy $C^n(a, b)$. Niech $x_0 \in (a, b)$ będzie takim punktem, że*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0. \tag{7.14}$$

Funkcja f osiąga ekstremum lokalne w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą. Typ ekstremum zależy w tym wypadku od znaku liczby $f^{(n)}(x_0)$:

- *jeśli $f^{(n)}(x_0) < 0$, to f przyjmuje w x_0 maksimum lokalne,*
- *jeśli $f^{(n)}(x_0) > 0$, to f przyjmuje w x_0 minimum lokalne.*

Twierdzenie to stosujemy w ten sposób, że dla każdego punktu krytycznego, czyli takiego, że $f'(x_0) = 0$, obliczamy wartości kolejnych pochodnych w tym punkcie tak długo, aż natrafimy na wartość różną od zera. Jeśli rząd tej pierwszej niezerowej pochodnej jest nieparzysty, to f nie przyjmuje ekstremum lokalnego w x_0. Jeśli zaś ten rząd jest parzysty, to w x_0 ekstremum jest przyjęte, a jego tym zależy od znaku tej pierwszej niezerowej pochodnej.

Przykład 7.57. Rozważmy funkcję $f(x) = \sin 2x + 2\cos x$, gdzie $x \in [0, 2\pi]$. Wyznaczymy jej ekstrema lokalne.

Najpierw obliczamy pierwszą pochodną

$$f'(x) = 2\cos 2x - 2\sin x = 2(1 - 2\sin^2 x - 2\sin x) = 2(-2\sin^2 x - 2\sin x + 1).$$

Wyznaczamy punkty krytyczne

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0.$$

Ostatnie równanie trygonometryczne rozwiązujemy stosując podstawienie $t = \sin x$, które prowadzi do równania kwadratowego

$$-2t^2 - 2t + 1 = 0.$$

Równanie to posiada dwa rozwiązania $t_1 = -1$ i $t_2 = \dfrac{1}{2}$. Punkty krytyczne funkcji f będą więc spełniały jedno z równań

$$\sin x = -1 \qquad \text{lub} \qquad \sin x = \frac{1}{2}.$$

W przedziale $[0, 2\pi]$ są trzy takie punkty: $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$, $x_2 = \dfrac{5\pi}{6}$, $x_3 = \dfrac{3\pi}{2}$.

Chcąc sprawdzić, czy w wyznaczonych punktach krytycznych funkcja f przyjmuje ekstrema lokalne obliczamy drugą pochodną

$$f''(x) = -4\sin 2x - 2\cos x$$

i wartości, jakie przyjmuje ona w punktach krytycznych

$$\begin{aligned} f''\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -4\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6} = -4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3} < 0 \\ f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= -4\sin\frac{5\pi}{3} - 2\cos\frac{5\pi}{6} = -4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3} > 0 \\ f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= -4\sin 3\pi - 2\cos\frac{3\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$

W tym momencie wiadomo już, że w punkcie $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ funkcja f osiąga maksimum lokalne ($n = 2$ parzyste i $f''(x_1) < 0$), a w punkcie $x_2 = \dfrac{5\pi}{6}$ osiągnięte jest minimum lokalne ($n = 2$ parzyste i $f''(x_2) > 0$). Ponieważ $f(x_3) = 0$, dalej nie wiadomo, czy w x_3 jest osiągnięte ekstremum.

Obliczamy trzecią pochodną

$$f'''(x) = -8\cos 2x + 2\sin x$$

i jej wartość w punkcie x_3

$$f'''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -8\cos 3\pi + 2\sin\frac{3\pi}{2} = -8\cdot(-1) + 2\cdot(-1) = 6 \neq 0.$$

W punkcie x_3 funkcja f nie osiąga ekstremum lokalnego, bo $f'(x_3) = f''(x_3) = 0$ i $f'''(x_3) \neq 0$.

Zatem jedynymi punktami, w których f osiąga ekstrema lokalne, są:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \text{ (maksimum)}, \qquad x_2 = \frac{5\pi}{6} \text{ (minimum)}.$$

7.6.5. Obliczanie granic. Przy obliczaniu granic funkcji w punkcie, w których występuje symbol nieoznaczony, przydatne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.58. (Reguła de l'Hospitala) *Załóżmy, że funkcje f i g są różniczkowalne w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 (x_0 może być punktem niewłaściwym) i $g(x) \neq 0$ dla x z pewnego sąsiedztwa punktu x_0. Jeśli spełniony jest jeden z następujących warunków:*

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,
(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$,

to

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{7.15}$$

Równość granic (7.15) należy rozumieć tak, że istnienie jednej granicy implikuje istnienie drugiej, czyli albo obie jednocześnie nie istnieją, albo obie jednocześnie istnieją i są sobie równe.

Przykład 7.59. Obliczymy granicę $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\ln x}$.
Sprawdzamy, czy spełnione są założenia Twierdzenia 7.58:

$$\lim_{x\to 0^+} x=0, \qquad \lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty.$$

Widzimy, że nie jest ani warunek (1) ani warunek (2) w założeniach reguły de l'Hospitala, zatem nie można jej tutaj stosować. W naszej granicy nie występuje symbol nieoznaczony i łatwo uzasadniamy, że

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}=0.$$

Przykład 7.60. Obliczymy granicę $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.
Sprawdzamy, czy spełnione są założenia reguły de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to 1^+}\ln x=0, \qquad \lim_{x\to 1^+}\sqrt{x^2-1}=0.$$

Spełniony jest warunek (1) z Twierdzenia 7.58, zatem możemy korzystać ze wzoru (7.15)

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)'}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}=0.$$

Przykład 7.61. Obliczymy granicę $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x}$.
Sprawdzamy, czy spełnione są założenia reguły de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=e^0-1=0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0.$$

Ponieważ spełniony jest warunek (1), możemy stosować wzór (7.15):

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x}\overset{\text{H}}{=}\\ &\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{e^{\frac{1}{x}}(1+x^2)}{x^2}\right)=-\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2}{x^2}=\\ &=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2}{x^2}\overset{\text{H}}{=}-\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2x}=-1.\end{aligned}$$

Przykład 7.62. Obliczymy granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln^2 x$.

Ponieważ chcemy skorzystać z reguły de l'Hospitala, musimy wyrażenie $\sqrt{x}\ln^2 x$ przedstawić w postaci ułamka spełniającego założenia tej reguły:

$$\sqrt{x}\ln^2 x = \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\ln^2 x}{x^{-\frac{1}{2}}}.$$

Ponieważ

$$\lim_{x\to 0^+} \ln^2 x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

założenie (2) Twierdzenia 7.58 jest spełnione. Stosujemy zatem wzór (7.15)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln^2 x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{x^{-\frac{1}{2}}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-4\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} \overset{\text{H}}{=} \\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-4\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{8}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} 8\sqrt{x} = 0.\end{aligned}$$

7.6.6. Obliczanie przybliżonych wartości funkcji. W tym rozdziale pokażemy jak wykorzystać Twierdzenie 7.25 do obliczania przybliżonych wartości funkcji. Przypomnijmy, że jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i różniczkowalną w przedziale otwartym (a, b), to twierdzenie Lagrange'a gwarantuje istnienie punktu $\xi \in (a, b)$ takiego, że

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Najpierw zauważmy, że wzór ten pozostanie aktualny również wtedy, gdy $a > b$ i zamiast przedziału $[a, b]$ będziemy rozważać przedział $[b, a]$. O punkcie ξ można wtedy ogólnie powiedzieć, że leży między punktami a i b.

Wprowadźmy teraz w tym wzorze trochę inne oznaczenia. Niech

$$a = x_0, \qquad b - a = \Delta x.$$

Wzór z twierdzenia Lagrange'a przybiera zatem postać

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

dla pewnego punktu ξ leżącego między punktami x_0 i $x_0 + \Delta x$. Po przekształceniu przybiera on postać

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(\xi)\Delta x.$$

Jeśli w powyższym wzorze założymy, że wielkość Δx jest mała, to nie zrobimy wielkiego błędu przyjmując, że $\xi \approx x_0$. Ostatecznie dochodzimy do następującego wzoru na obliczanie przybliżonych wielkości

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{7.16}$$

Przykład 7.63. Obliczymy przybliżoną wartość liczby $\sqrt[4]{80}$.
W tym celu rozważamy funkcję $f(x) = \sqrt[4]{x}$ i we wzorze (7.16) przyjmujemy

$$x_0 = 81, \qquad \Delta x = -1.$$

Wzór (7.16) przybiera wtedy postać

$$f(80) \approx f(81) + f'(81) \cdot (-1) = f(81) - f'(81).$$

Obliczamy pochodną

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$$

Mamy zatem

$$f(81) = \sqrt[4]{81} = 3, \qquad f'(81) = \frac{1}{4\sqrt[4]{81^3}} = \frac{1}{4 \cdot \left(\sqrt[4]{81}\right)^3} = \frac{1}{4 \cdot 3^3} = \frac{1}{108}.$$

Ostatecznie:

$$\sqrt[4]{80} \approx 3 - \frac{1}{108} = 2\frac{107}{108} \approx 2{,}991.$$

ROZDZIAŁ 8

Szeregi. Szereg Taylora funkcji jednej zmiennej

Celem tego rozdziału jest sformułowanie twierdzenia Taylora. Do tego niezbędne będzie wprowadzenie pojęcia zbieżności szeregu liczbowego.

8.1. Szeregi

Niech będzie dany nieskończony ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Będziemy rozważać następujący problem:

Czy da się obliczyć sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n):

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots ?$$

Czy może się zdarzyć, że ta suma będzie liczbą skończoną?

Odpowiedź na tak postawione pytanie jest praktycznie niemożliwa, bo jak dotąd, nie wiemy, co to znaczy "suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu". Umiemy obliczać sumy skończenie wielu składników, ale to nie ma zastosowania do postawionego problemu.

8.1.1. Definicja zbieżności szeregu. Wprowadźmy następujące oznaczenie. Zamiast pisać

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N$$

będziemy pisać

$$\sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Ogólniej

$$\sum_{n=k}^{N} a_n = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{N-1} + a_N$$

dla każdych liczb całkowitych k i N takich, że $k \leq N$. Czasami przyjmuje się umowę, że jeśli $k > N$, to $\sum_{n=k}^{N} a_n = 0$.

Przykład 8.1.

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

Przykład 8.2.

$$\sum_{i=3}^{3} \frac{1+i^2}{i} = \frac{1+3^2}{3} = \frac{10}{3}$$

Mając dany ciąg (a_n) definiujemy dla każdego $N \in \mathbb{N}$ następującą sumę

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \tag{8.1}$$

Liczbę S_N nazywamy N-tą sumą częściową ciągu (a_n). W szczególności mamy

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\dots \end{aligned}$$

Łatwo jest zauważyć, że między kolejnymi sumami częściowymi zachodzi następujący związek

$$S_{N+1} = S_N + a_{N+1}, \qquad N \in \mathbb{N}. \tag{8.2}$$

W wyniku procedury obliczania sum częściowych ciągu (a_n) otrzymujemy nowy ciąg $(S_N)_{N=1}^{\infty}$.

Przykład 8.3. Niech $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Obliczamy:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ S_3 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\ S_4 &= \frac{7}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

Można uzasadnić (np. stosując zasadę indukcji matematycznej), wzór

$$S_N = \frac{2^N - 1}{2^N}. \tag{8.3}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots .$$

Obiekt ten nazywać będziemy *szeregiem* wyrazów a_n. Sens tego pojecia wyjaśnia następująca

Definicja 8.4. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeśli ciąg (S_N) ma granicę właściwą. Jeśli $S = \lim_{N\to\infty} S_N$, to liczbę S nazywamy *sumą szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i piszemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Przykład 8.5. Powróćmy do Przykładu 8.3. Ze wzoru (8.3) wynika, że

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{2^N - 1}{2^N} = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^N}\right) = 1.$$

Wynika stąd, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1. \tag{8.4}$$

Przykład 8.6. Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Korzystając z zależności (refe:sumarekur) obliczamy kilka początkowych sum częściowych

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \\ S_3 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \\ S_4 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Czytelnik może potraktować jako ćwiczenie udowdnienie metodą indukcji matematycznej wzoru

$$S_N = \frac{N}{N+1}.$$

Stąd łatwo wynika, że

$$\lim_{N\to\infty} S_N = 1,$$

co prowadzi do wniosku, że badany szereg jest zbieżny i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

8.1.2. Kryteria zbieżności szeregów. Problem obliczenia sumy szeregu jest zazwyczaj bardzo trudny. Jest tylko nieliczna klasa szeregów, dla których da się łatwo znaleźć wzór jawny ciągu sum częściowych. Zazwyczaj już sama odpowiedź, czy dany szereg jest zbieżny jest trudna. Podamy teraz serię twierdzeń, które pozwalają znaleźć odpowiedź na tak postawione pytanie.

Twierdzenie 8.7. (Kryterium d'Alemberta) *Niech $a_n \geq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że istnieje granica*

(8.5) $$t = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(1) *Jeśli $t < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.*

(2) *Jeśli $t > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.*

Uwaga 8.8. Może się zdarzyć, że dla pewnego szregu otzrymamy w (8.5) $t = 1$. Wtedy mówimy, że kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga zbiezności tego szeregu. Wynika to z faktu, że istnieją zarówno szeregi zbieżne jak i rozbieżne, dla których $t = 1$.

Przykład 8.9. Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Posłużymy się kryterium d'Alemberta. Obliczamy

$$t = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n}{2\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Z Twierdzenia 8.7 wynika zatem, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ jest zbieżny.

Przykład 8.10. Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Korzystamy z kryterium d'Alemberta. Obliczamy

$$t = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(n!)^2(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}} = \frac{1}{4} < 1.$$

Z Twierdzenia 8.7 wnioskujemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ jest zbieżny.

Przykład 8.11. Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

Korzystamy z kryterium d'Alemberta. Obliczamy

$$t = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 3^n (n+1) n!\, n^n}{(n+1)(n+1)^n \cdot 3^n n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 3\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = 3e^{-1} = \frac{3}{e} > 1.$$

Własności ciągu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ omówiliśmy w Przykładzie 4.44. Granicą tego ciągu jest stała $e \approx 2{,}71$, stąd ostatnia nierówność. Z Twierdzenia 8.7 wynika więc, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ jest rozbieżny.

Twierdzenie 8.12. (Kryterium Cauchy'ego) *Niech $a_n \geq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że istnieje granica*

$$s = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

(1) *Jeśli $s < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.*

(2) *Jeśli $s > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.*

Przykład 8.13. Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Korzystamy z kryterium Cauchy'ego. Obliczamy

$$s = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} \sqrt[n]{\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^n} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = 2e^{-1} = \frac{2}{e} < 1.$$

Z Twierdzenia 8.12 wnioskujemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ jest zbieżny.

Twierdzenie 8.14. (Kryterium porównawcze) *Niech $a_n \geq 0$ i $b_n \geq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.*

(1) *Jeśli $a_n \leq b_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest też zbieżny.*

(2) *Jeśli $a_n \geq b_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest też rozbieżny.*

Twierdzenie 8.15. (Kryterium Leibnitza) *Niech $b_n \geq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jeśli ciąg (b_n) jest malejący i $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ jest zbieżny.*

8.1.3. Szeregi potęgowe. Rozważamy szeregi postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{8.6}$$

gdzie $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest pewnym ustalonym ciągiem liczbowym, $x_0 \in \mathbb{R}$ jest pewnym ustalonym punktem, zaś x jest dowolną liczbą rzeczywistą. Takie szeregi nazywamy *potęgowymi*. Szczególnym przypadkiem jest sytuacja, gdy $x_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Przypuśćmy, że istnieje granica

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Dopuszczamy również przypadek $\rho = +\infty$. Zdefiniujmy

$$R = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \rho = +\infty, \\ \dfrac{1}{\rho}, & \text{gdy } 0 < \rho < +\infty, \\ +\infty, & \text{gdy } \rho = 0. \end{cases} \tag{8.7}$$

Twierdzenie 8.16. *Niech R będzie określone tak, jak w równości (8.7).*

(1) *Jeśli $|x - x_0| < R$, to szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ jest zbieżny.*

(2) *Jeśli $|x - x_0| > R$, to szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ jest rozbieżny.*

Liczbę R nazywamy promieniem zbieżności szeregu potęgowego (8.6).

8.2. Szereg Taylora

Rozpoczniemy od następującego twierdzenia

Twierdzenie 8.17. (Twierdzenie Taylora) *Niech $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją $n+1$-krotnie różniczkowalną w (α, β). Wówczas dla dowolnych punktów a i b takich, że $\alpha < a < b < \beta$ istnieje punkt $\xi \in (a, b)$ taki, że*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_{n+1},$$

gdzie

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+1}.$$

Wnioskiem jest następujące

Twierdzenie 8.18. *Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie klasy C^∞ na pewnym otoczeniu punktu x_0. Załóżmy, że na pewnym otoczeniu wszystkie pochodne są wspólnie ograniczone, tzn.*

$$\exists\, \delta > 0\ \exists\, C > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in X :\ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f^{(n)}(x)| \leq C.$$

Wtedy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{8.8}$$

dla wszystkich $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Szereg występujący w (8.8) nazywamy *szeregiem Taylora* funkcji f względem punktu x_0. Jeśli $x_0 = 0$, to (8.8) przybiera postać

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

i mówimy wtedy o *szeregu Maclaurina*.

Przykład 8.19. Niech $f(x) = \mathrm{e}^x$.
Znajdziemy szereg Maclaurina tej funkcji. Ponieważ $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Mamy zatem

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n.$$

ROZDZIAŁ 9

Całkowanie funkcji jednej zmiennej

9.1. Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie pewnym przedziałem liczbowym (domkniętym lub otwartym, ograniczonym lub nieograniczonym). Załóżmy, że $f : I \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą.

Definicja 9.1. Mówimy, że funkcja $F : I \to \mathbb{R}$ jest *pierwotną* funkcji f, jeśli f jest pochodną funkcji F, tzn. $F' = f$.

Z powyższej definicji widać, że wyznaczanie funkcji pierwotnej jest problemem odwrotnym do obliczania pochodnej. Chcąc znaleźć pierwotną, musimy "odgadnąć", jaka funkcja F ma tę własność, że jej pochodna F' jest równa zadanej funkcji f.

Przykład 9.2. Niech $f(x) = 2x + 1$. Na podstawie Tabeli 7.1 na str. 114 stwierdzamy, że funkcja $F_1(x) = x^2 + x$ jest pierwotną funkcji f. Istotnie, mamy

$$F_1'(x) = (x^2 + x)' = 2x + 1 = f(x).$$

Zauważmy jednak, że ta funkcja F_1 nie jest jedyną pierwotną funkcji f. Na przykład, jeśli rozważymy funkcję $F_2(x) = x^2 + x + 1$, to będziemy mieli

$$F_2'(x) = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1 = f(x),$$

czyli F_2 jest również pierwotną do f. Łatwo zauważyć, że każda funkcja postaci $F(x) = x^2 + x + C$, gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą, spełnia warunek $F' = f$.

Z powyższego przykładu widać, że pierwotna do zadanej funkcji f nie jest wyznaczona jednoznacznie. Z drugiej strony, prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 9.3. *Jeśli F_1 i F_2 są pierwotnymi tej samej funkcji $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, to istnieje liczba $C \in \mathbb{R}$ taka, że*

$$F_2(x) = F_1(x) + C, \qquad x \in (a, b).$$

Wynika stąd następujący wniosek:

Wniosek 9.4. *Niech F będzie pewną funkcją pierwotną funkcji $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Wtedy każda pierwotna G funkcji f jest postaci $G(x) = F(x) + C$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$.*

Innymi słowy:

Jeśli znamy jedną funkcję pierwotną F, to każdą inną pierwotną otrzymamy poprzez dodanie do F pewnej stałej C.

Definicja 9.5. *Całką nieoznaczoną* z funkcji f nazywamy rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f. Oznaczamy ją

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zauważmy, że całką nieoznaczoną nie jest jakaś pojedyncza funkcja, lecz **cała rodzina** funkcji pierwotnych. Z drugiej strony, z Wniosku 9.4 wynika, że wszystkie funkcje pierwotne są postaci $F(x)+C$, gdzie F jest jakąś (wyznaczoną w jakikolwiek sposób) funkcją pierwotną. Oznacza to, że jeśli znamy jakąś jedną funkcję pierwotną F, to znamy wszystkie funkcje pierwotne, a więc znamy też całkę nieoznaczoną. Z tego powodu, często zapisujemy

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

gdzie F jest pewną funkcją pierwotną.

Przykład 9.6. Z rozważań w Przykładzie 9.2 wynika, że możemy zapisać

$$\int (2x + 1)\,\mathrm{d}x = x^2 + x + C.$$

Oczywiście, równie dobrze moglibyśmy zapisać

$$\int (2x + 1)\,\mathrm{d}x = x^2 + x + 1 + C.$$

Uwaga 9.7. Twierdzenie 9.3 jest prawdziwe tylko wtedy, gdy dziedziną funkcji f jest przedział postaci (a, b), natomiast nie jest już prawdziwe, gdy dziedziną funkcji f jest np. suma przedziałów.

Przykład 9.8. W celu zilustrowania powyższej uwagi rozważmy np. funkcję $f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Niech teraz funkcje $F_1, F_2 : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$ będą określone wzorami

$$\begin{aligned} F_1(x) &= -\frac{1}{x}, && x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \\ F_2(x) &= \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + 1, & \text{gdy } x \in (-\infty, 0), \\ -\dfrac{1}{x} - 1 & \text{gdy } x \in (0, \infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że $F_1'(x) = f(x)$ i $F_2'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in (-\infty) \cup (0, \infty)$. Jednak teza Twierdzenia 9.3 nie zachodzi, ponieważ

$$\begin{aligned} F_2(x) &= F_1(x) + 1, && \text{gdy } x \in (-\infty, 0), \\ F_2(x) &= F_1(x) - 1, && \text{gdy } x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

9.2. Całki nieoznaczone z funkcji elementarnych

Bardzo często będziemy mieli do czynienia z problemem obliczenia całki nieoznaczonej dla zadanej funkcji f. Z rozważań z poprzedniego rozdziału wynika, że wystarczy znaleźć jedną funkcję pierwotną F.

Dla niektórych funkcji odgadnięcie funkcji pierwotnej jest łatwe. Wystarczy skorzystać ze wzorów na pochodne zebranych w Tabeli 7.1 na stronie 114. Chcąc obliczyć całkę z funkcji f szukamy tej funkcji w prawej kolumnie tabeli, a funkcję pierwotną odczytujemy w lewej kolumnie.

Przykład 9.9. Chcąc obliczyć całkę $\int \cos x \, \mathrm{d}x$ odnajdujemy w Tabeli 7.1 funkcję $\cos x$ w środkowej kolumnie, następnie z pierwszej kolumny odczytujemy funkcję $\sin x$. Oznacza to, że

$$\int \cos \, \mathrm{d}x = \sin x + C.$$

Przykład 9.10. Chcemy obliczyć całkę $\int x^2 \, \mathrm{d}x$. W środkowej kolumnie tabeli 7.1 nie ma *explicite* wypisanej funkcji x^2. Pozycja, która ją najbardziej przypomina, to nx^{n-1}, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Jeśli przyjąć $n = 3$, to otrzymamy $3x^2$, czyli "prawie"funkcja x^2. Z tabeli wynika, że funkcją pierwotną do $3x^2$ jest funkcja x^3. Ponieważ interesująca nas funkcja x^2 jest 3 razy mniejsza od

podanej w tabeli $3x^2$, szukaną przez nas funkcją pierwotną będzie $\frac{1}{3}x^3$, czyli

$$\int x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Przykład 9.11. Analogicznie jak w poprzednim przykładzie uzasadniamy, że

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Istotnie, mamy

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)x^n = x^n.$$

Przykład 9.12. Podobne rozumowanie jak w poprzednim przykładzie przeprowadzamy dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ i uzasadniamy, że

$$\int x^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C. \tag{9.1}$$

Jeśli rozważamy $\alpha = -1$, to w piątym wierszu Tabeli 7.1 znajdujemy funkcję $\frac{1}{x\ln a}$, co dla $a = \mathrm{e}$ daje $\frac{1}{x\ln \mathrm{e}} = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Z lewej kolumny odczytujemy, że funkcją pierwotną jest wtedy $\log_{\mathrm{e}} x = \ln x$. Mamy zatem

$$\int x^{-1} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln x + C.$$

Przykład 9.13. Wzór (9.1) ma liczne zastosowania. Podstawiając za α różne liczby otrzymujemy różne ciekawe całki:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x} \,\mathrm{d}x &= \int x^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C \\
\int \sqrt[3]{x} \,\mathrm{d}x &= \int x^{\frac{1}{3}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x &= \int x^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \\
\int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x &= \int x^{-2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.
\end{aligned}$$

Na następnej zebraliśmy w tabeli wszystkie wzory na całki nieoznaczone, które da się łatwo otrzymać ze wzorów na pochodne z funkcji elementarnych.

TABLICA 9.1. Całki nieoznaczone funkcji elementarnych

$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	$F(x)$	Uwagi
$\int a\,\mathrm{d}x$	ax	
$\int x^n\,\mathrm{d}x$	$\frac{1}{n+1}x^n$	$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$
$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x$	$\frac{1}{\alpha+1}\alpha x^{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ Jeśli $\alpha > 0$ i $\alpha \notin \mathbb{N}$, to $x \geq 0$ Jeśli $\alpha < 0$ i $\alpha \in \mathbb{Z}$, to $x \neq 0$ Jeśli $\alpha < 0$ i $\alpha \notin \mathbb{Z}$, to $x > 0$
	$\ln\lvert x\rvert$	$\alpha = -1$, $x \neq 0$
$\int a^x\,\mathrm{d}x$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$
$\int \sin x\,\mathrm{d}x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos x\,\mathrm{d}x$	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$	$\mathrm{tg}\,x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$	$-\mathrm{ctg}\,x$	$x \neq k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$	$\arcsin x$	$-1 < x < 1$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$	$\mathrm{arctg}\,x$	$x \in \mathbb{R}$

9.3. Własności całki nieoznaczonej

Ponieważ operacja wyznaczenia całki nieoznaczonej jest odwrotna do operacji wyznaczenia pochodnej, wiele własności całki wynika z odpowiednich własności pochodnej.

Zacznijmy przede wszystkim od kwestii istnienia całki nieoznaczonej. Mamy tutaj następujące

Twierdzenie 9.14. *Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy istnieje funkcja różniczkowalna $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ taka, że $F'(x) = f(x)$ dla $x \in (a,b)$.*

Powyższe twierdzenie można streścić krótko

Każda funkcja ciągła ma pierwotną.

W rzeczywistości klasa funkcji mających funkcję pierwotną składa się nie tylko z funkcji ciągłych (tę kwestię przedyskutujemy później), ale my zawsze będziemy zakładać ciągłość funkcji f. Wtedy jest sens mówić o całce nieoznaczonej $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Twierdzenie 9.15. *Niech $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi i niech $a \in \mathbb{R}$ będzie dowolną stałą. Wtedy:*

(1) $\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$,

(2) $\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Powyższe twierdzenie pozwala obliczać całki nie tylko z funkcji elementarnych, ale również z ich wielokrotności i sum.

Przykład 9.16.

$$\begin{aligned}
&\int \left(4x^2 - \frac{3}{x^3} - \frac{2}{3\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x = \\
&= 4\int x^2\,\mathrm{d}x - 3\int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \frac{2}{3}\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \\
&= 4\cdot\frac{1}{3}x^3 - 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-2} - \frac{2}{3}\cdot(-\operatorname{ctg} x) + C = \\
&= \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2x^2} + \frac{2}{3}\operatorname{ctg} x + C
\end{aligned}$$

Przykład 9.17.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{3x^2 - 4\sqrt[4]{x^3} + 5x^3\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \frac{3x^2 - 4x^{\frac{3}{4}} + 5x^3x^{\frac{2}{3}}}{2x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{3}{2}x^{2-\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{3}{4}-\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}x^{3+\frac{2}{3}-\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{3}{2}\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x - 2\int x^{-\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x + \frac{5}{2}\int x^{\frac{13}{6}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2\cdot 4x^{\frac{1}{4}} + \frac{5}{2}\cdot\frac{6}{19}x^{\frac{19}{6}} + C = \\
&= x^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{1}{4}} + \frac{15}{19}x^{\frac{19}{6}} + C
\end{aligned}$$

9.3.1. Całkowanie przez części. Konsekwencją wzoru na pochodną iloczynu jest następujący wzór na całkowanie przez części

Twierdzenie 9.18. (Całkowanie przez części) *Niech $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi. Wtedy*

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.2}$$

Zastosowanie powyższego wzoru zilustrujemy następującym przykładem.

Przykład 9.19. Rozważmy całkę

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Funkcja podcałkowa jest iloczynem dwóch funkcji: $x \mapsto x$ i $x \mapsto \cos x$. Chcąc skorzystać ze wzoru (9.2) musimy zdecydować, którą z tych funkcji będziemy traktować jako f', a którą jako g. Niech

$$f'(x) = \cos x, \qquad g(x) = x.$$

Potrzebne nam też będą wzory funkcji f i g'. Funkcja f jest po prostu pierwotną funkcji f', zaś g' otrzymamy oczywiście przez zróżniczkowanie funkcji g. Otrzymujemy zatem

$$f(x) = \sin x, \qquad g'(x) = 1.$$

Ze wzoru (9.2) mamy więc

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x.$$

Jak widać, bezpośrednie zastosowanie wzoru (9.2) nie doprowadziło nas jeszcze do pełnego obliczenia szukanej całki. Jednak całka, która pojawiła się po prawej stronie powyższej równości

jest już do odczytania z Tablicy 9.1. Mamy więc

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x - (-\cos x) + C = x\sin x + \cos x + C.$$

Opisane wyżej rachunki dogodnie jest zapisywać wg następującego schematu

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{ll} f'(x)=\cos x, & f(x)=\sin x \\ g(x)=x, & g'(x)=1 \end{array}\right| \\ &= x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C.\end{aligned} \tag{9.3}$$

Więcej przykładów ilustrujących metodę całkowania przez części znajduje się w następnym rozdziale.

9.3.2. Całkowanie przez podstawianie. Kolejny wzór wynika ze wzoru na pochodną funkcji złożonej. Nosi on nazwę wzoru na całkowanie przez podstawianie.

Twierdzenie 9.20. (Całkowanie przez podstawianie) *Niech $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i niech $\phi:(\alpha,\beta)\to(a,b)$ będzie funkcją różniczkowalną. Wtedy*

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\phi(x)) + C, \tag{9.4}$$

gdzie F jest pierwotną funkcji f.

Zauważmy, że skoro F jest pierwotną funkcji f, to możemy zapisać

$$F(t) + C = \int f(t)\,\mathrm{d}t,$$

gdzie t jest dowolną zmienną. Załóżmy teraz, że $t=\phi(x)$. Możemy wtedy wyliczyć prawą stronę we wzorze (9.4)

$$F(\phi(x)) + C = F(t) + C = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Wzór (9.4) można zatem zapisać w następującej postaci

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t$$

Nazwa *całkowanie przez podstawianie* bierze się stąd, że jeśli w wyrażeniu po lewej stronie powyższego wzoru zrobimy podstawienie

$$t=\phi(x), \qquad \mathrm{d}t = \phi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

to otrzymamy prawą stronę. Zapisujemy to schematycznie

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \phi(x) \\ \\ \mathrm{d}t = \phi'(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t \tag{9.5}$$

Przykład 9.21.

$$\begin{aligned} \int (3+\sin x)^5 \cos x\,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{c} t = 3+\sin x \\ \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \\ &= \int t^5\,\mathrm{d}t = \frac{t^6}{6} + C = \frac{(3+\sin x)^6}{6} + C \end{aligned}$$

Jako proste zastosowanie wzoru na całkowanie przez podstawianie wyprowadzimy następujący wzór

Twierdzenie 9.22. *Załóżmy, że funkcja F jest pierwotną funkcji f, tzn. $F' = f$. Wtedy dla dowolnej stałej $\alpha \neq 0$ mamy*

$$\int f(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x) + C \tag{9.6}$$

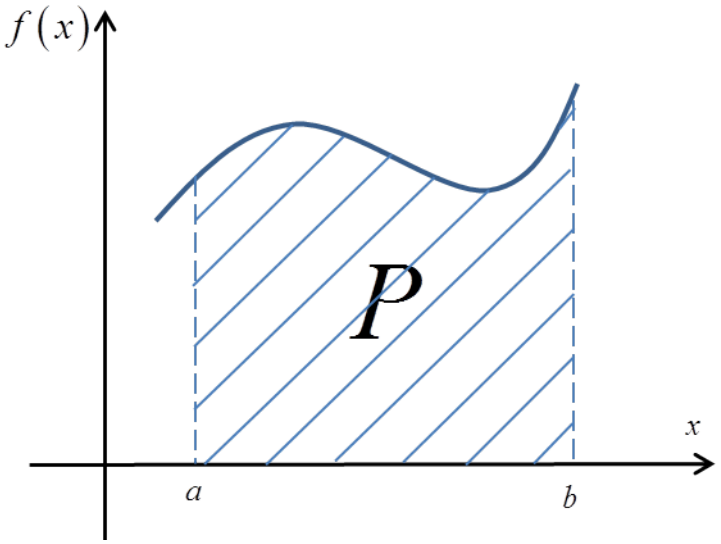
DOWÓD.

$$\begin{aligned} &\int f(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \alpha x \\ \\ \mathrm{d}t = \alpha\,\mathrm{d}x \quad \to \quad \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f(t)\cdot\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\int f(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\alpha}F(t) + C = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x) + C \end{aligned}$$

□

9.4. Całka Riemanna. Całka oznaczona

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Rozważmy funkcję rzeczywistą f określoną na przedziale $[a, b]$, tzn. niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.



Opiszemy teraz konstrukcję, która pozwala każdej dostatecznie regularnej funkcji f przyporządkować pewną liczbę, którą można interpretować jako pole figury ograniczonej wykresem funkcji f.

Podziałem odcinka $[a, b]$ będziemy nazywać ciąg $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \ldots, x_N)$ liczb rzeczywistych takich, że $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$. Jak widać, liczby $x_0, x_1, \ldots, x_N$ dzielą przedział $[a, b]$ na N mniejszych podprzedziałów. Dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$ określamy $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, tzn. Δx_i jest długością i-tego podprzedziału. Liczbę $l(\mathcal{P})$ definiujemy jako długość najdłuższego podprzedziału, tzn.

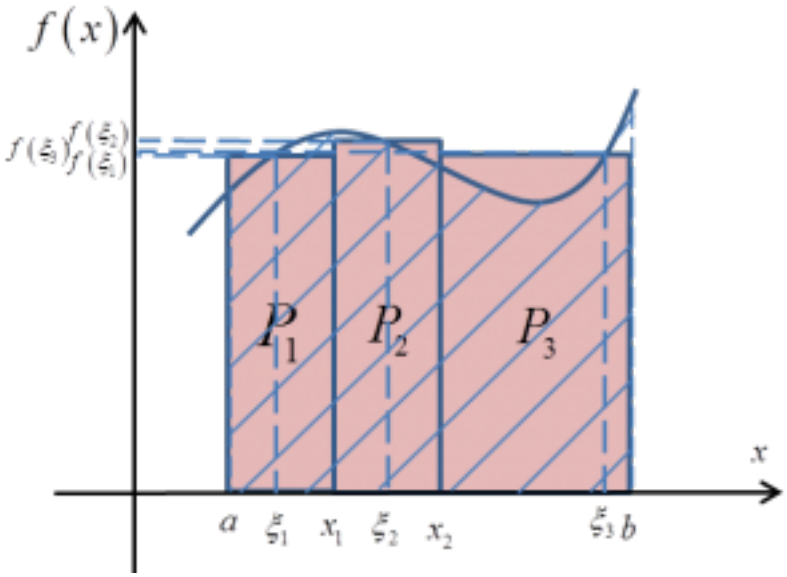
$$l(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq i \leq N} \Delta x_i.$$

Niech teraz $\mathcal{T} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ będzie ciągiem liczb takich, że $a < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_N < b$. Powiemy, że ciąg $\mathcal{T}$ jest *stowarzyszony* z podziałem $\mathcal{P}$, jeśli $x_{i-1} \leq \xi_i \leq \xi_i$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$, tzn. każda liczba ξ_i jest elementem i-tego podprzedziału.

Jeśli ciąg $\mathcal{T}$ jest stowarzyszony z podziałem $\mathcal{P}$, to dla pary $(\mathcal{P}, \mathcal{T})$ definiujemy *sumę riemannowską* $S_{\mathcal{P},\mathcal{T}}$ wzorem

$$S_{\mathcal{P},\mathcal{T}} = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Można ją interpretować jako sumę pól takich prostokątów, jak na poniższym rysunku.



Zauważmy, że pole i-tego prostokąta P_i wynosi

$$P_i = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Stąd wynika, że suma pól jest równa

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i = S_{\mathcal{P},\mathcal{T}}.$$

Główna idea polega teraz na tym, że będziemy teraz rozpatrywali ciąg podziałów $\mathcal{P}^{(k)}$, gdzie $\mathcal{P}^{(k)} = (x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \ldots, x_{N_k}^{(k)})$. Będziemy zakładali o tym ciągu, że

$$\lim_{k\to\infty} l\left(\mathcal{P}^{(k)}\right) = 0,$$

tzn. że te podziały są coraz drobniejsze. Intuicja jest taka, że jeśli teraz dla każdego podziału $\mathcal{P}^{(k)}$ weźmiemy jakiś ciąg stowarzyszony $\mathcal{T}^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_{N_k}^{(k)})$, to sumy $S_{\mathcal{P}^{(k)},\mathcal{T}^{(k)}}$ będą coraz lepszym przybliżeniem pola P z rysunku na poprzedniej stronie. Będzie tak, jeśli funkcja f jest dostatecznie regularna.

Definicja 9.23. Mówimy, że funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest *całkowalna w sensie Riemanna* (lub krótko *całkowalna*), jeśli dla każdych ciągów $\left(\mathcal{P}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ i $\left(\mathcal{T}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ takich, że

(1) $\lim_{k\to\infty} l\left(\mathcal{P}^{(k)}\right) = 0$,

(2) ciąg $\mathcal{T}^{(k)}$ jest stowarzyszony z podziałem $\mathcal{P}^{(k)}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$,

ciąg liczbowy sum riemannowskich $S_{\mathcal{P}^{(k)},\mathcal{T}^{(k)}}$ jest zbieżny i jego granica nie zależy od wyboru ciągów $\left(\mathcal{P}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ i $\left(\mathcal{T}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Tę wspólną granicę sum riemannowskich nazywamy *całką Riemanna* z funkcji f na przedziale $[a,b]$ i oznaczamy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z powyższej definicji wynika, że jeśli f jest funkcją całkowalną, to

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{N_k} f\left(\xi_i^{(k)}\right)\Delta x_i^{(k)} \tag{9.7}$$

dla dowolnego ciągu podziałów $\mathcal{P}^{(k)} = (x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \ldots, x_{N_k}^{(k)})$ takiego, że $\lim\limits_{k\to\infty} l\left(\mathcal{P}^{(k)}\right) = 0$, i dowolnych liczb $\xi_i^{(k)}$ takich, że $x_{i-1}^{(k)} \le \xi_i^{(k)} \le x_i^{(k)}$ dla każdych $k\in\mathbb{N}$ oraz $i = 1,2,\ldots,N_k$.

Technicznie rzecz biorąc, warunek całkowalności sformułowany w powyższej definicji jest dosyć trudny do zweryfikowania. Okazuje się jednak, że można udowodnić następujące

Twierdzenie 9.24. *Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła, to jest całkowalna.*

Uwaga 9.25. W rzeczywistości klasa funkcji całkowalnych w sensie Riemanna jest znacznie większa od klasy funkcji ciągłych. Można np. wykazać, że następujące funkcje są całkowalne:

(1) funkcje ze skończenie wieloma (lub nawet przeliczalnie wieloma) punktami nieciągłości,
(2) funkcje monotoniczne.

Przykład 9.26. Posługując się wzorem (9.7) obliczymy całkę

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x.$$

Z Twierdzenia 9.24 wynika że funkcja podcałkowa $f(x) = x$ jest całkowalna, bo jest ciągła. Jest zatem obojętne, jakie ciągi $\mathcal{P}^{(k)}$ i $\mathcal{T}^{(k)}$ byle były spełnione warunki (1) i (2) w Definicji 9.23. Niech zatem

$$\mathcal{P}^{(k)} = \left(0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, 1\right), \qquad k\in\mathbb{N},$$

tzn.

$$N_k = k \quad \text{oraz} \quad x_i^{(k)} = \frac{i}{k} \qquad \text{dla } k\in\mathbb{N},\ i = 0,1,2,\ldots,k.$$

Zauważmy, że

$$\Delta x_i^{(k)} = x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)} = \frac{i}{k} - \frac{i-1}{k} = \frac{1}{k}.$$

Wynika stąd, że

$$l\left(\mathcal{P}^{(k)}\right) = \max_{1\le i\le k} \Delta x_i^{(k)} = \frac{1}{k}.$$

Warunek (1) Definicji 9.23 jest zatem spełniony, bo

$$\lim_{k\to\infty} l\left(\mathcal{P}^{(k)}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Trzeba teraz dobrać ciągi $\mathcal{T}^{(k)} = \left(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots, \xi_k^{(k)}\right)$ stowarzyszone z podziałami $\mathcal{P}^{(k)}$. Weźmy np.

$$\xi_i^{(k)} = \frac{i}{k}, \qquad k \in \mathbb{N},\ i = 1, 2, \dots, k.$$

Łatwo zauważyć, że tak określony ciąg $\mathcal{T}^{(k)}$ jest stowarzyszony z podziałem $\mathcal{P}^{(k)}$.

Obliczamy sumy riemannowskie

$$S_{\mathcal{P}^{(k)},\mathcal{T}^{(k)}} = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^{(k)} \Delta x_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k}\cdot\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k^2} = \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{(k+1)k}{2} = \frac{k^2+k}{2k^2}.$$

Z Definicji 9.23 wynika więc, że

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_{\mathcal{P}^{(k)},\mathcal{T}^{(k)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+k}{2k^2} = \frac{1}{2}.$$

Uwaga 9.27. Przyjmujemy następujące umowy:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.8}$$

9.4.1. Własności całki Riemanna. Z Definicji 9.23 wynikają następujące twierdzenia

Twierdzenie 9.28. (Liniowość całki Riemanna) *Niech $c \in \mathbb{R}$. Jeśli funkcje $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ są całkowalne w sensie Riemanna, to również funkcje cf i $f+g$ są całkowalne w sensie Riemanna, przy czym*

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Twierdzenie 9.29. (Nierówność trójkąta dla całki Riemanna) *Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to również funkcja $|f|$ jest całkowalna oraz*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Twierdzenie 9.30. (Addytywność całki Riemanna) *Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to dla dowolnej liczby c takiej, że $a < c < b$, funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna zarówno na przedziale $[a, c]$ jak i na przedziale $[c, b]$. Mamy przy tym równość*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Twierdzenie 9.31. *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna. Jeśli zmienimy wartości tej funkcji w skończenie wielu punktach, to funkcja ta pozostanie całkowalna, a wartość całki nie ulegnie zmianie.*

Twierdzenie 9.32. *Jeśli f jest funkcją stałą na przedziale $[a, b]$, tzn. $f(x) = c$ dla $x \in [a, b]$, to prawdziwy jest wzór*

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b - a).$$

W szczególności

$$\int_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_a^b \mathrm{d}x = \int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b - a.$$

Twierdzenie 9.33. (Monotoniczność całki Riemanna) *Jeśli $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ są całkowalne w sensie Riemanna i $f(x) \leq g(x)$ dla $x \in [a, b]$, to*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

W szczególności, jeśli $f(x) \geq 0$ dla $x \in [a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Twierdzenie 9.34. (Twierdzenie całkowe o wartości średniej) *Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna oraz istnieją liczby $m, M \in \mathbb{R}$ takie, że $m \leq f(x) \leq M$ dla wszystkich $x \in [a, b]$, to istnieje stała $\mu \in [m, M]$ taka, że*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a).$$

9.4.2. Związki całki Riemanna z całką nieoznaczoną. Znaczenie przedstawionej w tym rozdziale konstrukcji całki Riemanna uwidacznia się najpełniej w następującym twierdzeniu

Twierdzenie 9.35. *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna. Zdefiniujmy funkcję $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ wzorem*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in [a, b].$$

Wtedy:

(1) *F jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$;*
(2) *jeśli f jest ciągła w pewnym punkcie $x_0 \in (a, b)$, to funkcja F jest różniczkowalna w punkcie x_0, przy czym $F'(x_0) = f(x_0)$;*
(3) *jeśli f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, to F jest funkcją pierwotną funkcji F.*

Konsekwencją powyższego jest następujące twierdzenie zwane czasami *podstawowym twierdzeniem analizy*.

Twierdzenie 9.36. (Twierdzenie Newtona-Leibniza) *Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, zaś F jest pierwotną funkcji f, to*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{9.9}$$

Uwaga 9.37. Na oznaczenie wyrażenia znajdującego się po prawej stronie wzoru (9.9) stosuje się oznaczenie

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Uwaga 9.38. Z twierdzenia tego wynika, że obliczanie całki Riemanna nie wymaga wcale stosowania skomplikowanej procedury opisanej w Definicji 9.23. Wystarczy jedynie znajomość

funkcji pierwotnej dla funkcji podcałkowej, a to oznacza obliczenie całki nieoznaczonej. Z tego też powodu, żeby pokazać związek z całką nieoznaczoną, całkę Riemanna nazywa się *całką oznaczoną*.

Należy tu jednak podkreślić, że mimo bardzo podobnych nazw i oznaczeń, całka nieoznaczona i oznaczona to dwa bardzo różne obiekty matematyczne: **całka nieoznaczona to rodzina funkcji, podczas gdy całka oznaczona jest liczbą**.

Przykład 9.39. Chcemy obliczyć całkę $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$. Obliczymy najpierw całkę nieoznaczoną. Będziemy całkować przez podstawianie.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

Jako funkcję pierwotną do funkcji podcałkowej weźmiemy funkcję

$$F(x) = \frac{\ln^3 x}{3}.$$

Ze wzoru (9.9) otrzymujemy więc

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^3 x}{x}\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{\ln^3 \mathrm{e}}{3} - \frac{\ln^3 1}{3} = \frac{1}{3}.$$

9.4.3. Wzory na całkowanie przez części i całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych. Z tego, że całka oznaczona i nieoznaczona są ściśle ze sobą związane, wynika, że pewne własności całek nieoznaczonych przenoszą się na całki oznaczone. Przykładem są następujące twierdzenia

Twierdzenie 9.40. (Wzór na całkowanie przez części dla całki oznaczonej) *Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami klasy $C^1(a, b)$ (oznaczenie patrz str. 131). Wtedy*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.10}$$

Przykład 9.41.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} f'(x)=\sin x & f(x)=-\cos x \\ g(x)=x & g'(x)=1 \end{array}\right| = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = 0+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Przykład 9.42.

$$\int_2^4 \log_2^2 x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} f'(x)=1, & f(x)=x \\ g(x)=\log_2^2 x & g'(x)=\dfrac{2\log_2 x}{x\ln 2} \end{array}\right| = x\log_2^2 x\Big|_2^4 - \frac{2}{\ln 2}\int_2^4 \log_2 x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} f'(x)=1, & f(x)=x \\ g(x)=\log_2 x & g'(x)=\dfrac{1}{x\ln 2} \end{array}\right| =$$

$$= 4\log_2^2 4 - 2\log_2^2 2 - \frac{2}{\ln 2}\left(x\log_2 x\Big|_2^4 - \frac{1}{\ln 2}\int_2^4 \mathrm{d}x\right) =$$

$$= 16-2-\frac{2}{\ln 2}\left(4\log_2 4 - 2\log_2 2 - \frac{2}{\ln 2}\right) = 14-\frac{2}{\ln 2}\left(8-2-\frac{2}{\ln 2}\right) =$$

$$= 14-\frac{16}{\ln 2}+\frac{4}{\ln^2 2}$$

Twierdzenie 9.43. (Wzór na całkowanie przez podstawienie dla całki oznaczonej) *Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Załóżmy ponadto, że I jest przedziałem o końcach α i β (czyli $I=[\alpha,\beta]$ lub $I=[\beta,\alpha]$), zaś $\phi : I \to [a,b]$ jest funkcją klasy C^1 taką, że $\phi(\alpha)=a$ i $\phi(\beta)=b$. Wtedy*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{9.11}$$

Uwaga 9.44. Wzór (9.11) nazywamy też czasami *wzorem na zamianę zmiennych w całce oznaczonej*.

Przykład 9.45.

$$\int_1^2 x^3 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^2 x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{lll} t = -\dfrac{x^2}{2} & \to & x^2 = -2t \\ \mathrm{d}t = -x\,\mathrm{d}x & \to & x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int_{-\frac{1}{2}}^{-2} (-2t)\mathrm{e}^t(-\,\mathrm{d}t) =$$

$$= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{-2} t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -2\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{ll} f'(t) = \mathrm{e}^t, & f(t) = e^t \\ g(t) = t, & g'(t) = 1 \end{array} \right| =$$

$$= -2\left(t\mathrm{e}^t\Big|_{-2}^{-\frac{1}{2}} - \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \right) = -2\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} + 2\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^t\Big|_{-2}^{-\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= -2\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} + 2\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{e}^{-2} \right) = 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - 6\mathrm{e}^{-2} = \frac{3}{\sqrt{\mathrm{e}}} - \frac{6}{\mathrm{e}^2}$$

9.5. Całki niewłaściwe

Zdefiniowana do tej pory całka Riemanna mogła być określona tylko dla funkcji ograniczonej na przedziale ograniczonym. Z praktycznego punktu widzenia rozważa się także całki niewłaściwe (gdy obszar jest nieograniczony lub gdy funkcja jest nieograniczona). Definicje takich całek można sformułować na bazie całki Riemanna z funkcji ograniczonej na zbiorze ograniczonym.

Definicja 9.46. (Całka niewłaściwa) Niech $-\infty \le a < b < +\infty$ i niech $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Przez *całkę niewłaściwą* funkcji f na przedziale $(a, b]$ rozumiemy granicę

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{h\to a^+} \int_h^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.12}$$

Jeśli granica po prawej stronie istnieje i jest właściwa, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna.

Niech $-\infty < a < b \le +\infty$ i niech $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Przez *całkę niewłaściwą* funkcji f na przedziale $[a, b)$ rozumiemy granicę

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{h\to b^-} \int_h^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.13}$$

Jeśli granica po prawej stronie istnieje i jest właściwa, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna.

Definicja 9.47. Mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest *bezwzględnie zbieżna*, jeśli całka $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna.

Uwaga 9.48. Można pokazać, że jeżeli całka niewłaściwa jest bezwzględnie zbieżna, to jest zbieżna.

Przykład 9.49. Pokażemy, że całka niewłaściwa

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad \begin{cases} \text{jest zbieżna,} & \text{gdy } \alpha < 1, \\ \text{jest rozbieżna,} & \text{gdy } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $\alpha = 1$. Ze wzoru (9.12) mamy

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0^+} \int_h^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0^+} \left(\ln x\Big|_h^1\right) = \lim_{h\to 0^+} (\ln 1 - \ln h) = -\lim_{h\to 0^+} \ln h = +\infty,$$

zatem całka jest rozbieżna.

Niech teraz $\alpha \neq 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0^+} \int_h^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_h^1\right) = \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \lim_{h\to 0^+} h^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Obliczamy granicę

$$\lim_{h\to 0^+} h^{1-\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } 1-\alpha > 0 \\ +\infty, & \text{gdy } 1-\alpha < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \alpha < 1 \\ +\infty, & \text{gdy } \alpha > 1 \end{cases}$$

Stąd ostatecznie wynika

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{gdy } \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{gdy } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Przykład 9.50. Pokażemy, że całka niewłaściwa

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad \begin{cases} \text{jest zbieżna,} & \text{gdy } \alpha > 1, \\ \text{jest rozbieżna,} & \text{gdy } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $\alpha = 1$. Ze wzoru (9.12) mamy

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to+\infty} \int_1^h \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to+\infty} \left(\ln x\Big|_1^h\right) = \lim_{h\to+\infty} (\ln h - \ln 1) = \lim_{h\to+\infty} \ln h = +\infty,$$

zatem całka jest rozbieżna.

Niech teraz $\alpha \neq 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \lim_{h\to+\infty} \int_1^h x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_1^h\right) = \lim_{h\to+\infty} \left(\frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{h\to+\infty} h^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Obliczamy granicę

$$\lim_{h\to+\infty} h^{1-\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } 1-\alpha < 0 \\ +\infty, & \text{gdy } 1-\alpha > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{gdy } \alpha < 1 \end{cases}$$

Stąd ostatecznie wynika

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{gdy } \alpha > 1, \\ +\infty, & \text{gdy } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

ROZDZIAŁ 10

Metody obliczania całek. Zastosowania rachunku całkowego.

10.1. Przegląd typów całek nieoznaczonych i metod całkowania

W tej części przeanalizujemy najczęściej spotykane typy całek i wyjaśnimy sposoby ich obliczania.

10.1.1. Całki z funkcji elementarnych. Niektóre funkcje podcałkowe dadzą się przedstawić jako sumy funkcji elementarnych. W tym przypadku wystarczy skorzystać ze wzorów zebranych w Tabeli 9.1 na stronie 153 i z Twierdzenia 9.15. Rozważmy kilka przykładów.

Przykład 10.1. $\displaystyle\int \frac{(1-2x)^3}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

W tym przypadku wystarczy skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Mamy więc

$$\begin{aligned}
&\int \frac{(3-2x)^3}{x^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \frac{27 - 54x + 36x^2 - 8x^3}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(27x^{-2} - 54x^{-1} + 36 - 8x\right)\,\mathrm{d}x = \\
&= 27\cdot(-1)x^{-1} - 54\ln x + 36x - 8\cdot\frac{1}{2}\,x^2 + C = -\frac{27}{x} - 54\ln x + 36x - 4x^2 + C
\end{aligned}$$

Przykład 10.2. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \left(\frac{x^3+x}{x^2+1} + \frac{2x^2}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{x(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{2(x^2+1)-2}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \left(x + 2 - 2\,\frac{1}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x^2 + 2x - 2\operatorname{arctg} x + C
\end{aligned}$$

Przykład 10.3. $\int \operatorname{ctg}^2 x \, \mathrm{d}x.$

$$\int \operatorname{ctg}^2 x \, \mathrm{d}x = \\ = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x - x + C$$

Przykład 10.4. $\int \frac{x(\sqrt{x} - x^2 \sqrt[3]{x})}{\sqrt[4]{x}} \, \mathrm{d}x.$

$$\int \frac{x(\sqrt{x} - x^2 \sqrt[3]{x})}{\sqrt[4]{x}} \, \mathrm{d}x = \\ = \int \frac{x x^{\frac{1}{2}} - x x^2 x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}} \, \mathrm{d}x = \int \left(x^{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} - x^{2+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} \right) \mathrm{d}x = \int \left(x^{\frac{5}{4}} - x^{\frac{25}{12}} \right) \mathrm{d}x = \\ = \frac{4}{9} x^{\frac{9}{4}} - \frac{12}{37} x^{\frac{37}{12}} + C$$

Przykład 10.5. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-1)(x+1)} \, \mathrm{d}x.$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-1)(x+1)} \, \mathrm{d}x = \\ = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2-1} \, \mathrm{d}x = -\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} \, \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = -\arcsin x + C$$

10.1.2. Całkowanie przez podstawienie. Metoda całkowania przez podstawienie została omówiona w Rozdziale 9.3.2. Polega ona na tym, by przy pomocy podstawienia schematycznie opisanego formułą (9.5) sprowadzić obliczaną całkę do innej prostszej. Omówimy tutaj najbardziej typowe przykłady.

Przykład 10.6. $\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x.$

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ \\ \mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x \quad \to \quad \sin x \, \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} \, (-\mathrm{d}t) = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} =$$

$$= -\ln |t| + C = -\ln |\cos x| + C$$

Przykład 10.7. $\int x^2 e^{x^3} \, \mathrm{d}x.$

$$\int x^2 e^{x^3} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ \\ \mathrm{d}t = 3x^2 \, \mathrm{d}x \quad \to \quad x^2 \, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{3} \, \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int e^t \cdot \frac{1}{3} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{3} \int e^t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{3} \, e^t + C = \frac{1}{3} \, e^{x^3} + C$$

Przykład 10.8. $\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x.$

Najpierw przedstawimy tę całkę jako sumę dwóch całek, z których każdą będziemy obliczali osobno

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x = \int \left(\operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x \right) \, \mathrm{d}x = \int \operatorname{tg} x \left(\operatorname{tg}^2 x + 1 \right) \, \mathrm{d}x - \int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x \tag{10.1}$$

Obliczamy pierwszą całkę

$$\int \operatorname{tg} x \left(\operatorname{tg}^2 x + 1 \right) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = (\operatorname{tg}^2 x + 1) \, \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int t \, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2} \, t^2 + C = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + C$$

Korzystamy z *jedynki trygonometrycznej*

Drugą całkę, która pojawiła się w (10.1) obliczaliśmy już w Przykładzie 10.6. Ostatecznie mamy więc

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C.$$

Przykład 10.9. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^8}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{x^3}{1+x^8}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x^4 \\ \\ \mathrm{d}t = 4x^3\,\mathrm{d}x \quad \to \quad x^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x^4 + C$$

Przykład 10.10. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ \\ \mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C$$

Przykład 10.11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,\mathrm{d}x.$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} t = x^{\frac{3}{4}}+1 \quad \to & x = (t-1)^{\frac{4}{3}} \\ & \mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}\,(t-1)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(t-1)^{\frac{2}{3}}}{t}\cdot\frac{4}{3}\,(t-1)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int \frac{t-1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int \left(1-\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{4}{3}\,(t-\ln t) + C = \frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{4}}+1-\ln(x^{\frac{3}{4}}+1)\right) + C =$$

$$= \frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{4}}-\ln(x^{\frac{3}{4}}+1)\right) + C_1 = \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)\right) + C_1$$

W przedostatniej równości stałą C zastąpiliśmy przez $C_1 = C + \dfrac{4}{3}$

Przykład 10.12. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+2\ln x}}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{lll} t = 1+2\ln x & \to & \ln x = \dfrac{t-1}{2} \\ \mathrm{d}t = \dfrac{2}{x}\,\mathrm{d}x & \to & \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{t-1}{2\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{t-1}{t^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}}\right) + C = \\
&= \frac{1}{6}(1+2\ln x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(1+2\ln x)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{6}\sqrt{(1+2\ln x)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2\ln x} + C
\end{aligned}$$

Przykład 10.13. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \left|\begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x \quad \to \quad x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \\
&= -\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

10.1.3. Całkowanie przez części. Metoda całkowania przez części została zaprezentowana w Rozdziale 9.3.1 na stronie 155. Korzystamy ze wzoru (9.2). Celem jest takie wykorzystanie tego wzoru, by problem obliczenia danej całki sprowadzić do obliczenia całki prostszej. Będziemy używać takiego schematu zapisu jak w (9.3). Zaprezentujemy tutaj kilka najbardziej typowych przykładów.

Przykład 10.14. $\displaystyle\int x^2 2^x\,\mathrm{d}x.$

Wykorzystamy tutaj dwukrotnie wzór na całkowanie przez części.

$$\begin{aligned}
&\int x^2 2^x \,\mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{ll} f'(x) = 2^x & f(x) = \dfrac{2^x}{\ln 2} \\ g(x) = x^2 & g'(x) = 2x \end{array} \right| = \frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \int x 2^x \,\mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{ll} f'(x) = 2^x & f(x) = \dfrac{2^x}{\ln 2} \\ g(x) = x & g'(x) = 1 \end{array} \right| = \frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \left(\frac{x 2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \int 2^x \,\mathrm{d}x \right) = \\
&= \frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{2x 2^x}{\ln^2 2} + \frac{2}{\ln^2 2} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{x 2^{x+1}}{\ln^2 2} + \frac{2^{x+1}}{\ln^3 2} + C
\end{aligned}$$

Przykład 10.15. $\displaystyle\int x^2 \ln^2 x \,\mathrm{d}x.$

Podobnie jak poprzednio, będziemy całkować dwukrotnie przez części.

$$\begin{aligned}
&\int x^2 \ln^2 x \,\mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{ll} f'(x) = x^2 & f(x) = \dfrac{1}{3} x^3 \\ g(x) = \ln^2 x & g'(x) = \dfrac{2 \ln x}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{3} x^3 \ln^2 x - \frac{2}{3} \int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{ll} f'(x) = x^2 & f(x) = \dfrac{1}{3} x^3 \\ g(x) = \ln x & g'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{3} x^3 \ln^2 x - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \,\mathrm{d}x \right) = \\
&= \frac{1}{3} x^3 \ln^2 x - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C = \frac{1}{3} x^3 \ln^2 x - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{27} x^3 + C
\end{aligned}$$

Przykład 10.16. $\displaystyle\int e^{-2x} \cos 3x \,\mathrm{d}x.$

Poniżej będziemy wykorzystywali wzór (9.6).

$$\int e^{-2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} f'(x)=e^{-2x} & f(x)=-\frac{1}{2}\,e^{-2x} \\ g(x)=\cos 3x & g'(x)=-3\sin 3x \end{array}\right| = -\frac{1}{2}\,e^{-2x}\cos 3x - \frac{3}{2}\int e^{-2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} f'(x)=e^{-2x} & f(x)=-\frac{1}{2}\,e^{-2x} \\ g(x)=\sin 3x & g'(x)=3\cos 3x \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 3x - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\,e^{-2x}\sin 3x + \frac{3}{2}\int e^{-2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{4}\,e^{-2x}\sin 3x - \frac{9}{4}\int e^{-2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x$$

Zauważmy, że dwukrotne całkowanie przez części doprowadziło nas z powrotem do całki, od której wyszliśmy. Oczywiście dalsze całkowanie przez części nie ma sensu, bo po prostu "kręcilibyśmy się w kółko". Przepiszmy zatem otrzymaną równość wyróżniając kolorem interesującą nas całkę

$$\int e^{-2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{4}\,e^{-2x}\sin 3x - \frac{9}{4}\int e^{-2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x$$

Zauważmy, że interesująca nas całka jest jedyną nieobliczoną całką, jaka występuje w tej równości. Możemy więc tę równość potraktować jako równanie, w którym niewiadomą jest zaznaczona kolorem całka

$$\int e^{-2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x + \frac{9}{4}\int e^{-2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{4}\,e^{-2x}\sin 3x$$

$$\frac{13}{4}\int e^{-2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{4}\,e^{-2x}\sin 3x$$

Ostatecznie mnożąc obie strony powyższej równości przez $\frac{4}{13}$ otrzymujemy rozwiązanie

$$\int e^{-2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{13}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{13}\,e^{-2x}\sin 3x + C.$$

Przykład 10.17. $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} f'(x) = \sin x & f(x) = -\cos x \\ g(x) = \sin x & g'(x) = \cos x \end{array} \right| = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\sin x \cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right)\,\mathrm{d}x = \sin x \cos x + x - \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie otrzymaliśmy równość

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x,$$

w której interesująca nas całka jest jedyną nieobliczoną całką. Traktujemy tę równość jak równanie

$$2\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + x.$$

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x + C. \tag{10.2}$$

Korzystając ze znanej tożsamości trygonometrycznej

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

powyższy wzór można też zapisać w postaci

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C. \tag{10.3}$$

Przykład 10.18. $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x.$

Analogicznie jak w poprzednim przykładzie obliczamy

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x + C \tag{10.4}$$

lub

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C \tag{10.5}$$

Przykład 10.19. $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{ll} f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & f(x) = -\sqrt{1-x^2} \\ g(x) = x & g'(x) = 1 \end{array} \right| = \\
&= \arcsin x - \left(-x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \right) = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Podobnie jak w Przykładach 10.16 i 10.17 rozwiązujemy równanie

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Otrzymujemy

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2} + C. \tag{10.6}$$

Przykład 10.20. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

Wykorzystamy tutaj wzór (10.6)

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{ll} f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & f(x) = -\sqrt{1-x^2} \\ g(x) = x & g'(x) = 1 \end{array} \right| = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= -x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2} + C = \\
&= \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

Przykład 10.21. $\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x.$

Tę całkę obliczymy łącząc metodę całkowania przez części z całkowaniem przez podstawianie.

$$\begin{aligned}
&\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{ll} f'(x) = 1 & f(x) = x \\ g(x) = \operatorname{arctg} x & g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{l} t = 1 + x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x \, \mathrm{d}x \quad \to \quad x \, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} \mathrm{d}t \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \\
&= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |t| + C = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C
\end{aligned}$$

Przykład 10.22. $\int \sin(\ln x) \, \mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}
&\int \sin(\ln x) \, \mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{ll} f'(x) = 1 & f(x) = x \\ g(x) = \sin(\ln x) & g'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x} \end{array} \right| = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) \, \mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{ll} f'(x) = 1 & f(x) = x \\ g(x) = \cos(\ln x) & g'(x) = -\dfrac{\sin(\ln x)}{x} \end{array} \right| = \\
&= x \sin(\ln x) - \left(x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) \, \mathrm{d}x \right) = \\
&= x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Postępując podobnie jak w Przykładach 10.16 i 10.17 otrzymujemy

$$\int \sin(\ln x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x \sin(\ln x) - \frac{1}{2} x \cos(\ln x) + C.$$

10.1.4. Całkowanie funkcji wymiernych. Przypomnijmy, że *wielomianem* stopnia n, gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nazywamy funkcję postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ i $a_n \neq 0$. Stopień wielomianu oznaczamy symbolem $\deg W$.

Funkcją wymierną nazywamy funkcję postaci

$$f(x) = \frac{W(x)}{Q(x)},$$

gdzie W i Q są wielomianami.

W tym rozdziale chcemy opisać metodę obliczania całek $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, gdzie f jest funkcją wymierną.

10.1.4.1. *Twierdzenie o dzieleniu wielomianów z resztą.* Zastosowanie znajdzie tutaj następujące twierdzenie

Twierdzenie 10.23. (Twierdzenie o dzieleniu wielomianów z resztą) *Niech W i Q będą niezerowymi wielomianami, przy czym $\deg Q \geq 1$. Wtedy istnieją jednoznacznie określone wielomiany P i R spełniające następujące warunki:*

(1) $\deg R < \deg Q$,
(2) $W(x) = P(x)Q(x) + R(x)$

Opisane w powyższym twierdzeniu wielomiany P i R nazywamy odpowiednio wynikiem i resztą z dzielenia wielomianu W przez wielomian Q. Wielomiany te można wyznaczyć poznaną w szkole procedurą *dzielenia pisemnego* wielomianów. Z twierdzenia tego wynika, że dla dowolnej funkcji wymiernej $f(x) = \dfrac{W(x)}{Q(X)}$ istnieją jednoznacznie określone wielomiany P i R takie, że

$$f(x) = P(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \qquad \text{gdzie } \deg R < \deg Q.$$

Oznacza to, że

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int P(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Ponieważ całkę z wielomianu P możemy łatwo obliczyć stosując bezpośrednio wzory z Tabeli 9.1, problem obliczenia całki z dowolnej funkcji wymiernej można sprowadzić do przypadku funkcji $f(x) = \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, gdzie $\deg R < \deg Q$.

Przykład 10.24. Rozważmy funkcję $f(x) = \dfrac{x^5 + 2x^4 - 3x^2 - 2x - 3}{x^3 - 3x - 2}$.

Zastosujemy procedurę dzielenia pisemnego.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr}
 & x^2 & + & 2x & + & 1 & & & & & & & & & \\
\hline
 & x^5 & + & 2x^4 & - & 2x^3 & - & 3x^2 & - & 2x & - & 3 & : & x^3 & -3x-2 \\
- & x^5 & & & + & 3x^3 & + & 2x^2 & & & & & & & \\
\hline
= & & & 2x^4 & + & x^3 & - & x^2 & - & 2x & - & 3 & & & \\
 & & - & 2x^4 & & & + & 6x^2 & + & 4x & & & & & \\
\hline
 & & = & & & x^3 & + & 5x^2 & + & 2x & - & 3 & & & \\
 & & & & - & x^3 & & & + & 3x & + & 2 & & & \\
\hline
 & & & & = & & & 5x^2 & + & 5x & - & 1 & & &
\end{array}
$$

Mamy zatem

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 + \frac{5x^2 + 5x - 1}{x^3 - 3x - 2},$$

czyli

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int (x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x + \int \frac{5x^2 + 5x - 1}{x^3 - 3x - 2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \int \frac{5x^2 + 5x - 1}{x^3 - 3x - 2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

O tym jak całkować funkcje $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, gdzie $\deg R < \deg Q$, będziemy mówić w dalszych częściach tego rozdziału.

10.1.4.2. *Rozkład wielomianu na czynniki nierozkładalne.* Przypomnijmy, że zbiór wielomianów z działaniami dodawania i mnożenia wielomianów ma bardzo podobne własności do zbioru liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Podobnie jak w przypadku liczb całkowitych definiujemy relację podzielności wielomianów:

Wielomian W jest podzielny przez Q, jeśli istnieje wielomian P taki, że $W(x) = P(x)Q(x)$.

Również podobnie jak w przypadku liczb całkowitych możemy mówić o dzieleniu z resztą (patrz Twierdzenie 10.23).

Omówimy teraz jeszcze jedną wspólną własność liczb całkowitych i wielomianów. Przypomnijmy definicję liczby pierwszej.

Liczba naturalna $p \geq 2$ jest *pierwsza*, jeśli nie istnieją liczby naturalne m, n różne od p i takie, że $p = mn$.

Przypomnijmy też

Twierdzenie 10.25. (Podstawowe twierdzenie arytmetyki) *Każdą liczbę naturalną $n \geq 2$ można przedstawić jednoznacznie w postaci iloczynu liczb pierwszych.*

Innymi słowy: dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ istnieje dokładnie jeden układ liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_k$ takich, że $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ i dokładnie jeden układ liczb naturalnych $m_1, m_2, \ldots, m_k$ takie, że

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}.$$

Powyższe przedstawienie nazywamy też *rozkładem liczby n na czynniki pierwsze*.

Podobne pojęcia można zdefiniować dla wielomianów.

Wielomian W, gdzie $\deg W \geq 0$, nazywamy *wielomianem nierozkładalnym*, jeśli nie istnieją wielomiany P i Q stopni mniejszych niż stopień wielomianu W takie, że $W(x) = P(x)Q(x)$.

Można wykazać, że wielomianami nierokładalnymi są następujące wielomiany:

(1) funkcje liniowe postaci

$$x - a, \tag{10.7}$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$,

(2) funkcje kwadratowe postaci

$$x^2 + bx + c, \tag{10.8}$$

gdzie $b, c \in \mathbb{R}$ oraz $\Delta = b^2 - 4c < 0$.

Twierdzenie 10.26. (Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki nierozkładalne) *Każdy wielomian W taki, że $\deg W \geq 1$, można przedstawić jednoznacznie w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych.*

Wniosek 10.27. *Dla każdego wielomianu W takiego, że $\deg W \geq 1$, istnieją jednoznacznie określone:*

- *liczby naturalne k, l,*
- *różne liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_k$,*
- *różne pary liczb rzeczywistych $(b_1, c_1), (b_2, c_2), \ldots, (b_l, c_l)$ takie, że $b_j^2 - 4c_j < 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, l$,*

- *liczby naturalne* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *i* $m_1, m_2, \ldots, m_l$

takie, że

$$W(x) = a(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ldots(x-a_k)^{n_k}(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}\ldots(x^2+b_lx+c_l)^{m_l}.$$

Liczba n_i zwana jest *krotnością* pierwiastka a_i.

W dalszym ciągu będzie dla nas ważna umiejętność efektywnego wyznaczania rozkładu danego wielomianu na czynniki nierozkładalne. Z wyznaczaniem czynników liniowych sprawa jest w miarę prosta. Użyteczne jest tutaj poznane w szkole twierdzenie Bezout.

Twierdzenie 10.28. (Bezout) *Wielomian W jest podzielny przez $x-a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(a)=0$.*

Z tego twierdzenia wynika, że czynniki liniowe znajdziemy rozwiązując równanie $W(x)=0$. W tym zadaniu pomocne bywa następujące

Twierdzenie 10.29. (Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych) *Niech $W(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są liczbami całkowitymi. Załóżmy, że $W\left(\frac{k}{l}\right) = 0$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ i ułamek $\frac{k}{l}$ jest nieskracalny. Wtedy k jest dzielnikiem liczby a_0, zaś l jest dzielnikiem liczby a_n.*

Załóżmy teraz, że mamy dany wielomian W i chcemy go rozłożyć na czynniki nierozkładalne. Możliwe są następujące przypadki:

(1) $\deg W = 1$.
Wielomian W jest liniowy, a więc sam jest już nierozkładalny.

(2) $\deg W = 2$.
Wielomian W jest funkcją kwadratową $W(x) = ax^2+bx+c$. Obliczamy wyróżnik Δ.
   (a) Jeśli $\Delta > 0$, to $W(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, gdzie x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami funkcji kwadratowej W. W jest więc iloczynem dwóch czynników typu (10.7).
   (b) Jeśli $\Delta = 0$, to $W(x) = a(x-x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem podwójnym funkcji kawadratowej W. W jest kwadratem czynnika nierozkładalnego typu (10.7)
   (c) Jeśli $\Delta < 0$, to W nie da się rozłożyć na czynniki liniowe. W jest więc wielokrotnością czynnika nierozkładalnego typu (10.8).

(3) $\deg W \geq 3$.
W tym przypadku próbujemy znaleźć pierwiastki wielomianu W wykorzystując Twierdzenie (10.29). Jeśli znajdziemy w ten sposób przynajmniej jeden pierwiastek a, możemy zredukować stopień wielomianu W dzieląc go przez czynnik liniowy $x - a$ (por. Twierdzenie (10.28). Dla tak zredukowanego wielomianu powtarzamy powyższą procedurę tak długo, aż otrzymamy wielomian nierozkładalny.

Przykład 10.30. Rozłożymy na czynniki nierozkładalne wielomian

$$W(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24.$$

Z Twierdzenia 10.29 wynika, że jeśli W ma pierwiastek wymierny, to jest on elementem zbioru dzielników liczby 24: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$. Sprawdzamy czy kolejne liczby z tego zbioru nie są pierwiastkami wielomianu W do momentu, gdy natrafimy na jakiś pierwiastek lub gdy stwierdzimy, że żadna liczba z tego zbioru nie jest pierwiastkiem:

$$\begin{aligned} W(1) &= 1 - 3 - 10 + 24 = 12 \neq 0 \\ W(-1) &= -1 - 3 + 10 + 24 = 30 \neq 0 \\ W(2) &= 8 - 12 - 20 + 24 = 0 \end{aligned}$$

Znaleźliśmy pierwszy pierwiastek $a_1 = 2$. Dzielimy teraz wielomian W przez $x - 2$:

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & -x & -12 & \\ \hline x^3 & -3x^2 & -10x+24 & : \quad x-2 \\ -x^3 & +2x^2 & & \\ \hline = - & x^2 & -10x+24 & \\ & x^2 & -2x+24 & \\ \hline & = - & 12x+24 & \\ & & 12x-24 & \\ \hline & & = & \end{array}$$

Wnioskujemy, że $W(x) = (x-2)(x^2 - x - 12)$. Zajmujemy się teraz rozkładem wielomianu $W_1(x) = x^2 - x - 12$. Jest to funkcja kwadratowa, dla której $\Delta = 49$. Ma ona dwa pierwiastki: -3 i 4, czyli $W_1(x) = (x+3)(x-4)$. Oznacza to, że ostatecznie

$$W(x) = (x-2)(x+3)(x-4).$$

Przykład 10.31. Rozłóżmy na czynniki nierozkładalne wielomian

$$W(x) = x^4 - 7x^2 + 4x + 20.$$

Szukamy pierwiastków wśród dzielników liczby 20: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$:

$$\begin{aligned}
W(1) &= 1 - 7 + 4 + 20 = 18 \neq 0 \\
W(-1) &= 1 - 7 - 4 + 20 = 10 \neq 0 \\
W(2) &= 16 - 28 + 8 + 20 = 16 \neq 0 \\
W(-2) &= 16 - 28 - 8 + 20 = 0
\end{aligned}$$

Ponieważ -2 jest pierwiastkiem wielomianu W, dzielimy W przez $x + 2$:

$$\begin{array}{rrrrrl}
x^3 & -2x^2 & -\ 3x & +\ 10 & & \\
\hline
x^4 & & -7x^2 & +\ 4x & +20 & :\ x+2 \\
-x^4 & -2x^3 & & & & \\
\hline
= & -2x^3 & -7x^2 & +\ 4x & +20 & \\
 & 2x^3 & +4x^2 & & & \\
\hline
 & = & -3x^2 & +\ 4x & +20 & \\
 & & 3x^2 & +\ 6x & & \\
\hline
 & & = & 10x & +20 & \\
 & & & -10x & -20 & \\
\hline
 & & & & = &
\end{array}$$

Mamy zatem

$$W(x) = (x + 2)(x^3 - 2x^2 - 3x + 10).$$

Zajmujemy się teraz rozkładem wielomianu $W_1(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10$. Szukamy miejsc zerowych wśród dzielników liczby 10: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$:

$$\begin{aligned}
W(1) &= 1 - 2 - 3 + 10 = 6 \neq 0 \\
W(-1) &= -1 - 2 + 3 + 10 = 10 \neq 0 \\
W(2) &= 8 - 8 - 6 + 10 = 4 \neq 0 \\
W(-2) &= -8 - 8 + 6 + 10 = 0
\end{aligned}$$

Wielomian W_1 dzielimy przez $x+2$:

$$\begin{array}{rl} x^2-\ 4x+\ 5 & \\ \hline x^3-2x^2-3x+10 & :\ \ x+2 \\ -x^3-2x^2 & \\ \hline =-4x^2-3x+10 & \\ \ \ 4x^2+8x & \\ \hline =\ \ 5x+10 & \\ \ \ -5x-10 & \\ \hline =\ \ \ \ \ \ \ \ & \end{array}$$

Mamy więc

$$W_1(x) = (x+2)(x^2-4x+5),$$

a w konsekwencji

$$W(x) = (x+2)^2(x^2-4x+5).$$

Trójmian x^2-4x+5 jest nierozkładalny, bo $\Delta = -4$. Oznacza to, że ostatnia równość wyznacza rozkład wielomianu W na czynniki nierozkładalne.

Przykład 10.32. Rozłożymy na czynniki nierozkładalne wielomian

$$W(x) = x^4 + 1.$$

Ponieważ $W(x) \geq 1 > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to W nie ma żadnych pierwiastków rzeczywistych. Oznacza to, że w rozkładzie na czynniki nierozkładalne nie wystąpi żaden czynnik liniowy. Z analizy stopni wynika, że w rozkładzie tym wystąpią dwa (różne lub jednakowe) nierozkładalne czynniki kwadratowe. W celu ich wyznaczenia posłużymy się wzorami skróconego mnożenia

$$\begin{aligned} W(x) &= (x^4+2x^2+1)-2x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2 = (x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x) \\ &= (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1) \end{aligned}$$

Obliczając wyróżniki dla obu otrzymanych funkcji kwadratowych stwierdzamy, że są one nierozkładalne.

10.1.4.3. *Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste.* Chcąc scałkować funkcję wymierną będziemy się starali przedstawić ją jako sumę pewnych funkcji specjalnej postaci, których całki są znane. Takimi specjalnymi funkcjami wymiernymi są tzw. *ułamki proste*. Są to funkcje postaci

$$\frac{1}{(x-a)^n}, \qquad n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}, \tag{10.9}$$

oraz

$$\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \ \begin{cases} b, c \in \mathbb{R}, \\ b^2 - 4c < 0. \end{cases} \tag{10.10}$$

Znaczenie ułamków prostych wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 10.33. (Twierdzenie o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste) *Niech R i Q będą pewnymi wielomianami takimi, że R i Q nie mają wspólnych dzielników stopnia większego niż 1 oraz $\deg R < \deg Q$. Załóżmy ponadto, że*

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_k)^{n_k}(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}\dots(x^2+b_lx+c_l)^{m_l}$$

dla pewnych $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_l, c_1, c_2, \dots, c_l \in \mathbb{R}$ takich, że $b_j^2 < 4c_j$ dla $j = 1, 2, \dots, l$, oraz $n_1, n_2, \dots, n_k, m_1, m_2, \dots, m_l \in \mathbb{N}$. Wtedy istnieją jednoznacznie określone

(1) *liczby rzeczywiste A_{ip} określone dla każdej pary (i, p) liczb naturalnych takich, że $1 \le i \le k$ i $1 \le p \le n_i$,*
(2) *liczby rzeczywiste B_{jq} i C_{jq} określone dla każdej pary (j, q) liczb naturalnych takich, że $1 \le j \le l$ i $1 \le q \le m_i$,*

dla których zachodzi równość

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{p=1}^{n_i}\frac{A_{ip}}{(x-a_i)^p} + \sum_{j=1}^{l}\sum_{q=1}^{m_j}\frac{B_{ip}x+C_{ip}}{(x^2+b_jx+c_j)^q} \tag{10.11}$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że każdą funkcję wymierną $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, gdzie $\deg R < \deg Q$, da się przedstawić jako sumę ułamków prostych. Co więcej, twierdzenie to określa, jak te ułamki proste będą wyglądały. Mianowniki tych ułamków są ściśle związane z czynnikami nierozkładalnymi występującymi w rozkładzie wielomianu Q. Współczynniki A_{ip}, B_{jq} i C_{jq} będziemy wyznaczać rozwiązując odpowiedni układ równań liniowych.

Przykład 10.34. Rozłożymy na ułamki proste funkcję wymierną

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3x-10}.$$

Najpierw rozkładamy mianownik na czynniki nierozkładalne

$$x^2+3x-10 = (x+5)(x-2).$$

Stosujemy teraz Twierdzenie 10.33. Zauważmy, że $k = 2$ i $l = 0$. Ponadto $a_1 = -5$ i $a_2 = 2$. Oba pierwiastki są jednokrotne, czyli $n_1 = n_2 = 1$. Z Twierdzenia 10.33 wynika zatem, że istnieją liczby A_{11} i A_{21} takie, że

$$f(x) = \frac{A_{11}}{x+5} + \frac{A_{21}}{x-2}.$$

Dla uproszczenia zapisu będziemy pisać A zamiast A_{11} i B zamiast A_{21}. Musimy więc znaleźć współczynniki A i B takie, że

$$\frac{1}{(x+5)(x-2)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2}$$

Przekształcamy prawą stronę sprowadzając oba wyrażenia do wspólnego mianownika.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x+5)(x-2)} &= \frac{A(x-2)+B(x+5)}{(x+5)(x-2)} \\
\frac{1}{(x+5)(x-2)} &= \frac{Ax-2A+Bx+5B}{(x+5)(x-2)} \\
\frac{1}{(x+5)(x-2)} &= \frac{(A+B)x-2A+5B}{(x+5)(x-2)}
\end{aligned}$$

Równość będzie spełniona, jeśli liczniki obu ułamków będą identyczne. Ponieważ oba liczniki są wielomianami, trzeba porównać ich współczynniki. Otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{cases} A+B & = 0 \\ -2A+5B & = 1 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para

$$\begin{cases} A & = -\frac{1}{7} \\ B & = \frac{1}{7} \end{cases}$$

Rozkład funkcji f na ułamki proste jest zatem postaci

$$f(x) = \frac{-\frac{1}{7}}{x+5} + \frac{\frac{1}{7}}{x-2}.$$

Przykład 10.35. Rozłożymy na ułamki proste funkcję

$$f(x) = \frac{5x^2+10x+3}{x^3+3x^2-4}.$$

Rozkładamy mianownik na czynniki nierozkładalne

$$x^3+3x^2-4 = (x-1)(x+2)^2.$$

Mamy tutaj: $k = 2$, $l = 0$, $a_1 = 1$, $n_1 = 1$, $a_2 = -2$, $n_2 = 2$. Z Twierdzenia 10.33 wynika istnienie współczynników A_{11}, A_{21} i A_{22} takich, że

$$f(x) = \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{A_{21}}{x+2} + \frac{A_{22}}{(x+2)^2}.$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie dla prostoty zastąpmy te współczynniki literami A, B i C. Mamy więc

$$\begin{aligned}
\frac{5x^2+10x+3}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \\
\frac{5x^2+10x+3}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2} \\
\frac{5x^2+10x+3}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A(x^2+4x+4) + B(x^2+x-2) + C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2} \\
\frac{5x^2+10x+3}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{(A+B)x^2 + (4A+B+C)x + 4A - 2B - C}{(x-1)(x+2)^2}
\end{aligned}$$

Prowadzi to nas do układu równań

$$\begin{cases} A + B & = 5 \\ 4A + B + C & = 10 \\ 4A - 2B - C & = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu to

$$\begin{cases} A & = 2 \\ B & = 3 \\ C & = -1 \end{cases}$$

Zatem

$$f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}.$$

Przykład 10.36. Rozłożymy na ułamki proste funkcję

$$f(x) = \frac{4x^3+12x^2+10x-4}{x^4+5x^3+10x^2+12x+8}.$$

Rozkładamy mianownik na czynniki nierozkładalne[1]

$$x^4+5x^3+10x^2+12x+8 = (x+2)^2(x^2+x+2).$$

[1] Czytelnik może to potraktować jako ćwiczenie.

Na podstawie Twierdzenia 10.33 istnieją współczynniki[2] A, B, C, D takie, że

$$\frac{4x^3+12x^2+10x-4}{(x+2)^2(x^2+x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+2}$$

Przekształcamy prawą stronę

$$\begin{aligned}
&\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+2} = \\
&= \frac{A(x+2)(x^2+x+2) + B(x^2+x+2) + (Cx+D)(x+2)^2}{(x+2)^2(x^2+x+2)} = \\
&= \frac{(A+C)x^3 + (3A+B+4C+D)x^2 + (4A+B+4C+4D)x + 4A+2B+4D}{(x+2)^2(x^2+x+2)}
\end{aligned}$$

Dostajemy układ równań

$$\begin{cases}
A + C & = 4 \\
3A + B + 4C + D & = 12 \\
4A + B + 4C + 4D & = 10 \\
4A + 2B + 4D & = -4
\end{cases}$$

Rozwiązując go otrzymujemy

$$\begin{cases}
A & = 1 \\
B & = -2 \\
C & = 3 \\
D & = -1
\end{cases}$$

Daje to nam szukany rozkład

$$f(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{3x-1}{x^2+x+2}.$$

10.1.4.4. *Całkowanie ułamków prostych.* Z rozważań w poprzednim paragrafie wynika, że wystarczy znać całki z ułamków prostych, by umieć obliczyć całkę z dowolnej funkcji wymiernej. Z Twierdzenia 10.33 wynika bowiem, że jeśli funkcja wymierna $R(x)Q(x)$ spełnia założenia tego twierdzenia, to

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k}\sum_{p=1}^{n_i} \int \frac{A_{ip}}{(x-a_i)^p}\,\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{l}\sum_{q=1}^{m_j} \int \frac{B_{ip}x + C_{ip}}{(x^2+b_jx+c_j)^q}\,\mathrm{d}x \tag{10.12}$$

Obliczmy zatem całki z ułamków prostych występujących w formule (10.12):

[2]Podobnie jak w poprzednich przykładach stosujemy zapis uproszczony rezygnując ze współczynników z indeksami.

(1) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{x-a}}$.

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t = x-a \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + C = \ln|x-a| + C.$$

(10.13) $$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln|x-a| + C$$

(2) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n}}$, $n \geq 2$.

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t = x-a \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int t^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-n}\,t^{1-n} + C = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$$

(10.14) $$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C, \qquad n \geq 2.$$

(3) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^n}}$, $n \in \mathbb{N}$

Wprowadźmy oznaczenie $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x$. Zauważmy, że

(10.15) $$I_n = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x + I_{n+1}.$$

Obliczmy teraz pomocniczo

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \quad \to \quad x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int t^{-n-1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{2n}\,t^{-n} + C = -\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^n} + C$$

Wykorzystujemy to następującego całkowania przez części

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} f'(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^{n+1}}, & f(x) = -\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{1}{(x^2+1)^n} \\ \\ g(x) = x, & g'(x) = 1 \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{1}{2n}\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{1}{2n}I_n$$

Wracamy teraz do równości (10.15)

$$I_n = -\frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{1}{2n}I_n + I_{n+1}.$$

Przekształcając powyższą równość otrzymujemy następującą zależność rekurencyjną

(10.16)
$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}\,I_n + \frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^n}$$

Możemy teraz obliczyć I_n dla kilku początkowych liczb n:

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{arctg} x + C \\ I_2 &= \frac{1}{2}\,I_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + C \\ I_3 &= \frac{3}{4}\,I_2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + \frac{3}{8}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} + C \\ I_4 &= \frac{5}{6}\,I_3 + \frac{1}{6}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^3} = \\ &= \frac{5}{16}\operatorname{arctg} x + \frac{5}{16}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{5}{24}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Korzystając z formuły rekurencyjnej (10.16) można wyprowadzić następujący wzór ogólny na całkę I_n dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\left(\operatorname{arctg} x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^k}\right) + C. \tag{10.17}$$

(4) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{x^2 + bx + c}}$, gdzie $\Delta = b^2 - 4c < 0$.

Przedstawiamy trójmian kwadratowy z mianownika w postaci kanonicznej

$$x^2 + bx + c = (x-p)^2 + q,$$

gdzie

$$p = -\frac{b}{2}, \qquad q = -\frac{\Delta}{4}. \tag{10.18}$$

Zauważmy, że z założenia $\Delta < 0$ wynika, że $q > 0$. Będziemy całkować przez podstawienie

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \frac{1}{(x-p)^2+q}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{q}\int \frac{1}{\left(\dfrac{x-p}{\sqrt{q}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{x-p}{\sqrt{q}} \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{q}}\,\mathrm{d}x \quad \to \quad \mathrm{d}x = \sqrt{q}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{q}\int \frac{\sqrt{q}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{\sqrt{q}} \operatorname{arctg} t + C = \\
&= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy zatem wzór

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C \tag{10.19}$$

(5) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{Bx + C}{x^2 + bx + c}}$, gdzie $\Delta < 0$

Rozważmy następujące podstawienie

(10.20)
$$\left| \begin{array}{l} t = x^2 + bx + c \\ \mathrm{d}t = (2x + b)\,\mathrm{d}x \quad \rightarrow \quad \left(Bx + \dfrac{Bb}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{B}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right|$$

Prawą równość w dolnym rzędzie otrzymaliśmy mnożąc obie strony lewej równości przez $\dfrac{B}{2}$. Oczywiście na ogół podstawienie to nie wystarcza do obliczenia całki

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x.$$

Możemy jednak przedstawić tę całkę jako sumę

$$J_1 + J_2 = \int \frac{Bx + \frac{Bb}{2}}{x^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x + \int \frac{C - \frac{Bb}{2}}{x^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x$$

Możemy teraz obliczyć całkę J_1 przy pomocy zdefiniowanego wyżej podstawienia

$$J_1 = \frac{B}{2}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{B}{2}\,\ln t + C = \frac{B}{2}\,\ln(x^2 + bx + c) + C.$$

Z kolei obliczenie całki J_2 sprowadzamy do obliczeń zaprezentowanych w punkcie (4).

$$\begin{aligned} J_2 &= \left(C - \frac{Bb}{2}\right)\int \frac{1}{x^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x = \\ &= \left(C - \frac{Bb}{2}\right)\cdot \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\,\mathrm{arctg}\,\left(\frac{2x + b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C = \\ &= \frac{2C - Bb}{\sqrt{-\Delta}}\,\mathrm{arctg}\,\left(\frac{2x + b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy

(10.21)
$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\ln(x^2 + bx + c) + \frac{2C - Bb}{\sqrt{-\Delta}}\,\mathrm{arctg}\,\left(\frac{2x + b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C$$

(6) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^n}}$, gdzie $\Delta < 0$, $n \geq 2$.

Postępujemy podobnie jak w poprzednim punkcie. Przedstawiamy całkę

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^n}\,\mathrm{d}x.$$

jako sumę

$$J_1 + J_2 = \int \frac{Bx + \frac{Bb}{2}}{(x^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x + \int \frac{C - \frac{Bb}{2}}{(x^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x$$

Do obliczenia całki J_1 korzystamy z podstawienia (10.20)

$$J_1 = \frac{B}{2}\int \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = -\frac{B}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{t^{n-1}} + C = -\frac{B}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}} + C.$$

Całkę J_2 przekształcimy do całki I_n z punktu (3) (patrz wzór (10.17) metodą analogiczną do tej zaprezentowanej w (4). Symbole p i q zostały zdefiniowane w (10.18).

$$\begin{aligned}
J_2 &= \left(C - \frac{Bb}{2}\right)\int \frac{1}{((x-p)^2+q)^n}\,\mathrm{d}x = \\
&= \left(C - \frac{Bb}{2}\right)\cdot\frac{1}{q^n}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x-p}{\sqrt{q}}\right)^2+1\right)^n}\,\mathrm{d}x = \\
&= \left|\begin{array}{l} t = \dfrac{x-p}{\sqrt{q}} \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{q}}\,\mathrm{d}x \quad\to\quad \mathrm{d}x = \sqrt{q}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \\
&= \left(C - \frac{Bb}{2}\right)\cdot\frac{1}{q^{n-\frac{1}{2}}}\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t = \\
&= \left(C - \frac{Bb}{2}\right)\cdot\frac{1}{q^{n-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\left(\operatorname{arctg} t + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\cdot\frac{t}{(t^2+1)^k}\right) + C = \\
&= (2C - Bb)\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\times \\
&\quad\times\left(4^{n-1}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\cdot\frac{4^{n-k-1}}{(-\Delta)^{n-k}}\cdot\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}\right)
\end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór:

$$(10.22)\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{B}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}} +$$
$$+(2C-Bb)\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\times$$
$$\times\left(4^{n-1}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\cdot\frac{4^{n-k-1}}{(-\Delta)^{n-k}}\cdot\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}\right)$$

10.1.4.5. *Całkowanie dowolnych funkcji wymiernych - przykłady.* Na kilku przykładach omówimy teraz procedurę całkowania funkcji wymiernych.

Przykład 10.37. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x.$

I sposób. Obliczamy wyróżnik dla trójmianu kwadratowego z mianownika: $\Delta=-16$. Ponieważ $\Delta<0$, to mianownik jest wielomianem nierozkładalnym.
Wyznaczamy postać kanoniczną mianownika:

$$x^2+2x+5=(x^2+2x+1)+4=(x+1)^2+4=4\cdot\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]$$

Rozważamy podstawienie:

$$\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{x+1}{2} \\ \mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x \quad\to\quad \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t \end{array}\right|$$

Korzystając z powyższych rachunków obliczamy całkę

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\cdot 2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

II sposób. Korzystamy z gotowego wzoru (10.19):

$$b=2,\qquad \sqrt{-\Delta}=\sqrt{16}=4.$$

Zatem

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+2}{4}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Przykład 10.38. $\displaystyle\int \frac{x-4}{x^2-6x+5}\,\mathrm{d}x$

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego z mianownika: $\Delta = 16$. Ponieważ $\Delta > 0$, możemy ten trójmian przedstawić w postaci iloczynowej. W tym celu obliczamy pierwiastki: 1 i 5. Stąd wynika, że

$$x^2-6x+5 = (x-1)(x-5).$$

Ponieważ stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika, z Twierdzenia 10.33 wynika, że

$$\frac{x-4}{(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5} \tag{10.23}$$

dla pewnych stałych A i B.
Sprowadzamy prawą stronę do wspólnego mianownika:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(x-1)}{(x-1)(x-5)} = \frac{Ax-5A+Bx-B}{(x-1)(x-5)} = \frac{(A+B)x-5A-B}{(x-1)(x-5)}$$

Porównanie tego z lewą stroną w (10.23) prowadzi nas do układu równań

$$\begin{cases} A+B & = 1 \\ -5A-B & = -4 \end{cases}$$

Rozwiązując go otrzymujemy: $A = \dfrac{3}{4}$, $B = \dfrac{1}{4}$.
Stąd

$$\frac{x-4}{x^2-6x+5} = \frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x-5}.$$

Korzystając z tego i ze wzoru (10.13) otrzymujemy

$$\int \frac{x-4}{x^2-6x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-5}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x-5| + C.$$

Przykład 10.39. $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x$

Wyłaczając w mianowniku wspólny czynnik przed nawias doprowadzamy go do postaci

$$x^3-x^2 = x^2(x-1),$$

która określa rozkład mianownika na czynniki nierozkładalne. Z Twierdzenia 10.33 wynika, że

$$\frac{2x^2+x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \tag{10.24}$$

dla pewnych stałych A, B, C.

Sprowadzamy prawą stronę do wspólnego mianownika:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}=\frac{(A+C)x^2+(-A+B)x-B}{x^2(x-1)}$$

Prównanie z prawą stroną w (10.24) prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} A+C & =2\\ -A+B & =1\\ -B & =1 \end{cases}$$

Rozwiązując go otrzymujemy: $A=-2$, $B=-1$, $C=4$.
Z tego i ze wzorów (10.13) i (10.14) wynika

$$\begin{aligned}&\int\frac{2x^2+x+1}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x=\\ &=\ -2\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x+4\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=-2\ln|x|+\frac{1}{x}+4\ln|x-1|+C.\end{aligned}$$

Przykład 10.40. $\displaystyle\int\frac{x^5+2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x.$

Ponieważ stopień licznika jest większy od stopnia mianownika, wykonujemy dzielenie z resztą. Można to zrobić pisemnie lub przekształcając licznik

$$\frac{x^5+2}{x^4-1}=\frac{x^5-x+x+2}{x^4-1}=\frac{x(x^4-1)}{x^4-1}+\frac{x+2}{x^4-1}=x+\frac{x+2}{x^4-1}.$$

Stąd mamy

$$\int\frac{x^5+2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}x+\int\frac{x+2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,x^2+\int\frac{x+2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x. \tag{10.25}$$

Musimy się teraz zająć całką $\displaystyle\int\frac{x+2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$.
Rozkładamy mianownik na czynniki nierozkładalne. Najlepiej zrobić to korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:

$$x^4-1=(x^2)^2-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Z Twierdzenia 10.33 wynika, że

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1} \tag{10.26}$$

dla pewnych stałych A, B, C, D.

Sprowadzamy prawą stronę do wspólnego mianownika

$$\begin{aligned}
&\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}= \\
&= \frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}= \\
&= \frac{A(x^3+x^2+x+1)+B(x^3-x^2+x-1)+Cx^3+Dx^2-Cx-D}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}= \\
&= \frac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+A-B-D}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}
\end{aligned}$$

Porównanie tego z lewą stroną w (10.26) prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} A+B+C &= 0 \\ A-B+D &= 0 \\ A+B-C &= 1 \\ A-B-D &= 2 \end{cases}$$

Rozwiązując go otrzymujemy: $A=\frac{3}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=-\frac{1}{2}$, $D=-1$
Z (10.26) wynika zatem, że

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x+2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x= \\
&= \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x+\int \frac{-\frac{1}{2}x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x= \\
&= \frac{3}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+C.
\end{aligned}$$

W ostatniej równości pierwsza i druga całka została obliczona na podstawie wzoru (10.13), zaś trzecia – ze wzoru (10.21).
Ostatecznie, uwzględniając (10.25) otrzymujemy

$$\int \frac{x^5+2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+C.$$

Przykład 10.41. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^5-4x^4+4x^3}\,\mathrm{d}x.$

Wyłączając wspólny czynnik przed nawias i korzystając ze wzoru skróconego mnożenia rozkładamy mianownik na czynniki nierozkładalne.

$$x^5-4x^4+4x^3=x^3(x^2-4x+4)=x^3(x-2)^2.$$

Z Twierdzenia 10.33 wynika, że

$$\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2} \tag{10.27}$$

dla pewnych stałych A, B, C, D, E.

Sprowadzamy prawą stronę do wspólnego mianownika

$$\begin{aligned}
&\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2} = \\
&= \frac{Ax^2(x-2)^2 + Bx(x-2)^2 + C(x-2)^2 + Dx^3(x-2) + Ex^3}{x^3(x-2)^2} = \\
&= \frac{A(x^4-4x^3+4x^2) + B(x^3-4x^2+4x) + C(x^2-4x+4) + D(x^4-2x^3) + Ex^3}{x^3(x-2)^2} = \\
&= \frac{(A+D)x^4 + (-4A+B-2D+E)x^3 + (4A-4B+C)x^2 + (4B-4C)x + 4C}{x^3(x-2)^2}
\end{aligned}$$

Porównując to z lewą stroną w (10.27) otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases}
A + D & = 0 \\
-4A + B - 2D + E & = 1 \\
4A - 4B + C & = -2 \\
4B - 4C & = 0 \\
4C & = 4
\end{cases}$$

Rozwiązaniem jest układ liczb: $A = \frac{1}{4}$, $B = 1$, $C = 1$, $D = -\frac{1}{4}$, $E = \frac{1}{2}$.

Ostatecznie, korzystając z wzorów (10.13) i (10.14) otrzymujemy

$$\frac{x^3-2x^2+4}{x^5-4x^4+4x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{2(x-2)} + C.$$

ROZDZIAŁ 11

Funkcje wielu zmiennych

11.1. Przestrzeń euklidesowa

Przypomnijmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ symbolem $\mathbb{R}^n$ oznaczaliśmy zbiór, którego elementami są ciągi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o ustalonej długości n. Wyrazami tych ciągów są liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$. W Przykładzie 2.8 opisaliśmy przypadek, gdy $n = 2$ i zauważyliśmy, że zbiór $\mathbb{R}^2$ można utożsamiać ze płaszczyzną wyposażoną w prostokątny układ współrzędnych złożony z dwóch prostopadłych osi liczbowych takich, że ich punkt wspólny jest zerem na obu osiach. Z kolei w Przykładzie 2.17 pokazaliśmy, że zbiór $\mathbb{R}^3$ można utożsamiać z przestrzenią, w której mamy układ współrzędny złożony z trzech wzajemnie prostopadłych osi liczbowych. Dla $n = 2$ i $n = 3$ zbiór $\mathbb{R}^n$ ma zatem przejrzystą interpretację geometryczną: dla $n = 2$ jest to płaszczyzna – obiekt dwuwymiarowy, zaś dla $n = 3$ jest to przestrzeń, czyli obiekt trójwymiarowy.

Przez analogię, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, będziemy traktowali zbiór $\mathbb{R}^n$ także jako obiekt geometryczny, który nazywamy *n-wymiarową przestrzenią euklidesową*. Elementy tego zbioru czyli ciągi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ będziemy sobie wyobrażali jako punkty w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Podobnie jak dla przypadku dwu- i trójwymiarowego możemy też w tej przestrzeni uprawiać geometrię, np. możemy mierzyć odległości, pola powierzchni, objętość i jej n-wymiarowy odpowiednik, itp.

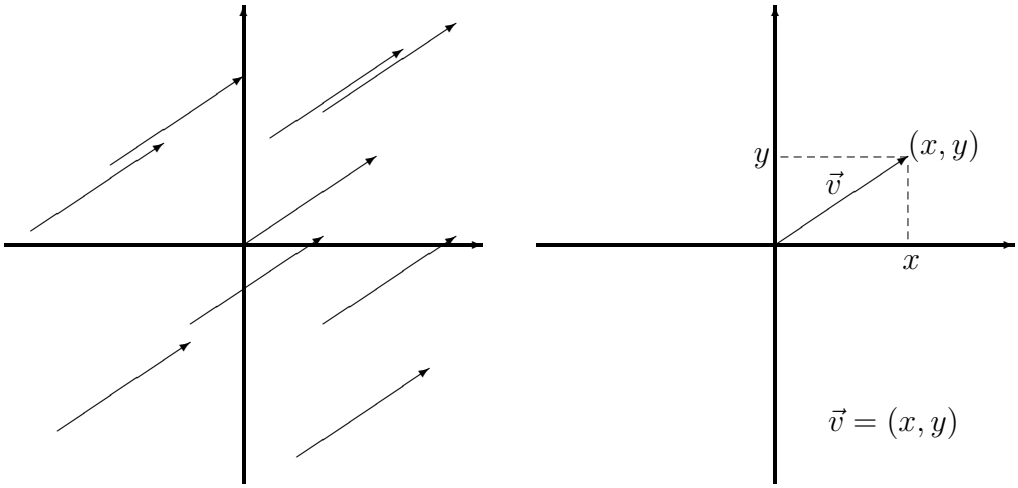
Analizę własności przestrzeni $\mathbb{R}^n$ rozpoczniemy jednak od obserwacji, jej elementy możemy też rozpatrywać jako (ougólnione) wektory.

11.1.1. Przestrzeń euklidesowa jako przestrzeń wektorowa. W trakcie nauki szkolnej zetknęliśmy się z pojęciem wektora, jako obiektu, który ma cztery cechy:

- punkt przyłożenia (początek),
- kierunek,
- zwrot,
- długość.

W fizyce takie wielkości jak siła, prędkość, przyspieszenie, pęd czy moment pędu opisujemy właśnie wektorami.

W matematyce często rozważamy pojęcie *wektora swobodnego*, jako rodzinę wszystkich wektorów, które mają takie same (równoległe) kierunki, zwroty i długości.



Reprezentantem wektora swododnego, jest ten jedyny wektor z całej rodziny, którego początkiem jest punkt zerowy. Zauważmy, że wtedy ten wektor jest wyznaczony jednoznacznie przez jego punkt końcowy. Chcąc zatem jednoznacznie opisać wektor swobodny wystarczy podać współrzędne końca tego jedynego wektora-reprezentanta, którego początkiem jest punkt zerowy.

Analogicznie postępujemy w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Każdy element $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tej przestrzeni możemy interpretować jako punkt końcowy wektora, którego początkiem jest punkt zerowy $(0, 0, \ldots, 0)$. Ten zaś wektor traktujemy jako reprezentant wektora swobodnego.

Pamiętajmy zatem:

Każdy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ możemy interpretować na dwa sposoby[1]:

(1) jako punkty przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$,

(2) jako n-wymiarowe wektory (swobodne).

11.1.2. Działania na wektorach. Przypomnijmy, że wektory są obiektami, które możemy do siebie dodawać i które możemy mnożyć przez liczby.

Definicja 11.1. Niech $x, y \in \mathbb{R}^n$, gdzie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) *Sumą wektorów* x i y nazywamy wektor

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

(2) *Iloczynem wektora x przez liczbę α* nazywamy wektor

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Dodawanie wektorów i mnożenie wektorów przez liczby mają następujące własności:

Twierdzenie 11.2. (1) *Przemienność dodawania wektorów*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n :\ x + y = y + x,$$

(2) *Łączność dodawania wektorów*

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n :\ (x + y) + z = x + (y + z),$$

(3) *Element neutralny dodawania*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n :\ x + \theta = x = \theta + x,$$

gdzie $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$;

(4) *Elementy przeciwne ze względu na dodawanie*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n\ \exists\, -x \in \mathbb{R}^n :\ x + (-x) = \theta = (-x) + x,$$

(5) *Mieszana łączność mnożenia liczb i mnożenia wektorów przez liczby*

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n :\ (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x),$$

(6) *Rozdzielność mnożenia wektorów przez liczby względem dodawania wektorów*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R} :\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$$

(7) *Rozdzielność mnożenia wektorów przez liczby względem dodawania liczb*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} :\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y,$$

(8) *Neutralny mnożnik wektorów*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n :\ 1x = x.$$

Uwaga 11.3. Wektor $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$, o którym mowa w punkcie (3) nazywamy *wektorem zerowym*. W sytuacjach, gdy nie będzie budziło to nieporozumień, będziemy go oznaczali jako 0 zamiast θ. Trzeba będzie jednak pamiętać, że w tym wypadku symbol 0 nie oznacza liczby zero, tylko wektor[2].

[2]Podobnie jest z symbolem dodawania wektorów. Używamy tego samego znaku $+$, który zwyczajowo oznacza dodawanie liczb. Tutaj jednak oznacza on inne działanie (mimo, że też zwane „dodawaniem") określone na zupełnie innych obiektach – wektorach, a nie na liczbach.

Uwaga 11.4. Wektor $-x$, o którym mowa w punkcie (5) określamy formułą

$$-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n).$$

Można wykazać, że jest to jedyne określenie wektora $-x$, które gwarantuje zachodzenie warunku (3). W celu uproszczenia notacji piszemy $x - y$ zamiast $x + (-y)$.

Z powyższych własności można wywnioskować kolejne

Twierdzenie 11.5. *Niech $x, y \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy*

(1) $0x = \theta$,
(2) $\alpha(-x) = -\alpha x$,
(3) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$,
(4) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$.

Przykład 11.6. Niech $n = 3$. Rozważmy wektory

$$x = (-2, 0, 3), \quad y = \left(-\frac{3}{2}, 2, -1\right), \quad z = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Obliczamy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}x - 2y + 3z = \\
&= \frac{1}{2}(-2, 0, 3) - 2\left(-\frac{3}{2}, 2, -1\right) + 3\left(1, \frac{1}{2}, 0\right) = \\
&= \left(-1, 0, \frac{3}{2}\right) - (-3, 4, -2) + \left(3, \frac{3}{2}, 0\right) = \\
&= \left(-1 + 3 + 3, -4 + \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + 2\right) = \left(5, -\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)
\end{aligned}$$

Przypomnijmy jeszcze następujące pojęcie, o którym szerzej będzie mowa na zajęciach z Algebry Liniowej.

Definicja 11.7. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. *Kombinacją liniową* wektorów $x_1, x_2, \ldots, x_m$ o współczynnikach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ nazywamy wektor

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m.$$

11.1.3. Iloczyn skalarny, długość wektorów i odległość w przestrzeni euklidesowej. Dla dowolnych wektorów $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiujemy ich *iloczyn skalarny* $x \circ y$ wzorem

$$x \circ y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n, \tag{11.1}$$

gdzie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Własności iloczynu skalarnego opisuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 11.8. *Niech $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy*

(1) $x \circ x \geq 0$ *oraz* $x \circ x = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(2) $(\alpha x) \circ y = \alpha(x \circ y)$,
(3) $(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$,
(4) $x \circ y = y \circ x$.

Dla dowolnego wektora $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ możemy teraz zdefiniować jego *długość* wzorem

$$\|x\| = \sqrt{x \circ x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \tag{11.2}$$

Między iloczynem skalarnym a długością wektorów istnieje fundamentalny związek wyrażający się następującą nierównością

Twierdzenie 11.9. (Nierówność Schwartza) *Niech $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wtedy*

$$|x \circ y| \leq \|x\|\|y\|. \tag{11.3}$$

Wniosek 11.10. *Dla każdych niezerowych wektorów $x, y \in \mathbb{R}^n$ istnieje jednoznacznie określona liczba $\vartheta \in [0, \pi]$ taka, że*

$$x \circ y = \|x\|\|y\| \cos \vartheta.$$

Uwaga 11.11. Liczbę ϑ, o której mowa w powyższym wniosku nazywamy *kątem między wektorami* x i y.

Własności długości wektorów są zebrane w kolejnym twierdzeniu.

Twierdzenie 11.12. *Niech* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Wtedy*

(1) $\|x\| \geq 0$ *oraz* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Odległością euklidesową (lub krótko *odległością*) między punktami $x, y \in \mathbb{R}^n$ nazywamy liczbę

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \tag{11.4}$$

Uwaga 11.13. Zauważmy, że dla $n = 1$ wzór (11.4) ma postać

$$d(x, y) = |x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 11.14. *Niech* $x, y, x \in \mathbb{R}^n$. *Wtedy*

(1) $d(x, y) \geq 0$ *oraz* $d(x, x) = 0$,
(2) $d(x, y) = d(y, x)$,
(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Uwaga 11.15. Własność (4) nosi nazwę *nierówności trójkąta.*

11.1.4. Własności podzbiorów w $\mathbb{R}^n$. W dalszym ciągu będziemy rozważali funkcje określone na podzbiorach przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Nie wszystkie podzbiory nadają się do roli dziedziny śensownej"(choćby z fizycznego punktu widzenia) funkcji. Opiszemy pewne własności, które wyróżniają dostatecznie regularne – z tego punktu widzenia – podzbiory w $\mathbb{R}^n$.

Dysponując pojęciem odległości możemy definiować pojęcia analogiczne do tych, które znamy z analizy prostej, płaszczyzny i przestrzeni.

Definicja 11.16. Niech $x \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$. *Kulą otwartą* (lub krótko *kulą*) o środku x i promieniu r nazywamy zbiór

$$K_{x,r} = \{y \in \mathbb{R}^n : \ d(x, y) < r\}.$$

Przykład 11.17. Dla $n = 1$ kulą otwartą jest po prostu przedział otwarty

$$K_{x,r} = (x - r, x + r).$$

Dla $n = 2$ kula otwarta to wnętrze koła o środku w punkcie $x \in \mathbb{R}^2$ i promieniu r.
Dla $n = 3$ kulą otwartą jest wnętrze standardowej 3-wymiarowej kuli.

Definicja 11.18. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$. Zbiór U nazywamy *otwartym*, jeśli dla każdego $x \in U$ istnieje liczba $r > 0$ taka, że $K_{x,r} \subset U$.

Przykład 11.19. Niech $n = 1$. Uzasadnimy, że dowolny przedział otwarty (a, b) jest zbiorem otwartym. Niech $x \in (a, b)$. Wtedy $a < x < b$, co oznacza, że $x - a > 0$ i $b - x > 0$. Możemy więc zdefiniować

$$r = \min\{x - a, b - x\} \tag{11.5}$$

i r jest liczbą dodatnią.

Wykażemy, że $(x - r, x + r) \subset (a, b)$. Po pierwsze, zauważmy, że z (11.5) wynikają nierówności

$$r \leq x - a \qquad \text{oraz} \qquad r \leq b - x.$$

Przekształcając te nierówności otrzymujemy

$$a \leq x - r \qquad \text{oraz} \qquad x + r \leq b.$$

Niech teraz $y \in (x - r, x + r)$. Z powyższych nierówności otrzymujemy

$$a \leq x - r < y < x + r \leq b,$$

co oznacza, że $y \in (a, b)$.

Przykład 11.20. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ można wykazać, że kula K_{x_0,r_0} dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ i $r_0 > 0$ jest zbiorem otwartym.
Niech $x \in K_{x_0,r_0}$. Z Definicji 11.16 wynika, że $d(x, x_0) < r_0$, co oznacza, że

$$r = r_0 - d(x, x_0) > 0.$$

Pokażemy, że $K_{x,r} \subset K_{x_0,r_0}$. Niech $y \in K_{x,r}$. Z definicji kuli oznacza to nierówność $d(y, x) < r$. Korzystając z nierówności trójkąta (patrz Uwaga 11.15) otrzymujemy

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < r + r_0 - r = r_0,$$

skąd wynika, że $y \in K_{x_0,r_0}$.

Przykład 11.21. Niech $n = 2$. Rozważmy jedną z „porządnych” figur rozpatrywanych w szkole na geometrii, np. koło lub wielokąt. Nie wdając się w szczegółowe definicje wyodrębniamy z takiej figury jej brzeg i wnętrze. Można uzasadnić, że wnętrze takiej figury jest zbiorem otwartym.

Zwróćmy uwagę, że dotyczy to tylko figur „dwuwymiarowych". Wnętrze odcinka nie jest zbiorem otwartym, bo nie jest prawdą, że dla każdego punktu istnieje otaczające go koło zawierające się w odcinku.

Twierdzenie 11.22. (1) *Suma dowolnej ilości zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.*
(2) *Przekrój skończenie wielu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.*

Obok zbiorów otwartych definiujemy też zbiory domknięte

Definicja 11.23. Niech $F \subset \mathbb{R}^n$. Zbiór F nazywamy *domkniętym*, jeśli zbiór $\mathbb{R}^n \setminus F$ jest otwarty.

Przykład 11.24. Niech $n = 1$. Dowolny przedział postaci $[a, b]$ jest domknięty.
Istotnie,

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty),$$

czyli $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ jest sumą dwóch zbiorów otwartych (patrz Przykład 11.19), czyli jest zbiorem otwartym (Twierdzenie 11.22).

Przykład 11.25. Niech $n = 2$. Rozważmy figury płaskie rozpatrywane w Przykładzie 11.21. Jeśli każdą z nich będziemy rozpatrywali łacznie z ich brzegiem, będą one domknięte.

Przykład 11.26. Można wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ tzw. *kula domknięta*

$$\overline{K}_{x,r} = \{y \in \mathbb{R}^n : \ d(x, y) \leq r\}$$

jest zbiorem domkniętym.

W dalszych rozważaniach przydatne jeszcze jedno pojęcie

Definicja 11.27. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$. Mówimy, że zbiór A jest ograniczony, jeśli istnieje kula domknięta $\overline{K}_{x,r}$ taka, że $A \subset \overline{K}_{x,r}$.

Twierdzenie 11.28. *Podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $D > 0$ taka, że dla każdych*

$$d(x, y) \leq D, \qquad \textit{dla każdych } x, y \in A.$$

Przykład 11.29. Niech $n = 1$. Każdy przedział postaci (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, jest zbiorem ograniczonym.

Przykład 11.30. Niech $n = 2$. Koło (z brzegiem i bez brzegu), wielokąt, odcinek są zbiorami ograniczonymi. Prosta, półprosta nie są ograniczone.

Przykład 11.31. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ dowolna kula otwarta i domknięta są zbiorami ograniczonymi. Każdy zbiór skończony jest zbiorem ograniczonym

11.2. Ciągi w przestrzeni euklidesowej

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, również w przestrzeni euklidesowej będziemy rozpatrywali ciągi elementów i ich różne własności.

Przykład 11.32. Ciąg, którego wyrazami są elementy przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ opisujemy identycznie jak ciągi liczbowe:

- poprzez wypisanie kilku pierwszych wyrazów, np.

$$\begin{aligned}(a_k) &= (1,2),(2,4),(3,6),(4,8),\dots\\ (b_k) &= (1,-1,1),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right),\dots\\ (c_k) &= (1,2,4,\dots,2^{n-1}),(1,3,9,\dots,3^{n-1}),(1,4,16,\dots,4^{n-1}),\dots\end{aligned}$$

- wzorem, np. ciągi opisane wyżej można zapisać następującymi wzorami

$$\begin{aligned}a_k &= (k,2k), \qquad k\in\mathbb{N}\\ b_k &= \left(\frac{1}{k},-\frac{1}{k},1\right), \qquad k\in\mathbb{N}\\ c_k &= (1,k+1,(k+1)^2,\dots,(k+1)^{n-1}), \qquad k\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

Ten ostatni ciąg można też opisać podając osobne wzory na współrzędne punktu c_k

$$c_k^{(i)} = (k+1)^{i-1}, \qquad k\in\mathbb{N},\ i=1,2,\dots,n.$$

11.2.1. Ciągi w $\mathbb{R}^n$ a układy ciągów liczbowych. Niech $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Ponieważ każdy element a_k sam jest ciągiem złożonym z n liczb, musimy wprowadzić specjalny system oznaczeń. Będziemy zapisywali

$$a_k = (a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \dots, x_k^{(n)}), \tag{11.6}$$

gdzie liczba $a_k^{(i)}$ oznacza i-tą współrzędną punktu a_k.

Ustalmy teraz liczbę i ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Mając dany ciąg (a_k) elementów $\mathbb{R}^n$ możemy rozpatrywać ciąg liczbowy $(a_k^{(i)})$ zestawiony z i-tych współrzędnych punktów a_k. W ten sposób z każdym ciągiem elementów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ możemy stowarzyszyć n ciągów liczbowych. I na

odwrót, mając danych n ciągów liczbowych $(a_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, możemy z nich skonstruować ciąg $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ elementów $\mathbb{R}^n$ w ten sposób, że k-ty wyraz definiujemy tak jak w (11.6). Możemy to podsumować następująco:

Uwaga 11.33. Istnieje naturalna i wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między ciągami elementów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ a układami złożonymi z n ciągów liczbowych.

Uwaga 11.34. Jeśli $n = 2$, to zamiast pisać $(a_k^{(1)}, a_k^{(2)})$ będziemy często pisali (x_k, y_k). Podobnie dla $n = 3$ będziemy pisali (x_k, y_k, z_k) zamiast $(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, a_k^{(3)})$.

Przykład 11.35. Niech $n = 2$. Rozważmy ciąg (a_k) elementów przestrzeni $\mathbb{R}^2$ zadany wzorem

$$a_k = \left(\frac{2^k}{k}, \frac{k+1}{2k}\right), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Z ciągiem tym w naturalny sposób stowarzyszone są dwa ciągi liczbowe (x_k) i (y_k) zadane wzorami:

$$x_k = \frac{2^k}{k}, \qquad y_k = \frac{k+1}{2k}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Przykład 11.36. Niech $n = 3$. Załóżmy, że mamy dane ciągi liczbowe

$$x_k = (-1)^{k+1}, \qquad y_k = \frac{\sqrt{k+1}}{k}, \qquad z_k = \sqrt[k]{1+10^k}.$$

Ciągi te wyznaczają jeden ciąg, którego wyrazami są elementy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ określone formułą

$$a_k = \left((-1)^{k+1}, \frac{\sqrt{k+1}}{k}, \sqrt[k]{1+10^k}\right).$$

11.2.2. Ciągi zbieżne. Definicja ciągu zbieżnego w $\mathbb{R}^n$ jest bardzo podobna do Definicji 4.33.

Definicja 11.37. Niech (a_k) będzie ciągiem elementów przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że punkt $g \in \mathbb{R}^n$ jest *granicą* ciągu (a_k), jeśli

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, k > N:\ d(a_k, g) < \varepsilon, \tag{11.7}$$

gdzie d oznacza odległość euklidesową. Piszemy wtedy $g = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

Mówimy, że ciąg (a_k) jest *zbieżny*, jeśli istnieje punkt $g \in \mathbb{R}^n$, który jest jego granicą.

Przykład 11.38. Niech $a_k = \left(\frac{k^2+1}{2k^2}, \frac{1}{k}, \frac{3-2k^3}{k^3}\right)$. Wykażemy, że

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \left(\frac{1}{2}, 0, -2\right).$$

Oznaczmy $g = \left(\frac{1}{2}, 0, 2\right)$. Obliczamy

$$\begin{aligned} d(a_k, g) &= \sqrt{\left(\frac{k^2+1}{2k^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{3-2k^3}{k^3} + 2\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{k^2+1-k^2}{2k^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{3-2k^3+2k^3}{k^3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4k^4} + \frac{1}{k^2} + \frac{9}{k^6}} = \sqrt{\frac{k^2+4k^4+36}{4k^6}} = \frac{\sqrt{k^2+4k^4+36}}{2k^3} \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ prawdziwe są nierówności

$$k^2 \leq k^4, \qquad 36 \leq 36k^4.$$

Stąd wynika, że

$$d(a_k, g) \leq \frac{\sqrt{k^4+4k^4+36k^4}}{2k^3} = \frac{\sqrt{41k^4}}{2k^3} = \frac{\sqrt{41}k^2}{2k^3} = \frac{\sqrt{41}}{2} \cdot \frac{1}{k} \tag{11.8}$$

Wykażemy teraz prawdziwość zdania (11.7). Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Niech N będzie dowolną[3] liczbą naturalną taką, że

$$N > \frac{\sqrt{41}}{2\varepsilon}. \tag{11.9}$$

Załóżmy teraz, że $k > N$. Z warunku (11.9) wynika, że

$$k > \frac{\sqrt{41}}{2\varepsilon},$$

a stąd otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{41}}{2k} < \varepsilon.$$

[3]Liczbę N możemy określić konkretnym wzorem. Dla dowolnej liczby rzeczywistej x symbolem $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy największą liczbę całkowitą, która jest nie większa od liczby x, tzn.

$$\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} : \ m \leq x\}.$$

Liczbę N spełniającą warunek (11.9) możemy teraz zdefiniować formułą

$$N = \left\lfloor \frac{\sqrt{41}}{2\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

Korzystając teraz z (11.8) wnioskujemy, że dla każdego $k > N$ spełniona jest nierówność

$$d(a_k, g) < \varepsilon,$$

co uzasadnia prawdziwość zdania (11.7).

W poprzednim paragrafie zauważyliśmy, że każdemu ciągowi elementów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ odpowiada jednoznacznie układ n ciągów liczbowych. W powyższym przykładzie są to ciągi

$$x_k = \frac{k^2+1}{2k^2}, \qquad y_k = \frac{1}{k}, \qquad z_k = \frac{3-2k^3}{k^3}.$$

Granice tych ciągów są następujące

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{k\to\infty} y_k = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} z_k = -2.$$

Jak widać, są to współrzędne punktu g, który jest granicą ciągu (a_k). Oczywiście to nie jest przypadek. Prawdziwe jest bowiem

Twierdzenie 11.39. *Niech (a_k) będzie ciągiem elementów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i niech*

$$a_k = (a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \ldots, a_k^{(n)}), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Ciąg (a_k) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest każdy ciąg liczbowy $(a_k^{(i)})$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ponadto, w tym wypadku

$$\lim_{k\to\infty} a_k = g,$$

gdzie $g = (g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(n)})$ oraz

$$\lim_{k\to\infty} a_k^{(i)} = g^{(i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Posługując się powyższym twierdzeniem łatwo uzasadnić następujące własności ciągów zbieżnych i granic.

Twierdzenie 11.40. *Niech (a_k) i (b_k) będą zbieżnymi ciągami elementów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz $\alpha \in \mathbb{N}$. Wtedy:*

(1) *ciąg $(a_k) + (b_k)$, zdefiniowany wzorem*

$$(a_k) + (b_k) = (a_k + b_k), \qquad k \in \mathbb{N},$$

gdzie $+$ po prawej stronie powyższej równości oznacza dodawanie wektorów w $\mathbb{R}^n$, jest zbieżny oraz

$$\lim_{k\to\infty}(a_k+b_k)=\lim_{k\to\infty}a_k+\lim_{k\to\infty}b_k;$$

(2) *ciąg $\alpha(a_k)$, zdefiniowany wzorem*

$$\alpha(a_k)=(\alpha a_k),\qquad k\in\mathbb{N},$$

gdzie αa_k po prawej stronie powyższej równości oznacza mnożenie wektora w $\mathbb{R}^n$ przez liczbę, jest zbieżny oraz

$$\lim_{k\to\infty}\alpha a_k=\alpha\lim_{k\to\infty}a_k.$$

11.2.3. Punkty skupienia i domknięcie podzbioru przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej (patrz Rozdział 6) pojęcie granicy ciągu jest kluczowe w rozumieniu ciągłości funkcji określanych na podzbiorach przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Okazuje się jednak, że ma ono też zastosowanie w charakteryzowaniu własności podzbiorów w $\mathbb{R}^n$ opisanych w paragrafie 11.1.4.

Definicja 11.41. Niech $A\subset\mathbb{R}^n$. Mówimy, że punkt $a\in\mathbb{R}^n$ jest *punktem skupienia* zbioru A, jeśli istnieje ciąg (a_k) elementów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ o następujących własnościach:

(1) $a_k\in A\setminus\{a\}$ dla każdego $k\in\mathbb{N}$,

(2) $\lim_{k\to\infty}a_k=a$.

Uwaga 11.42. Zauważmy, że z definicji tej wcale nie wynika, że punkty skupienia muszą być elementami zbioru A. Z drugiej strony, elementy zbioru A nie muszą być punktami skupienia zbioru A.

Biorąc pod uwagę Definicję 11.37 i Definicję 11.41 można wykazać następującą charakteryzację punktów skupienia

Twierdzenie 11.43. *Punkt $a\in\mathbb{R}^n$ jest punktem skupienia zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon>0$ zbiór $K_{a,\varepsilon}\cap(A\setminus\{a\})$ jest niepusty.*

Przykład 11.44. Niech

$$A = \mathbb{Z}^n = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) : \ x^{(i)} \in \mathbb{Z} \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Zbiór A jest zatem zbiorem tych punktów z przestrzeni $\mathbb{R}^n$, których wszystkie współrzędne są liczbami całkowitymi. Wykażemy, że zbiór ten nie ma żadnych punktów skupienia. Zrobimy to w ten sposób, że weźmiemy dowolny punkt $a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ i uzasadnimy, że a nie jest punktem skupienia zbioru A. W tym celu rozważmy dwa przypadki:

Przypadek I: $a \in A$. Oznacza to, że każda współrzędna $a^{(i)}$ punktu a jest liczbą całkowitą. Jeśli $x \in A \setminus \{a\}$, to wszystkie współrzędne punktu x są liczbami całkowitymi oraz $x^{(i_0)} \neq a^{(i_0)}$ dla przynajmniej jednego indeksu $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Wynika stąd, że

$$\left|a^{(i_0)} - x^{(i_0)}\right| \geq 1.$$

Stąd zaś wywodzimy, że

$$\begin{aligned} d(a, x) &= \sqrt{\left(a^{(1)} - x^{(1)}\right)^2 + \left(a^{(2)} - x^{(2)}\right)^2 + \ldots + \left(a^{(n)} - x^{(n)}\right)^2} \geq \\ &\geq \sqrt{\left(a^{(i_0)} - x^{(i_0)}\right)^2} = \left|a^{(i_0)} - x^{(i_0)}\right| \geq 1. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $x \notin K_{a,1}$. Wykazaliśmy więc, że

$$K_{a,1} \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset,$$

więc na podstawie Twierdzenia 11.43 wnioskujemy, że punkt a nie jest punktem skupienia zbioru A.

Przypadek II: $a \notin A$. Przynajmniej jedna współrzędna $a^{(i_0)}$, gdzie $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, nie jest liczbą całkowitą. Wynika stąd, że

$$\left\lfloor a^{(i_0)} \right\rfloor < a^{(i_0)} < \left\lfloor a^{(i_0)} \right\rfloor + 1. \tag{11.10}$$

Niech

$$\varepsilon = \min\left\{a^{(i_0)} - \left\lfloor a^{(i_0)} \right\rfloor, \left\lfloor a^{(i_0)} \right\rfloor + 1 - a^{(i_0)}\right\}. \tag{11.11}$$

Z nierówności (11.10) wynika, że $\varepsilon > 0$. Ponieważ $a \notin A$, zachodzi równość $A \setminus \{a\} = A$. Niech $x \in A$. Wtedy $x^{(i_0)}$ jest liczbą całkowitą. Wynika stąd, że spełniona jest dokładnie jedna z następujących nierówności:

$$x^{(i_0)} \leq \left\lfloor a^{(i_0)} \right\rfloor \tag{11.12}$$

lub

$$\left\lfloor a^{(i_0)} \right\rfloor + 1 \leq x^{(i_0)}. \tag{11.13}$$

Jeśli zachodzi warunek (11.12), to z (11.10) i (11.11) wynika, że

$$a^{(i_0)} - x^{(i_0)} \geq a^{(i_0)} - \left\lfloor a^{(i_0)} \right\rfloor \geq \varepsilon. \tag{11.14}$$

Z kolei, jeśli zachodzi (11.13), to znowu z (11.10) i (11.11) wnioskujemy

$$x^{(i_0)} - a^{(i_0)} \geq \left\lfloor a^{(i_0)} \right\rfloor + 1 - a^{(i_0)} \geq \varepsilon. \tag{11.15}$$

Zarówno z (11.14) jak i z (11.15) wynika, że dla każdego $x \in A$ zachodzi nierówność

$$\left| x^{(i_0)} - a^{(i_0)} \right| \geq \varepsilon. \tag{11.16}$$

Oznacza to, że $x \notin K_{a,\varepsilon}$. Co za tym idzie, wykazaliśmy

$$K_{a,\varepsilon} \cap (A \setminus \{a\}) = K_{a,\varepsilon} \cap A = \emptyset.$$

To zaś – na podstawie Twierdzenia 11.43 – oznacza, że a nie jest punktem skupienia zbioru A.

Przykład 11.45. Niech $A = K_{0,1}$. Tutaj symbolem 0 oznaczamy punkt w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, którego wszystkie współrzędne są równe zero, tzn. $(0, 0, \ldots, 0)$. Wykażemy, że każdy punkt a, dla którego zachodzi nierówność

$$d(a, 0) \leq 1, \tag{11.17}$$

jest punktem skupienia zbioru A. Tym razem posłużymy się wprost Definicją 11.41. Zdefiniujmy ciąg (a_k) wzorem

$$a_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right) a, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{11.18}$$

Po pierwsze, wykażemy, że zachodzi warunek (1) z Definicji 11.41. Z określenia ciągu (a_k) i z nierówności (11.17) wnioskujemy

$$\begin{aligned}
d(a_k, 0) = & \\
= & \sqrt{\left(a_k^{(1)}\right)^2 + \left(a_k^{(2)}\right)^2 + \ldots + \left(a_k^{(n)}\right)^2} = \\
= & \sqrt{\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right) a^{(1)}\right)^2 + \left(\left(1 - \frac{1}{k}\right) a^{(2)}\right)^2 + \ldots + \left(\left(1 - \frac{1}{k}\right) a^{(n)}\right)^2} = \\
= & \sqrt{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 (a^{(1)})^2 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 (a^{(2)})^2 + \ldots + \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 (a^{(n)})^2} = \\
= & \sqrt{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 \left((a^{(1)})^2 + (a^{(2)})^2 + \ldots + (a^{(n)})^2\right)} = \\
= & \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sqrt{(a^{(1)})^2 + (a^{(2)})^2 + \ldots + (a^{(n)})^2} = \\
= & \left(1 - \frac{1}{k}\right) d(a, 0) < d(a, 0) \leq 1.
\end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc $d(a_k, 0) < 1$, czy $a_k \in K_{0,1} = A$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Po drugie, uzasadnimy, że spełniony jest warunek (2) z Definicji 11.41. Posłużymy się Twierdzeniem 11.39. Jeśli chcemy uzasadnić, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$, wystarczy wykazać, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_k^{(i)} = a^{(i)}$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$. Z określenia (11.18) wynika, że

$$a_k^{(i)} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) a^{(i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Stąd wynika

$$\lim_{k\to\infty} a_k^{(i)} = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) a^{(i)} = a^{(i)} \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = a^{(i)} \cdot 1 = a^{(i)}.$$

Definicja 11.46. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$. *Domknięciem* zbioru A nazywamy zbiór

$$\overline{A} = \{a \in \mathbb{R}^n : \ a \in A \vee a \text{ jest punktem skupienia zbioru } A\}$$

Można więc krótko powiedzieć, że domknięcie $\overline{A}$ powstaje ze zbioru A poprzez dołączenie do niego wszystkich punktów skupienia zbioru A.

Przykład 11.47. Rozważmy zbiór $A = \mathbb{Z}^n$ z Przykładu 11.44. Wykazaliśmy tam, że zbiór A nie ma żadnych punktów skupienia, czyli nie ma czego dołączać tworząc domknięcie tego zbioru. Oznacza to, że $\overline{A} = A$.

Przykład 11.48. Rozważmy zbiór $A = K_{0,1}$ z Przykładu 11.45. Wykazaliśmy tam, że punkt $a \in \mathbb{R}^n$ jest punktem skupienia tego zbioru, jeśli $d(a, 0) \leq 1$. Oznacza to w szczególności, że każdy element zbioru A jest jego punktem skupienia. Ponadto, są także punkty skupienia zbioru A, które nie należą do zbioru A. Są to te wszystkie elementy a, dla których zachodzi równość $d(a, 0) = 1$. Oznacza to, że

$$\overline{A} = \{a \in \mathbb{R}^n : \ d(a, 0) \leq 1\} = \{a \in \mathbb{R}^n : \ \|a\| \leq 1\}.$$

Zgodnie z oznaczeniem wprowadzonym w Przykładzie 11.26 możemy zatem zapisać

$$\overline{K_{0,1}} = \overline{K}_{0,1}.$$

Twierdzenie 11.49. *Operacja domknięcia ma następujące własności:*

(1) $A \subset \overline{A}$ *dla każdego* $A \subset \mathbb{R}^n$.
(2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ *dla każdego* $A \subset \mathbb{R}^n$.
(3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *dla każdych zbiorów* $A, B \subset \mathbb{R}^n$.
(4) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ *dla każdych zbiorów* $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

Przykład 11.50. Pokażemy, że w warunku (4) powyższego twierdzenia nie da się zastąpić znaku zawierania $\subset$ znakiem równości $=$. Niech $n = 1$ i niech $A = (-\infty, 0)$ oraz $B = (0, +\infty)$. Łatwo wykazać, że $\overline{A} = (-\infty, 0]$ i $\overline{B} = [0, +\infty)$. Mamy więc

$$\overline{A \cap B} = \overline{(-\infty, 0) \cap (0, +\infty)} = \overline{\emptyset} = \emptyset$$

oraz

$$\overline{A} \cap \overline{B} = (-\infty, 0] \cap [0, +\infty) = \{0\}.$$

Mamy więc $\overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Okazuje się, że jest ścisły związek między pojęciem zbioru domkniętego (patrz Definicja 11.23) i operacją domknięcia zbioru.

Twierdzenie 11.51. *Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{A} = A$.*

Można to też sformułować następująco.

Wniosek 11.52. *Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera wszystkie swoje punkty skupienia.*

Z punktu (2) Twierdzenia 11.49 natychmiast wynika

Wniosek 11.53. *Doknięcie $\overline{A}$ każdego zbioru A jest zbiorem domkniętym.*

Przykład 11.54. Z argumentów podanych w Przykładzie 11.47 wynika, że zbiór $A = \mathbb{Z}^n$ opisany w Przykładzie 11.44 jest domknięty.

Przykład 11.55. Każda kula domknięta $\overline{K}_{x,r}$ (patrz Przykład 11.26) jest zbiorem domkniętym, ponieważ jest domknięciem kuli otwartej $K_{x,r}$ (patrz Przykład 11.48). Wynika to z Wniosku 11.53.

11.3. Funkcje rzeczywiste określone na podzbiorach przestrzeni $\mathbb{R}^n$

11.3.1. Określenie funkcji n zmiennych. Będziemy rozważać funkcje, których dziedzina jest pewnym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Definicja 11.56. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$. Mówimy, że zbiór A ma *ma niepuste wnętrze*, jeśli dla pewnych $x \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$ kula $K_{x,r}$ jest podzbiorem zbioru A, tzn. $K_{x,r} \subset A$.

Przykład 11.57. Z Definicji 11.18 wynika, że każdy niepusty zbiór otwarty ma niepuste wnętrze.

Przykład 11.58. Domknięcie każdego niepustego zbioru otwartego ma niepuste wnętrze.

Przykład 11.59. Prosta na płaszczyznie jest przykładem podzbioru który nie ma niepustego wnętrza.

Definicja 11.60. *Funkcją n zmiennych* nazywamy każdą funkcję $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^n$ jest podzbiorem mającym niepuste wnętrze.

Argumentami funkcji n zmiennych f są elementy przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a więc n-elementowe ciągi $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$ liczb rzeczywistych. Formalnie wartość funkcji w takim punkcie powinniśmy oznaczać

$$f\left((x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})\right).$$

Dla prostoty zapisu będziemy jednak pisać

$$f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\right).$$

Przykład 11.61. Niech $f : K_{0,r} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem

$$f\left(x^{(2)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\right) = \left(x^{(1)}\right)^2 + \left(x^{(1)}\right)^2 + \ldots + \left(x^{(n)}\right)^2.$$

Wtedy f jest funkcją n zmiennych.

Przykład 11.62. Niech $n = 2$. Rozważmy zbiór $A = \{(x, y) : y = 1\}$. Niech $f : A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $f(x, y) = x^2 + y$. Zauważmy, że funkcja ta nie jest funkcją dwóch zmiennych mimo, że jest określona na podzbiorze $A \subset \mathbb{R}^2$. Zbiór A jest prostą na płaszczyznie. Problem polega na tym, że zbiór ten nie ma wnętrza. Tak naprawdę funkcję tę da się sprowadzić do funkcji jednej zmiennej $\varphi(x) = f(x, 1) = x^2 + 1$.

11.3.2. Dziedzina funkcji n zmiennych. W Rozdziale 5.2 dyskutowaliśmy pojęcie dziedziny dla funkcji jednej zmiennej. Wprowadziliśmy tam pojęcie *dziedziny naturalnej*. Podobnie możemy postąpić w przypadku funkcji wielu zmiennych. Przypuśćmy, że mamy zadane pewne wyrażenie algebraiczne $f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\right)$, w którym występuje n zmiennych $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$.

Dziedziną naturalną funkcji f będziemy nazywali największy podzbiór $D_f \subset \mathbb{R}$ taki, że funkcja $f : D_f \to \mathbb{R}$ ma sens.

Przykład 11.63. Niech $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln y}$.
Dziedzina D_f składa się z takich par (x,y), dla których spełniony jest następujący układ warunków:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y > 0 \\ \ln y \neq 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest zbiór

$$D_f = \{(x,y) : \ x \geq 0, \ y > 0, \ y \neq 1\} = [0,+\infty) \times \big((0,1) \cup (1,+\infty)\big).$$

Przykład 11.64. Niech $f(x,y,z) = \dfrac{\ln(x^2-y^2)}{z}$.
Dziedzina D_f składa się z takich trójek (x,y,z), dla których spełniony jest następujący układ warunków:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 > 0 \geq 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest zbiór

$$D_f = \{(x,y,z) : \ -|x| < y < |x|, \ z \neq 0\}.$$

11.3.3. Granica funkcji w punkcie i ciągłość funkcji. Pojęcie granicy funkcji wielu zmiennych w punkcie definiujemy podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej. Wiele definicji i twierdzeń w tej części będzie zatem w pewnej mierze powtórzeniem treści z Rozdziału 6.

O granicy funkcji w punkcie a_0 jest sens mówić tylko wtedy, gdy funkcja ta jest zdefiniowana na pewnym sąsiedztwie punktu a_0 (patrz Definicja 6.3).

Definicja 11.65. *Otoczeniem* punktu $a_0 \in \mathbb{R}^n$ nazywamy dowolną kulę otwartą $K_{a_0,\delta}$ o środku w a_0 i promieniu $\delta > 0$.

Sąsiedztwem punktu $a_0 \in \mathbb{R}^n$ nazywamy dowolny zbiór postaci $K_{a_0,\delta} \setminus \{a_0\}$, gdzie $\delta > 0$.

11.3.3.1. *Granica właściwa.* Niech podzbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ ma niepuste wnętrze i niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie pewną funkcją rzeczywistą określoną na zbiorze X. Niech $a_0 \in \mathbb{R}^n$. Zakładamy, że istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $K_{a_0,\delta} \setminus \{a_0\} \subset X$, tzn. zbiór X zawiera pewne sąsiedztwo punktu a_0. Następująca definicja jest analogonem Definicji 6.4.

Definicja 11.66. (Definicja Heine'go) Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą funkcji f w punkcie a_0*, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(a_k) = g$$

dla każdego ciągu (a_k) elementów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ spełniającego warunki:

(1) $a_k \in X \setminus \{a_0\}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_k = a_0$.

Jeśli g jest granicą funkcji f w punkcie x_0, to piszemy $g = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Przykład 11.67. Niech $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Zbiór ten zawiera dowolne sąsiedztwo punktu $(0,0)$. Wykażemy, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0. \tag{11.19}$$

Niech (a_k) będzie ciągiem takim, że $a_k = (x_k, y_k)$ dla $k \in \mathbb{N}$ oraz takim, że

$$x_k \neq 0 \qquad \text{lub} \qquad y_k \neq 0 \qquad\qquad \text{dla } k \in \mathbb{N},$$

oraz

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{k\to\infty} y_k = 0. \tag{11.20}$$

Powyższe własności są równoważne temu, że ciąg (a_k) spełnia warunki (1) i (2) w Definicji 11.66. Wykażemy, że wynika z nich równość

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k^2 y_k^2}{x_k^2+y_k^2} = 0. \tag{11.21}$$

Wykorzystamy nierówność, która jest prawdziwa[4] dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b:

$$|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}. \tag{11.22}$$

[4] Przedstawimy dowód tej nierówności. Ponieważ kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny, to

$$(a+b)^2 \geq 0 \qquad \text{oraz} \qquad (a-b)^2 \geq 0.$$

Ze wzorów skróconego mnożenia otrzymujemy

$$a^2+2ab+b^2 \geq 0 \qquad \text{oraz} \qquad a^2-2ab+b^2 \geq 0,$$

a stąd

$$-ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \qquad \text{oraz} \qquad ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Jednocześnie spełnianie tych nierówności jest równoważne nierówności (11.22).

Z nierówności tej wynika, że dla każdych $a, b \in \mathbb{R}$ takich, że $a^2 + b^2 > 0$ mamy

$$\frac{|ab|}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}. \tag{11.23}$$

Stąd zaś wynika, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leq \left| \frac{x_k^2 y_k^2}{x_k^2+y_k^2} \right| = \frac{|x_k^2 y_k^2|}{x_k^2+y_k^2} = \frac{|x_k y_k|^2}{x_k^2+y_k^2} = \frac{|x_k y_k|}{x_k^2+y_k^2} \cdot |x_k y_k| \leq \frac{1}{2} |x_k y_k|. \tag{11.24}$$

Z warunku (11.20) wynika, że

$$\lim_{k\to\infty} |x_k y_k| = 0.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach (patrz Twierdzenie 4.45) i z nierówności (11.24) wynika więc, że

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{x_k^2 y_k^2}{x_k^2+y_k^2} \right| = 0.$$

Jest to równoważne warunkowi (11.21).

Ponieważ wykazaliśmy, że (11.21) jest spełnione dla dowolnego ciągu $a_k = (x_k, y_k)$ takiego, że $a_k \neq (0,0)$ i $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = (0,0)$, stwierdzamy, że równość (11.19) jest wykazana.

Przykład 11.68. Niech $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2-2x+2y+2}$.
Dziedziną tej funkcji jest zbiór takich par (x,y), że

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 \neq 0.$$

Powyższy warunek da się zapisać w postaci

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \neq 0$$

i jest on spełniony dla wszystkich par (x,y) takich, że $(x,y) \neq (1,-1)$. Dziedzina funkcji f to zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,-1)\}$. Zawiera on wszystkie sąsiedztwa punktu $(1,-1)$. Wykażemy, że funkcja f nie posiada jednak granicy w tym punkcie.

Rozważmy dwa konkretne ciągi (a_k) i (b_k) określone formułami

$$a_k = \left(\frac{1}{k} + 1, \frac{1}{k} - 1 \right), \qquad b_k = \left(\frac{1}{k} + 1, -\frac{1}{k} - 1 \right).$$

Łatwo sprawdzić, że oba ciągi spełniają warunki (1) i (2) z Definicji 11.66. Obliczamy

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} f(a_k) &= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}+1+\frac{1}{k}-1}{\left(\frac{1}{k}+1\right)^2 + \left(\frac{1}{k}-1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{k}+1\right) + 2\left(\frac{1}{k}-1\right) + 2} = \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2}{k}}{\frac{1}{k^2}+\frac{2}{k}+1+\frac{1}{k^2}-\frac{2}{k}+1-\frac{2}{k}-2+\frac{2}{k}-2+2} = \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2}{k}}{\frac{2}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} k = +\infty
\end{aligned}$$

$$\lim_{k\to\infty} f(b_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}+1-\frac{1}{k}-1}{\left(\frac{1}{k}+1\right)^2+\left(-\frac{1}{k}-1\right)^2-2\left(\frac{1}{k}+1\right)+2\left(-\frac{1}{k}-1\right)+2} = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$$

Obliczenia te pokazują, że warunek sformułowany w Definicji 11.66 nie może być spełniony dla żadnej liczby $g \in \mathbb{R}$. Wskazaliśmy bowiem dwa ciągi argumentów zbieżnych do punktu $(1,-1)$, dla których ciągi wartości mają różne granice. Co więcej, dla jednego z tych ciągów ciąg wartości miał granicę niewłaściwą.

Podobnie jak dla funkcji jednej zmiennej można rozważać warunek równoważny Definicji 11.66 zwany *definicją Cauchy'ego* granicy funkcji wielu zmiennych w punkcie.

Twierdzenie 11.69. (Definicja Cauchy'ego) *Niech $f : X \to \mathbb{R}$, $a_0 \in \mathbb{R}^n$ i niech zbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ zawiera pewne sąsiedztwo punktu a_0. Liczba g jest granicą funkcji w punkcie a_0 wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, a \in X:\ 0 < d(a, a_0) < \delta \ \Rightarrow\ |f(a) - g| < \varepsilon.$$

11.3.3.2. *Własności granicy funkcji wielu zmiennych w punkcie.* Większość własności granicy funkcji wielu zmiennych w punkcie jest analogicznych do własności granic funkcji jednej zmiennej wypisanych w paragrafie 6.1.3.

Twierdzenie 11.70. *Jeśli $\lim\limits_{x\to a_0} f(a) = g_1$ i $\lim\limits_{x\to a_0} f(x) = g_2$, to $g_1 = g_2$.*

Twierdzenie 11.71. *Niech f i g będą funkcjami posiadającymi granice w punkcie a_0 i niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy funkcje αf, $f+g$ i fg też mają granice w punkcie a_0 oraz zachodzą równości:*

(a) $\lim\limits_{x\to a_0} (\alpha f(x)) = \alpha \lim\limits_{x\to a_0} f(x)$,

(b) $\lim\limits_{x\to a_0} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a_0} f(x) + \lim\limits_{x\to a_0} g(x)$,

(c) $\lim\limits_{x\to a_0} (f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to a_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a_0} g(x)$.

Jeśli dodatkowo założymy, że $g(x) \neq 0$ dla x należących do pewnego sąsiedztwa punktu a_0 i $\lim\limits_{x\to a_0} g(x) \neq 0$, to

(d) $\lim\limits_{x\to a_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to a_0} g(x)}$.

Twierdzenie 11.72. *Niech $C \in \mathbb{R}$. Jeśli f ma granicę w punkcie a_0 i $f(x) \geq C$ dla x należących do pewnego sąsiedztwa punktu a_0, to $\lim_{x\to a_0} f(x) \geq C$.*

Twierdzenie 11.73. *Niech f i g będą funkcjami określonymi na pewnym sąsiedztwie punktu a_0. Jeśli $\lim_{x\to a_0} f(x) = 0$ i g jest funkcją ograniczoną w pewnym sąsiedztwie punktu a_0, to $\lim_{x\to a_0} f(x)g(x) = 0$.*

Uwaga 11.74. W paragrafie 6.1.5 zdefiniowaliśmy pojęcia granicy lewo- i prawostronnej w punkcie dla funkcji jednej zmiennej. Twierdzenie 6.22 orzeka, że funkcja ma granicę w punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy ma obie granice jednostronne i są one równe.

Dla funkcji wielu zmiennych analogiczne pojęcia nie mają sensu. Już choćby dla $n = 2$, gdy mamy do czynienia z płaszczyzną, punkt ma zbyt wiele „stron". To powoduje, że sytuacja się znacznie komplikuje.

11.3.3.3. *Granica niewłaściwa.* Podobnie jak w paragrafie 6.1.4 możemy rozważać granice niewłaściwe dla funkcji wielu zmiennych. Tutaj jednak jest mówić jedynie o granicach niewłaściwych II rodzaju (patrz strona 99).

Ponownie zakładamy, że $f : X \to \mathbb{R}$ i podzbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ zawiera pewne sąsiedztwo punktu a_0.

Definicja 11.75. (Definicja Heine'go) Mówimy, że $+\infty$ jest *granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie a_0*, jeśli

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = +\infty$$

dla każdego ciągu (a_k) spełniającego warunki:

(1) $a_k \in X \setminus \{a_0\}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim_{k\to\infty} a_k = a_0$.

Analogicznie, mówimy, że $-\infty$ jest *granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie a_0*, jeśli

$$\lim_{k\to\infty} f(a_n) = -\infty$$

dla każdego ciągu (a_k) spełniającego warunki:

(1) $a_k \in X \setminus \{a_0\}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a_0$.

Jeśli $+\infty$ jest granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie a_0, to zapisujemy to $\lim\limits_{x\to a_0} f(x) = +\infty$, a jeśli $-\infty$ jest granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie a_0, to piszemy $\lim\limits_{x\to a_0} f(x) = -\infty$.

Przykład 11.76. Niech $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) = \dfrac{1}{|x^{(1)}| + |x^{(2)}| + \ldots + |x^{(n)}|}$, $a_0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Pokażemy, że

$$\lim_{(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(n)})\to(0,0,\ldots,0)} f(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) = +\infty.$$

Niech $a_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(n)})$ będzie ciągiem elementów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ takim, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $x_k^{(i)} \neq 0$ dla przynajmniej jednego $i = 1, 2, \ldots, n$, oraz

$$\lim_{k\to\infty} x_k^{(i)} = 0, \qquad \text{dla każdego } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Z warunku tego wynika, że

$$\lim_{k\to\infty} |x_k^{(i)}| = 0, \qquad \text{dla każdego } i = 1, 2, \ldots, n.$$

a stąd otrzymujemy

$$\lim_{k\to\infty} \left(|x_k^{(1)}| + |x_k^{(2)}| + \ldots + |x_k^{(n)}|\right) = 0.$$

Oczywiście $|x_k^{(1)}| + |x_k^{(2)}| + \ldots + |x_k^{(n)}| > 0$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Z punktu (7) Twierdzenia 4.53 wynika zatem, że

$$\lim_{(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(n)})\to(0,0,\ldots,0)} f(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|x_k^{(1)}| + |x_k^{(2)}| + \ldots + |x_k^{(n)}|} = +\infty.$$

11.3.3.4. *Ciągłość funkcji w punkcie.* Pojęcie ciągłości funkcji wielu zmiennych $f : X \to \mathbb{R}$ w punkcie x_0 definiujemy podobnie jak w Rozdziale 6.2.1 zrobiliśmy to dla funkcji jednej zmiennej.

Niech $f : X \to \mathbb{R}$ i niech $a_0 \in \mathbb{R}^n$. Będziemy zakładali, że funkcja f jest określona na pewnym otoczeniu punktu a_0, tzn.

$$\exists\, \delta > 0 : \ K_{a_0,\delta} \subset X. \tag{11.25}$$

Zakładamy także zatem, że funkcja f jest też określona w samym punkcie a_0. Następująca definicja i twierdzenia po niej są niemal wiernym przepisaniem definicji i twierdzeń z Rozdziału 6.2.1.

Definicja 11.77. Mówimy, że funkcja f jest *ciągła w punkcie* a_0, jeśli spełnione są warunki:

(1) funkcja f ma granicę (właściwą) w punkcie a_0,
(2) $\lim\limits_{a\to a_0} f(a) = f(a_0)$.

Powołując się na definicję Heinego granicy funkcji w punkcie (Definicja 11.66) można sformułować następujący warunek równoważny powyższej definicji.

Twierdzenie 11.78. (Definicja Heinego ciągłości funkcji wielu zmiennych w punkcie) *Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ spełniająca warunek (11.25) jest ciągła w punkcie a_0 wtedy i tylko wtedy gdy $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_k) = f(a_0)$ dla każdego ciągu (a_k) takiego, że*
(1) *$a_k \in X$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$,*
(2) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a_0$.

Analogicznie, powołując się na Twierdzenie 11.69 można sformułować warunek zwany definicją Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie.

Twierdzenie 11.79. (Definicja Cauchy'ego ciągłości funkcji wielu zmiennych w punkcie) *Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ spełniająca warunek (11.25) jest ciągła w punkcie a_0 wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, a \in X:\ d(a, a_0) < \delta \ \Rightarrow\ |f(a) - f(a_0)| < \varepsilon.$$

Przykład 11.80. Rozważmy funkcję zadaną wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{gdy } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zbadamy jej ciągłość w punkcie $a_0 = (0,0)$.

Posłużymy się Definicją 11.77. Najpierw sprawdzimy istnienie granicy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Rozważmy trzy funkcje

$$f_1(x,y) = x, \qquad f_2(x,y) = y, \qquad f_3(x,y) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{gdy } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Jest oczywiste, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0.$$

Stąd wynika, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y) =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)}(f_1(x,y)+f_2(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) + \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0+0=0.$$

Z drugiej strony zauważmy, że

$$|f_3(x,y)| = \left|\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| = \left|\sin\frac{1}{x}\right|\left|\sin\frac{1}{y}\right| \leq 1$$

dla $(x,y) \neq (0,0)$. Ponieważ mamy równość

$$f(x,y) = (f_1(x,y)+f_2(x,y))\, f_3(x,y),$$

z Twierdzenia 11.73 wnioskujemy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Warunek (1) w Definicji 11.77 jest więc spełniony. Ponadto, z równości $f(0,0) = 0$ wynika także warunek (2). Funkcja f jest więc ciągła w punkcie $a_0 = (0,0)$.

Oczywiście, w przypadku funkcji wielu zmiennych prawdziwe są także Twierdzenia 6.33 i 6.35.

Twierdzenie 11.81. *Niech f i g będą funkcjami ciągłymi w punkcie $a_0 \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy funkcje αf, $f+g$, $f-g$ i $f\cdot g$ są także funkcjami ciągłymi w punkcie a_0. Jeśli ponadto $g(a_0) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ jest dobrze określona na pewnym otoczeniu $K_{a_0,\delta}$ punktu a_0 i jest w tym punkcie ciągła.*

Twierdzenie 11.82. *Niech $a_0 \in \mathbb{R}^n$ i $y_0 \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że funkcja wielu zmiennych ϕ jest określona na pewnym otoczeniu $K_{a_0,\delta}$ punktu a_0, zaś funkcja jednej zmiennej ψ – na pewnym otoczeniu punktu y_0. Załóżmy ponadto, że $\phi(a_0) = y_0$. Jeśli ϕ jest ciągła w punkcie a_0 i ψ jest ciągła w punkcie y_0, to funkcja $f(x) = \psi(\phi(x))$ jest ciągła w punkcie a_0.*

11.3.3.5. *Funkcje ciągłe.* Idea funkcji ciągłej jest w przypadku wielu zmiennych jest podobna do tej opisanej w Rozdziale 6.2.3.

Definicja 11.83. Niech $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym. Mówimy, że f jest *funkcją ciągłą*, jeśli f jest ciągła w każdym punkcie należącym do zbioru U.

Przykład 11.84. Niech

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(1+y)+y^2(1-x)}{x^2+y^2}, & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{gdy } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dziedziną funkcji f jest zbiór $U = \mathbb{R}^2$. Wykażemy, że f jest funkcją ciągłą.

Ciągłość funkcji f w każdym punkcie $(x,y) \neq (0,0)$ wynika z Twierdzenia 11.81. Pozostaje wykazać, że f jest ciągła w punkcie $(0,0)$. Najpierw obliczymy granicę $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. W tym celu dokonajmy przekształceń

$$\frac{x^2(1+y)+y^2(1-x)}{x^2+y^2} = \frac{x^2+x^2y+y^2-xy^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2+xy(x-y)}{x^2+y^2} = 1 + \frac{xy(x-y)}{x^2+y^2}.$$

Z Twierdzenia 11.71 wynika zatem, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^2+y^2}.$$

Wyrażenie w ostatniej granicy można przedstawić jako iloczyn dwóch funkcji

$$f_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad f_2(x,y) = x - y.$$

Z nierówności (11.23) wynika, że

$$|f_1(x,y)| = \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| = \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

dla każdego punktu $(x,y) \neq (0,0)$. Funkcja f_1 jest więc ograniczona. Ponadto, z Twierdzenia 11.71 wynika, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0.$$

Z Twierdzenia 11.73 wnosimy zatem, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^2+y^2} = 0.$$

Ostatecznie, otrzymujemy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 = f(0,0),$$

co oznacza, że funkcja f jest ciągła także w punkcie $(0,0)$.

W konsekwencji stwierdzamy, że f jest funkcją ciągłą.

Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, jeśli $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie X jest dowolnym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$, przyjmujemy następującą definicję ciągłości

Definicja 11.85. Niech $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$ jest dowolnym podzbiorem. Mówimy, że funkcja f jest *ciągła*, jeśli istnieje zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^n$ i funkcja ciągła $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ takie, że $X \subset U$ i $f(x) = \tilde{f}(x)$ dla każdego $x \in X$.

Ciągłość funkcji f można także scharakteryzować w następujący sposób

Twierdzenie 11.86. *Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$ jest dowolnym zbiorem, jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\, x \in X\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x' \in U :\ d(x, x') < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Bardzo ważna własność funkcji ciągłych jest opisana przez następujące uogólnienie Twierdzenia 6.48

Twierdzenie 11.87. *Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem domkniętym i ograniczonym. Jeśli $f : K \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to f przyjmuje na zbiorze K wartość największą i wartość najmniejszą, tzn. istnieją punkty $a_{\mathrm{m}}, a_{\mathrm{M}} \in K$ takie, że $f(a_{\mathrm{m}}) \leq f(a)$ dla każdego $a \in K$ i $f(a_{\mathrm{M}}) \geq f(a)$ dla każdego $a \in K$.*

11.4. Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

11.4.1. Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych. Przedstawimy teraz koncepcję różniczkowalności dla funkcji wielu zmiennych. Załóżmy, że $X \subset \mathbb{R}^n$ i $f : X \to \mathbb{R}$. Niech $a_0 \in X$ i niech f będzie określona na pewnym otoczeniu punktu a_0, tzn. $K_{a_0,\delta} \subset X$ dla pewnej liczby $\delta > 0$.

Definicja 11.88. Mówimy, że funkcja wielu zmiennych f jest *różniczkowalna* w punkcie a_0, jeśli istnieje vektor $v \in \mathbb{R}^n$ taki, że

$$\lim_{h \to (0,0,\ldots,0)} \frac{|f(a_0 + h) - f(a_0) - v \circ h|}{\|h\|} = 0. \tag{11.26}$$

Wektor v nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie a_0 i oznaczamy $\nabla f(a_0)$.

Uwaga 11.89. W powyższej definicji stosujemy oznaczenia wprowadzone w Rozdziale 11.1.3.

Przykład 11.90. Niech $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 2y$ i $a_0 = (1,2)$. Pokażemy, że wektor $v = (2,-2)$ spełnia warunki Definicji 11.88.

Oznaczmy $h = (s,t)$. Wtedy

$$v \circ h = 2s - 2t$$

oraz

$$\|h\| = \sqrt{s^2+t^2}.$$

Biorąc pod uwagę fakt, że $f(1,2) = 2$, iloraz różnicowy po lewej stronie równości (11.26) ma postać

$$\begin{aligned} &\frac{|f(1+s,2+t) - f(1,2) - v\circ h|}{\|h\|} = \\ &= \frac{|2(1+s)^3 - (1+s)(2+t)^2 + 2(2+t) - 2 - 2s + 2t|}{\sqrt{s^2+t^2}} = \\ &= \frac{|6s^2 + 2s^3 - 4t^2 - 4st - st^2|}{\sqrt{s^2+t^2}} \end{aligned} \tag{11.27}$$

W dalszym ciągu posłużymy się następującą obserwacją. Mamy oczywiste nierówności

$$|s| \le \sqrt{s^2+t^2}, \qquad |t| \le \sqrt{s^2+t^2}.$$

Z nich wynika, że dla każdych $t, s \in \mathbb{R}$ takich, że $s^2 + t^2 > 0$ mamy

$$\frac{|s|}{\sqrt{s^2+t^2}} \le 1, \qquad \frac{|t|}{\sqrt{s^2+t^2}} \le 1. \tag{11.28}$$

Wyrażenie (11.27) możemy więc oszacować następująco

$$\begin{aligned} &\frac{|6s^2 + 2s^3 - 4t^2 - 4st - st^2|}{\sqrt{s^2+t^2}} \le \\ &\le \frac{6|s^2| + 2|s^3| + 4|t^2| + 4|st| + |st^2|}{\sqrt{s^2+t^2}} = \\ &= 6|s|\frac{|s|}{\sqrt{s^2+t^2}} + 2|s|^2\frac{|s|}{\sqrt{s^2+t^2}} + 4|t|\frac{|t|}{\sqrt{s^2+t^2}} + 4|s|\frac{|t|}{\sqrt{s^2+t^2}} + |st|\frac{|v|}{\sqrt{s^2+t^2}} \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę nierówności (11.28), przy $(s,t) \to (0,0)$ każdy składnik powyższej sumy jest iloczynem funkcji dążącej do zera i funkcji ograniczonej. Z Twierdzenia 11.73 wynika więc, że każdy składnik jest zbieżny do zera, a zatem ich suma też dąży do zera. Stąd zaś wynika, że

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{|f(1+s,2+t) - f(1,2) - v\circ h|}{\|h\|} = 0,$$

co oznacza, że wektor $v = (2, -2)$ jest pochodną funkcji f w punkcie $a_0 = (1, 2)$.

W myśl Definicji 11.88 pochodną funkcji wielu zmiennych w punkcie jest wektor, a nie liczba, jak to było w przypadku funkcji jednej zmiennej. Oznacza to, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie dziedziny U, to funkcja, która każdemu punktowi $x \in U$ przyporządkowuje wektor $\nabla f(x)$ nie jest tym razem funkcją liczbową, lecz funkcją o wartościach wektorowych.

Definicja 11.91. Niech $U \subset \mathbb{R}$. Funkcję $F : U \to \mathbb{R}^n$ określoną na zbiorze U o wartościach w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy *polem wektorowym* na U.

Definicja 11.92. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Jeśli $f : U \to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną w każdym punkcie zbioru U, to funkcję, która przyporządkowuje każdemu punktowi $x \in U$ pochodną $\nabla f(x)$ funkcji f w punkcie x, nazywamy *polem gradientowym* funkcji f i oznaczamy ją ∇f.

11.4.2. Pochodne cząstkowe. Powstaje pytanie, **jak wyznaczyć współrzędne wektora ∇f?** Zanim odpowiemy na to pytanie, przeanalizujmy jeszcze jeden przykład.

Przykład 11.93. Rozważmy dowolną funkcję $f(x, y)$ dwóch zmiennych. Niech $a_0 = (x_0, y_0)$ będzie dowolnym punktem ze zbioru $U \subset \mathbb{R}^2$, który jest dziedziną funkcji f.

Niech wektor $v = (v_x, v_y)$ będzie pochodną funkcji f w punkcie a_0. Wyznaczymy współrzędne v_x i v_y wektora v.

Niech $h = (s, t)$. Z Definicji 11.88 wynika, że

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{|f(x_0 + s, y_0 + t) - f(x_0, y_0) - sv_x - tv_y|}{\sqrt{s^2 + t^2}} = 0.$$

Możemy w granicy po lewej stronie ustalić, że $t = 0$. Oczywiście, jeśli $s \to 0$, to będzie spełniony warunek $(s, 0) \to (0, 0)$. Mamy zatem

$$\lim_{s\to 0} \frac{|f(x_0 + s, y_0) - f(x_0, y_0) - sv_x|}{\sqrt{s^2}} = 0. \tag{11.29}$$

Przekształćmy wyrażenie, z którego liczymy granicę

$$\begin{aligned}&\frac{|f(x_0+s,y_0)-f(x_0,y_0)-sv_x|}{\sqrt{s^2}}=\\ &=\quad\frac{|f(x_0+s,y_0)-f(x_0,y_0)-sv_x|}{|s|}=\left|\frac{f(x_0+s,y_0)-f(x_0,y_0)-sv_x}{s}\right|=\\ &=\quad\left|\frac{f(x_0+s,y_0)-f(x_0,y_0)}{s}-v_x\right|\end{aligned}$$

Z równości (11.29) otrzymujemy więc wniosek, że

$$\lim_{s\to 0}\left|\frac{f(x_0+s,y_0)-f(x_0,y_0)}{s}-v_x\right|=0,$$

a to oznacza, że

$$v_x=\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+s,y_0)-f(x_0,y_0)}{s}. \tag{11.30}$$

Rozważmy teraz funkcję jednej zmiennej ϕ zdefiniowaną wzorem $\phi(x)=f(x,y_0)$. Mamy wtedy

$$\frac{f(x_0+s,y_0)-f(x_0,y_0)}{s}=\frac{\phi(x_0+s)-\phi(x_0)}{s}.$$

Ilorazy występujące po prawej stronie w (11.30) są zatem niczym innym jak ilorazami różnicowymi funkcji ϕ w punkcie x_0. W myśl Definicji 7.1 granica po prawej stronie w (11.30) jest pochodną funkcji ϕ w punkcie x_0, czyli

$$v_x=\phi'(x_0).$$

Niech z kolei funkcja ψ zmiennej y będzie zdefiniowana wzorem $\psi(y)=f(x_0,y)$. Podobnie jak wyżej można pokazać, że

$$v_y=\psi'(y_0).$$

Pokazaliśmy zatem, że

$$\nabla f(x_0,y_0)=(\phi'(x_0),\psi'(y_0)).$$

Analiza powyższego przykładu prowadzi do określenia tzw. *pochodnych cząstkowych* funkcji wielu zmiennych f.

Tytułem wstępu wprowadzimy pojęcie cięcia podzbioru przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Niech $X\subset\mathbb{R}^n$ będzie dowolnym podzbiorem. Niech $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ i ustalmy $n-1$ liczb

$$x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(i-1)},x_0^{(i+1)},\ldots,x_0^{(n)}\in\mathbb{R}.$$

Cięciem zbioru X w punkcie

$$(x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(i-1)},x_0^{(i+1)},\ldots,x_0^{(n)})\in\mathbb{R}^{n-1}$$

wzdłuż i-tej osi nazywamy następujący podzbiór zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$

$$X^{(i)}_{x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(i-1)},x_0^{(i+1)},\ldots,x_0^{(n)}} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ (x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(i-1)},x,x_0^{(i+1)},\ldots,x_0^{(n)}) \in X\right\}.$$

Twierdzenie 11.94. *Jeśli U jest zbiorem otwartym, to jego cięcie w dowolnym punkcie wzdłuż dowolnej osi jest otwartym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}$.*

Przechodzimy teraz do definicji pochodnej cząstkowej. Niech $f : U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na pewnym zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^n$. Niech $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(n)}) \in U$. Ustalmy $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i rozważmy funkcję jednej zmiennej

$$f^{(i)}_{x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(i-1)},x_0^{(i+1)},\ldots,x_0^{(n)}} : U^{(i)}_{x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(i-1)},x_0^{(i+1)},\ldots,x_0^{(n)}} \to \mathbb{R}$$

zdefiniowaną wzorem

$$f^{(i)}_{x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(i-1)},x_0^{(i+1)},\ldots,x_0^{(n)}}(x) = f(x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(i-1)},x,x_0^{(i+1)},\ldots,x_0^{(n)}).$$

Definicja 11.95. *i-tą pochodną cząstkową* funkcji f w punkcie $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(n)})$ nazywamy pochodną funkcji $f^{(i)}_{x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(i-1)},x_0^{(i+1)},\ldots,x_0^{(n)}}$ w punkcie $x_0^{(i)}$, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \left(f^{(i)}_{x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(i-1)},x_0^{(i+1)},\ldots,x_0^{(n)}}\right)'(x_0^{(i)}).$$

Przykład 11.96. Jeszcze raz rozważmy funkcję

$$f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 2y$$

z Przykładu 11.90. Jest to funkcja dwóch zmiennych, zatem można obliczyć dla niej dwie pochodne cząstkowe: $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Chcąc wyznaczyć wzór pochodnej cząstkowej $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ należy we wzorze funkcji f potraktować wszystkie symbole zmiennych różne x (czyli w tym wypadku y) jako stałe:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2x^3 - xy^2 + 2y) = 6x^2 - y^2.$$

Analogicznie, wyznaczając pochodną cząstkową $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ traktujemy jako stałe wszystkie zmienne różne od y (w tym wypadku x):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2x^3 - xy^2 + 2y) = -2xy + 2.$$

Wykorzystując otrzymane wzory możemy obliczyć wartości obu pochodnych w punkcie $(1,2)$. Otrzymujemy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -2.$$

Przypomnijmy, że w Przykładzie 11.90 wykazaliśmy, że $\nabla f(1,2) = (2,-2)$.

Przykład 11.97. Niech $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 \ln\left(2y + \dfrac{1}{z}\right)}{xy^2z^3}$.

Ponieważ jest to funkcja trzech zmiennych x, y, z, możemy obliczyć trzy pochodne cząstkowe $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$. Zasada jest taka sama, jak w poprzednim przykładzie: *obliczając pochodną cząstkową względem pewnej zmiennej, pozostałe zmienne traktujemy jako stałe*.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x^2y^2z^3 \ln\left(2y + \dfrac{1}{z}\right) - x^2y^2z^3 \ln\left(2y + \dfrac{1}{z}\right)}{x^2y^4z^6} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^3y^2z^3 \dfrac{2}{2y + \frac{1}{z}} - 2x^3yz^3 \ln\left(2y + \dfrac{1}{z}\right)}{x^2y^4z^6} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{x^3y^2z^3 \dfrac{-\frac{1}{z^2}}{2y + \frac{1}{z}} - 3x^3y^2z^2 \ln\left(2y + \dfrac{1}{z}\right)}{x^2y^4z^6}
\end{aligned}$$

Rozumując podobnie jak w Przykładzie 11.93 możemy wykazać następujące twierdzenie charakteryzujące pochodną funkcji wielu zmiennych

Twierdzenie 11.98. *Niech $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, będzie funkcją różniczkowalną w punkcie $x_0 \in U$. Wtedy dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ istnieje pochodna cząstkowa $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ oraz*

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right).$$

Uwaga 11.99. Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 11.98 nie jest prawdziwe! Z tego, że istnieją wszystkie pochodne cząstkowe w punkcie x_0 nie wynika, że funkcja musi być w tym punkcie różniczkowalna.

Przykład 11.100. Niech

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{gdy } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{gdy } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Obliczymy pochodne cząstkowe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ posługując się Definicją 11.95. W tym celu musimy wyznaczyć funkcje jednej zmiennej $f_0^{(1)}$ i $f_0^{(2)}$.

$$f_0^{(1)}(x)=f(x,0)=0, \qquad \text{dla każdego } x\in\mathbb{R},$$
$$f_0^{(2)}(y)=f(0,y)=0, \qquad \text{dla każdego } y\in\mathbb{R}.$$

Obie funkcje są więc stałe. Wynika stąd, że

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\left(f_0^{(1)}\right)'(0)=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\left(f_0^{(2)}\right)'(0)=0.$$

Obie pochodne cząstkowe w punkcie $(0,0)$ istnieją i są równe 0. Gdyby funkcja f była różniczkowalna w tym punkcie, to musiałoby być $\nabla f(0,0)=(0,0)$. Pokażemy jednak, że granica w (11.26) nie istnieje. Niech $h=(s,t)$ i przyjmujemy $v=(0,0)$. Iloraz po lewej stronie (11.26) jest równy

$$\frac{f(s,t)-f(0,0)}{\sqrt{s^2+t^2}}=\frac{\dfrac{st}{\sqrt{s^2+t^2}}}{\sqrt{s^2+t^2}}=\frac{st}{(s^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Przyjmijmy $a_k=\left(\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k}\right)$ i obliczmy

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)-f(0,0)}{\sqrt{\frac{2}{k^2}}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k^2}}{\left(\frac{2}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{2\sqrt{2}}{k^3}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2\sqrt{2}}=+\infty.$$

Funkcja f nie jest zatem różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

Dla porządku opiszmy jeszcze podstawowe własności pochodnej ∇f funkcji wielu zmiennych i jej pochodnych cząstkowych. Zakładamy, że funkcja $f:U\to\mathbb{R}$ jest określona na pewnym zbiorze otwartym $U\subset\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie 11.101. *Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in U$, to jest w tym punkcie ciągła.*

Uwaga 11.102. Można pokazać, że funkcja z Przykładu 11.100 nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$. Stąd wynika następujące stwierdzenie (por. Uwaga 11.99)

Z tego, że funkcja ma wszystkie pochodne cząstkowe nie wynika, że funkcja musi być ciągła.

Twierdzenie 11.103. *Niech $f, g : U \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi w punkcie a_0 i $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy funkcje αf, $f+g$, fg są też różniczkowalne w a_0 oraz*

(1) $\nabla(\alpha f)(a_0) = \alpha \nabla f(a_0)$,
(2) $\nabla(f+g)(a_0) = \nabla f(a_0) + \nabla g(a_0)$,
(3) $\nabla(fg)(a_0) = f(a_0)\nabla g(a_0) + g(a_0)\nabla f(a_0)$.

Wniosek 11.104. *Niech $f, g : U \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi w punkcie a_0 i $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$*

(1) $\dfrac{\partial(\alpha f)}{\partial x_i}(a_0) = \alpha \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_0)$,
(2) $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(a_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_0) + \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a_0)$,
(3) $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i}(a_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_0) g(a_0) + f(a_0) \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a_0)$.

11.4.3. Pochodna kierunkowa. Niech $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Chcąc opisać prędkość zmiany funkcji wielu zmiennych $f : U \to \mathbb{R}$ w kierunku wyróżnionego wektora $\vec{v}$ wprowadzamy pojęcie pochodnej kierunkowej wzdłuż wektora v.

Ustalmy punkt $a_0 \in U$ i wektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Niech

$$U_{a_0}^{\vec{v}} = \{t \in \mathbb{R} : \ a_0 + t\vec{v} \in U\}$$

będzie *cięciem zbioru U w punkcie a_0 wzdłuż wektora $\vec{v}$*. Rozważmy funkcję jednej zmiennej

$$f_{a_0}^{\vec{v}} : U_{a_0}^{\vec{v}} \to \mathbb{R}$$

zdefiniowaną wzorem

$$f_{a_0}^{\vec{v}}(t) = f(a_0 + t\vec{v}).$$

Definicja 11.105. *Pochodną kierunkową* funkcji f w punkcie a_0 wzdłuż wektora $\vec{v}$ nazywamy pochodną funkcji $f^{\vec{v}}_{a_0}$ w punkcie $t = 0$, tzn.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0) = \left(f^{\vec{v}}_{a_0}\right)'(0).$$

Przykład 11.106. Rozważmy funkcję

$$f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 2y$$

z Przykładu 11.90. Niech $a_0 = (1, 2)$ i niech $\vec{v} = (2, -3)$. Obliczymy pochodną kierunkową $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0)$.

Chcąc wyznaczyć wzór na funkcję $f^{\vec{v}}_{a_0}$ obliczamy:

$$a_0 + t\vec{v} = (1, 2) + t(2, -3) = (1 + 2t, 2 - 3t).$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} f^{\vec{v}}_{a_0}(t) = & \\ = \; & f(1 + 2t, 2 - 3t) = 2(1 + 2t)^3 - (1 + 2t)(2 - 3t)^2 + 2(2 - 3t) = \\ = \; & 2 + 12t + 24t^2 + 16t^3 - 4 + 12t - 9t^2 - 8t + 24t^2 - 18t^3 + 4 - 6t = \\ = \; & -2t^3 + 39t^2 + 10t + 2 \end{aligned}$$

Stąd

$$\left(f^{\vec{v}}_{a_0}\right)'(t) = -6t^2 + 78t + 10,$$

czyli

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 2) = \left(f^{\vec{v}}_{a_0}\right)'(0) = 10.$$

Przykład 11.107. Niech $f : U \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją n-zmiennych. Dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ rozważmy wektor

$$\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0).$$

Jest to taki układ n liczb, w którym na i-tym miejscu znajduje się 1, a na pozostałych miejscach znajduje się 0.

Niech $a_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(n)})$. Wtedy

$$a_0 + t\vec{e}_i = (x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(i-1)}, x_0^{(i)} + t, x_0^{(i+1)}, \ldots, x_0^{(n)}).$$

Stąd wynika równość

$$f^{\vec{e}_i}_{a_0}(t) = f^{(i)}_{x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(i-1)}, x_0^{(i+1)}, \ldots, x_0^{(n)}}(x_0^{(i)} + t),$$

gdzie $f^{(i)}_{x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(i-1)},x_0^{(i+1)},\ldots,x_0^{(n)}}$ jest funkcją zdefiniowaną na stronie 232. Stąd zaś i z porównania Definicji 11.95 i 11.105 wynika równość

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(a_0) = \left(f^{\vec{e}_i}_{a_0}\right)'(0) = \left(f^{(i)}_{x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(i-1)},x_0^{(i+1)},\ldots,x_0^{(n)}}\right)'(x_0^{(i)}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_0). \tag{11.31}$$

Pochodne cząstkowe są zatem szczególnymi przypadkami pochodnych kierunkowych.

Załóżmy, że funkcja $f : U \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $a_0 \in U$. Można wykazać, że znając wszystkie pochodne cząstkowe (a co za tym idzie gradient) funkcji f możemy łatwo obliczyć pochodną kierunkową w kierunku każdego wektora $\vec{v}$. Przypomnijmy warunek (11.26) różniczkowalności

$$\lim_{h\to(0,\ldots,0)} \frac{|f(a_0+h) - f(a_0) - \nabla f(a_0)\circ h|}{\|h\|} = 0.$$

Podstawmy w tym warunku $h = t\vec{v}$. Otrzymujemy

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(a_0+t\vec{v}) - f(a_0) - \nabla f(a_0)\circ (t\vec{v})|}{\|t\vec{v}\|} = 0. \tag{11.32}$$

Przekształćmy wyrażenie znajdujące się po lewej stronie powyższej równości.

$$\begin{aligned}
&\frac{|f(a_0+t\vec{v}) - f(a_0) - \nabla f(a_0)\circ (t\vec{v})|}{\|t\vec{v}\|} = \\
&= \frac{|f^{\vec{v}}_{a_0}(t) - f^{\vec{v}}_{a_0}(0) - t\nabla f(a_0)\circ \vec{v}|}{|t|\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\cdot\left|\frac{f^{\vec{v}}_{a_0}(t) - f^{\vec{v}}_{a_0}(0)}{t} - \nabla f(a_0)\circ\vec{v}\right|.
\end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{|f(a_0+t\vec{v}) - f(a_0) - \nabla f(a_0)\circ (t\vec{v})|}{\|t\vec{v}\|} = \\
&= \frac{1}{\|\vec{v}\|}\left|\left(f^{\vec{v}}_{a_0}\right)'(0) - \nabla f(a_0)\circ\vec{v}\right| = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0) - \nabla f(a_0)\circ\vec{v}\right|.
\end{aligned}$$

Z warunku (11.32) otrzymujemy następujący wniosek.

Twierdzenie 11.108. *Jeśli funkcja $f : U \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $a_0 \in U$, to dla każdego wektora $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ funkcja f ma w punkcie a_0 pochodną kierunkową wzdłuż wektora $\vec{v}$ oraz*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0) = \nabla f(a_0)\circ\vec{v} \tag{11.33}$$

Przykład 11.109. Wróćmy do Przykładu 11.106. Ponownie chcemy obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 2y$ w punkcie $a_0 = (1,2)$ wzdłuż wektora $\vec{v} = (2,-3)$.

Tym razem skorzystamy ze wzoru (11.33). W Przykładzie 11.90 wykazaliśmy, że $\nabla f(1,2) = (2,-2)$. Stąd zaś otrzymujemy

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,2) = (2,-2) \circ (2,-3) = 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = 10.$$

Oczywiście zgadza się to wynikiem otrzymanym w Przykładzie 11.106.

11.4.4. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Niech $f : U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną ne pewnym zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^n$. Przypuśćmy, że funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie należącym do zbioru U. Z Twierdzenia 11.98 wynika, że w każdym punkcie możemy obliczyć n pochodnych cząstkowych funkcji f. Ustalmy $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Jeśli każdemu punktowi $a \in U$ przyporządkujemy liczbę $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ czyli i-tą pochodną cząstkową funkcji f w punkcie a, to otrzymamy nową dobrze określoną na zbiorze U funkcję n zmiennych, którą będziemy oznaczać $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Podobnie jak to robiliśmy dla funkcji f, możemy zadać pytanie o różniczkowalność funkcji wielu zmiennych $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. Jeśli ta funkcja jest też różniczkowalna, to możemy obliczyć jej pochodne cząstkowe $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$. W sumie więc będziemy mieli n^2 pochodnych cząstkowych drugiego rzędu.

Dla uproszczenia zapisu będziemy pisali $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ zamiast $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, a w przypadku, gdy $j = i$ będziemy pisali $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Przykład 11.110. Niech $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 - y}$. Obliczymy wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu.

Najpierw obliczymy pochodne pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y^2(x^2-y) - xy^2 \cdot 2x}{(x^2-y)^2} = \frac{-x^2y^2 - y^3}{(x^2-y)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2xy(x^2-y) - xy^2 \cdot (-1)}{(x^2-y)^2} = \frac{2x^3y - xy^2}{(x^2-y)^2}
\end{aligned}$$

Teraz obliczamy pochodne drugiego rzędu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2xy^2(x^2-y)^2 - (-x^2y^2 - y^3) \cdot 2(x^2-y) \cdot 2x}{(x^2-y)^4} = \\
&= \frac{-2xy^2(x^2-y) + 4x(x^2y^2 + y^3)}{(x^2-y)^3} = \frac{2x^3y^2 + 6xy^3}{(x^2-y)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(-2x^2y-3y^2)(x^2-y)^2-(-x^2y^2-y^3)\cdot 2(x^2-y)\cdot(-1)}{(x^2-y)^4} = \\ &= \frac{(-2x^2y-3y^2)(x^2-y)-2(x^2y^2+y^3)}{(x^2-y)^3} = \frac{-2x^4y-3x^2y^2+y^3}{(x^2-y)^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(6x^2y-y^2)(x^2-y)^2-(2x^3y-xy^2)\cdot 2(x^2-y)\cdot 2x}{(x^2-y)^4} = \\ &= \frac{(6x^2y-y^2)(x^2-y)-4x(2x^3y-xy^2)}{(x^2-y)^3} = \frac{-2x^4y-3x^2y^2+y^3}{(x^2-y)^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(2x^3-2xy)(x^2-y)^2-(2x^3y-xy^2)\cdot 2(x^2-y)\cdot(-1)}{(x^2-y)^4} = \\ &= \frac{(2x^3-2xy)(x^2-y)+2(2x^3y-xy^2)}{(x^2-y)^3} = \frac{2x^5}{(x^2-y)^3}\end{aligned}$$

Oczywiście, w podobny sposób możemy definiować pochodne cząstkowe 3-go rzędu. Dla każdych $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ określamy:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Przykład 11.111. Obliczmy dla przykładu pochodne $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ i $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, gdzie f jest funkcją z Przykładu 11.110.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{(4x^3y+18xy^2)(x^2-y)^3-(2x^3y^2+6xy^3)\cdot 3(x^2-y)^2\cdot(-1)}{(x^2-y)^6} \\ &= \frac{(4x^3y+18xy^2)(x^2-y)+3(2x^3y^2+6xy^3)}{(x^2-y)^4} = \frac{4x^5y+20x^3y^2}{(x^2-y)^4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \\ &= \frac{(-8x^3y-6xy^2)(x^2-y)^3-(-2x^4y-3x^2y^2+y^3)\cdot 3(x^2-y)^2\cdot 2x}{(x^2-y)^6} = \\ &= \frac{(-8x^3y-6xy^2)(x^2-y)-6x(-2x^4y-3x^2y^2+y^3)}{(x^2-y)^4} = \frac{4x^5y+20x^3y^2}{(x^2-y)^4}\end{aligned}$$

Podobnie określamy pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Możemy przyjąć następującą definicję indukcyjną. Przypuśćmy, że dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ i dowolnego układu indeksów $i_1, i_2, \ldots, i_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mamy określone pochodne m-tego rzędu

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}}.$$

Wtedy dla dowolnego układu indeksów $j_1, j_2, \ldots, j_m, j_{m+1} \in \{1, 2, \ldots, n\}$ definiujemy pochodną cząstkową rzędu $m+1$:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_m} \partial x_{j_{m+1}}} = \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_m} \partial x_{j_{m+1}}}.$$

Zwróćmy jeszcze raz uwagę na wyniki obliczeń z Przykładu 11.110. Obliczyliśmy tam cztery pochodne cząstkowe drugiego rzędu: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Zauważmy, że dwie spośród nich, tzw. *pochodne mieszane* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, są równe. Z drugiej strony, w Przykładzie 11.111 obliczyliśmy pochodne 3-rzędu $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ i $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ i one też okazały się być równe. Wygląda to tak, że wzór pochodnej zależy od ilości symboli ∂x i ∂y w mianowniku, a nie zależy od ich kolejności.

Istotnie, prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 11.112. (Twierdzenie Schwarza) *Jeśli wszystkie pochodne mieszane względem pewnych zmiennych są ciągłe w danym punkcie, ich wartość zależy wyłącznie od tego, względem których zmiennych różniczkujemy i ile-krotnie, natomiast nie zależy od kolejności w jakiej przeprowadza się różniczkowania.*

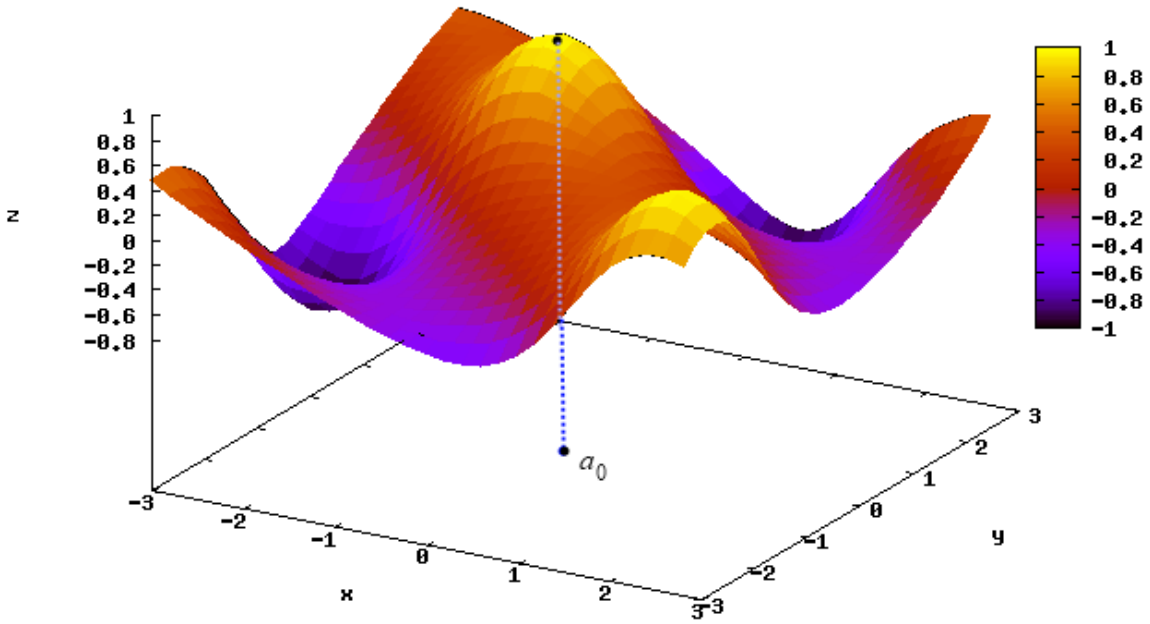
ROZDZIAŁ 12

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Rozdział ten będzie poświęcony problemowi wyznaczania ekstremów funkcji wielu zmiennych. Materiał ten jest uogólnieniem twierdzeń zawartych w Rozdziałach 7.6.2 i 7.6.4.

12.1. Ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych

12.1.1. Określenie ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych. Sytuacja jest analogiczna do tej opisanej w Rozdziale 7.6.2. Tym razem zakładamy, że $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$. Spójrzmy na rysunek, który przedstawia wykres pewnej funkcji dwóch zmiennych. Wykres



ten jest pewną „pofałdowaną” powierzchnią w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Składa się on z tych punktów $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, dla których spełniona jest równość $z = f(x, y)$. Kolorami, wg dołączonej legendy, zwizualizowane są wartości funkcji f. Fragmenty w kolorze żółtym leżą najwyżej, zaś fragmenty ciemnofioletowe – najniżej. Na rysunku zaznaczyliśmy pewien punkt $a_0 \in \mathbb{R}^2$,

któremu odpowiada „szczyt” na wykresie. Jest to punkt, w którym funkcja f przyjmuje największą wartość spośród wszystkich punktów leżących w jego pobliżu. Analogicznie do przypadku jednowymiarowego powiemy, że w punkcie a_0 funkcja f osiąga *maksimum lokalne*. Podobnie, punkty wykresu w kolorze ciemnofioletowym odpowiadają *minimom lokalnym*.

Definicja 12.1. Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie określona na pewnym otoczeniu $K_{a_0,\delta}$ punktu a_0. Mówimy, że funkcja f osiąga w punkcie a_0 *maksimum lokalne*, jeśli istnieje otoczenie punktu a_0 takie, że $f(a_0)$ jest największą wartością funkcji spośród wartości przyjmowanych przez funkcję f na całym tym otoczeniu. Można to zapisać

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, a \in X :\ 0 < d(a, a_0) < \delta \ \Rightarrow\ f(a_0) > f(a). \tag{12.1}$$

Analogicznie, funkcja f osiąga w punkcie a_0 *minimum lokalne*, jeśli istnieje otoczenie punktu a_0 takie, że $f(a_0)$ jest najmniejszą wartością funkcji spośród wartości przyjmowanych przez funkcję f na całym tym otoczeniu, co można zapisać

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X :\ 0 < d(a, a_0) < \delta \ \Rightarrow\ f(a_0) < f(a). \tag{12.2}$$

Przykład 12.2. Niech $f(x, y) = 2^{-x^2-y^2}$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Rozważmy punkt $a_0 = (0, 0)$. Ponieważ $x^2 + y^2 > 0$, gdy $(x, y) \neq (0, 0)$, mamy nierówność

$$f(x, y) = 2^{-(x^2+y^2)} < 2^0 = f(0, 0)$$

dla wszystkich $(x, y) \neq (0, 0)$. Wynika stąd, że funkcja f przyjmuje w punkcie $(0, 0)$ maksimum lokalne.

12.1.2. Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego. Naszym celem jest teraz wykorzystanie rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych do wyznaczania ekstremów lokalnych. Najpierw wprowadzimy pojęcie *punktu krytycznego* w kontekście funkcji wielu zmiennych.

Definicja 12.3. Niech $f : U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną na pewnym podzbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^n$. Mówimy, że punkt $a_0 \in U$ jest *punktem krytycznym* funkcji f, jeśli wszystkie pochodne cząstkowe przyjmują wartość zero w tym punkcie, tzn.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_0) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Przykład 12.4. Rozważmy funkcję dwóch zmiennych $f(x, y) = 2^{-x^2-y^2}$ z Przykładu 12.2. Sprawdzimy, że punkt $a_0 = (0, 0)$, w którym stwierdziliśmy istnienie ekstremum lokalnego, jest

krytyczny. Obliczamy pochodne cząstkowe funkcji f:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2^{-x^2-y^2}\ln 2\cdot(-2x) = -2x\cdot 2^{-x^2-y^2}\ln 2,\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2^{-x^2-y^2}\ln 2\cdot(-2y) = -2y\cdot 2^{-x^2-y^2}\ln 2.\end{aligned}$$

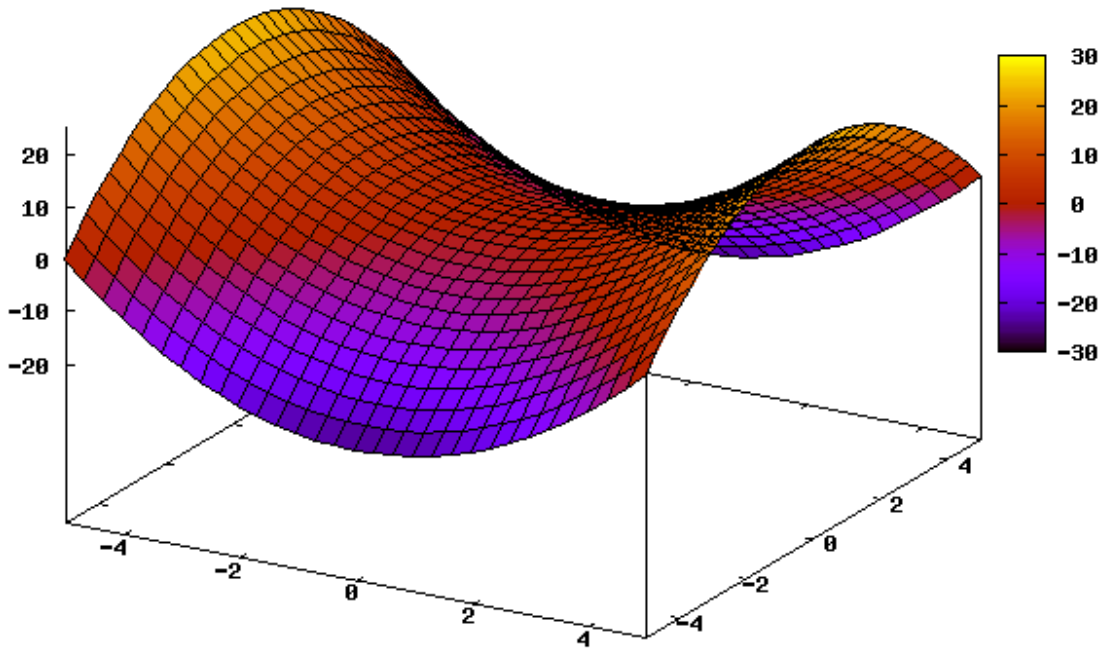
Podstawiając $x=0$ i $y=0$ łatwo sprawdzamy, że

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

W istocie mamy następujące twierdzenie (patrz Twierdzenie 7.36).

Twierdzenie 12.5. *Niech $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$, będzie funkcją określoną na pewnym otoczeniu $K_{a_0,\delta}$ punktu $a_0 \in X$ i niech f będzie różniczkowalna w punkcie a_0. Jeśli f osiąga w punkcie a_0 ekstremum lokalne, to a_0 jest punktem krytycznym funkcji f.*

Przykład 12.6. Rozważmy funkcję $f(x,y) = x^2 - y^2$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Jej wykres jest przed-



stawiony na rysunku. Niech $a_0 = (0,0)$. Pochodne cząstkowe funkcji f wyrażają się wzorami:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y.$$

Wynika stąd, że

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

czyli punkt $a_0 = (0,0)$ jest krytyczny. Jak jednak widać z rysunku, funkcja f nie osiąga w tym punkcie ekstremum. Ze względu na charakterystyczny kształt wykresu w otoczeniu takiego punktu nazywamy go *punktem siodłowym*.

Wniosek 12.7. *Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 12.5 nie jest prawdziwe. Oznacza to, że istnieją punkty krytyczne, w których funkcja wielu zmiennych nie osiąga ekstremum lokalnego.*

Przykład 12.8. Niech $f(x,y) = 3x^2 + 3xy - y^2 - 15x$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wyznaczymy punkty krytyczne tej funkcji.

Obliczamy pochodne cząstkowe funkcji f:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6x + 3y - 15, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3x - 2y. \end{aligned}$$

Punkt krytyczny to taki punkt, w którym obie pochodne cząstkowe się zerują. Chcąc wyznaczyć jego współrzędne (x,y) musimy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 6x + 3y - 15 &= 0 \\ 3x - 2y &= 0 \end{cases}$$

Jeśli przekształcimy ten układ do postaci

$$\begin{cases} 2x + y &= 5 \\ 3x - 2y &= 0 \end{cases}$$

to możemy rozwiązać go metodą Cramera (wyznacznikową). Obliczamy

$$W = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7, \qquad W_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -10, \qquad W_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15.$$

Z faktu, że $W \neq 0$ wynika, że układ równań jest oznaczony, czyli ma dokładnie jedno rozwiązanie. Ze wzorów Cramera otrzymujemy

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{10}{7}, \qquad y = \frac{W_x}{W} = \frac{15}{7}.$$

Jedynym punktem krytycznym funkcji f jest więc punkt $\left(\frac{10}{7}, \frac{15}{7}\right)$. Z uwagi na Wniosek 12.7 nie jesteśmy na obecnym etapie w stanie stwierdzić, czy w tym punkcie f osiąga ekstremum

lokalne. Z Twierdzenia 12.5 wiemy jednak, że ten punkt jest jedyny, w którym ekstremum może być osiągnięty, czyli jest jedynym punktem „podejrzanym" o ekstremum.

Przykład 12.9. Niech $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wyznaczymy punkty krytyczne tej funkcji.

Obliczamy pochodne cząstkowe funkcji f:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 + 3y^2 - 6y, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 6xy - 6x. \end{aligned}$$

Rozwiązujemy teraz układ równań

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 6y &= 0 \\ 6xy - 6x &= 0 \end{cases}$$

Dzieląc obie strony obu równań przez odpowiednie współczynniki i wyłączając w drugim równaniu wspólny czynnik przed nawias otrzymujemy

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y &= 0 \\ x(y-1) &= 0 \end{cases}$$

Uwzględniając fakt, że drugie równanie jest spełnione, gdy $x = 0$ lub $y = 1$, możemy przedstawić nasz układ równań jako alternatywę dwóch układów

$$\text{(a)} \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \text{(b)} \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Rozwiązujemy te układy

$$\text{(a)} \begin{cases} y^2 - 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \text{(b)} \begin{cases} x^2 + 1 - 2 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{(a)} \begin{cases} y(y-2) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \text{(b)} \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Prowadzi to nas do następujących czterech rozwiązań

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Funkcja f ma zatem cztery punkty krytyczne: $P_1(0,0)$, $P_2(0,2)$, $P_3(-1,1)$ i $P_4(1,1)$. Są to jedyne punkty „podejrzane" o ekstremum.

12.1.3. Hesjan. Kilka informacji o macierzach. W rozdziale tym będziemy używali poznanego na zajęciach z Algebry Liniowej pojęcia macierzy. Nie będziemy przytaczali wszystkich definicji i twierdzeń. Jednak dla jasności wykładu zdefiniujemy i zilustujemy przykładami kilka niezbędnych pojęć.

12.1.3.1. *Macierz drugich pochodnych.* Ponieważ Twierdzenie 12.5 formułuje jedynie warunki konieczne istnienia ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych, potrzebujemy twierdzeń, które pozwalałyby weryfikować, czy w danym punkcie krytycznym funkcja faktycznie osiąga ekstremum.

Przypomnijmy, że w Rozdziale 7.6.4 sformułowaliśmy Twierdzenie 7.56, które podaje w języku własności pochodnych wyższych rzędów warunki wystarczające na to, by w danym punkcie funkcja osiągała ekstremum lokalne. Naszym celem jest podanie analogicznego warunku dla funkcji wielu zmiennych.

Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Załóżmy, że funkcja $f : U \to \mathbb{R}$ jest klasy $C^2(U)$. Oznacza to w szczególności, że w każdym punkcie $a \in U$ istnieje n^2 pochodnych cząstkowych drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Pochodne te w naturalny sposób można potraktować jako współczynniki macierzy kwadratowej wymiaru $n \times n$:

$$H_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{bmatrix} \tag{12.3}$$

Macierz $H_f(a)$ nazywamy czasami *Hesjanem* funkcji f w punkcie a.

Przykład 12.10. Rozważmy funkcję $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$ z Przykładu 12.9. Wyznaczymy hesjany dla wszystkich punktów krytycznych tej funkcji, które wyznaczyliśmy w tamtym przykładzie. Potrzebne nam są pochodne cząstkowe drugiego rzędu. Pochodne pierwszego rzędu obliczyliśmy w Przykładzie 12.9. Korzystając z tego obliczamy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y - 6, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6y - 6, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x.$$

Dla dowolnego punktu (x, y) hesjan ma więc postać

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y-6 \\ 6y-6 & 6x \end{bmatrix}$$

Korzystając z tego wyznaczamy hesjany dla wszystkich punktów krytycznych:

$$\begin{aligned} H_f(0,0) &= \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \\ H_f(0,2) &= \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \\ H_f(-1,1) &= \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \\ H_f(1,1) &= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zapowiadane warunki wystarczające do istnienia ekstremum sformułowane będą w języku własności macierzy drugich pochodnych. W następnym paragrafie przypomnimy kilka niezbędnych informacji dotyczących macierzy.

12.1.3.2. *Macierze określone.* Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech A będzie pewną macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$, tzn. A jest postaci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Przypomnijmy, że dla każdej macierzy kwadratowej można obliczyć wyznacznik $\det A$. Dla $n = 1, 2, 3$ wyznacznik oblicza się według następujących formuł

$$|a_{11}| = a_{11},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Do obliczania wyznaczników macierzy wyższych wymiarów stosuje się tzw. rozwinięcie Laplace'a względem wybranej kolumny (szczegóły można znaleźć w książce [**1**]).

Przykład 12.11. Obliczymy wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 2 - 4\cdot 5 = -26.$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -5 \end{vmatrix} =$$
$$= (-2)\cdot(-2)\cdot(-5) + 4\cdot 0\cdot 3 + (-1)\cdot 2\cdot 3 - (-2)\cdot 0\cdot 3 - 4\cdot 2\cdot(-5) - (-1)\cdot(-2)\cdot 3$$
$$= -20 + 0 - 6 - 0 + 40 - 6 = 8$$

Definicja 12.12. Niech A będzie dowolną macierzą kwadratową. *Minorem* macierzy A nazywamy wyznacznik dowolnej macierzy kwadratowej „zawartej" w A, tzn. takiej macierzy, którą można otrzymać z macierzy A poprzez wykreślenie pewnej ilości i/lub wierszy.

Przykład 12.13. Minorami macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

są następujące wyznaczniki

$$|a_{11}|, \quad |a_{12}|, \quad |a_{21}|, \quad |a_{22}|, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Przykład 12.14. Minorami wymiaru 2 macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

są następujące wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ponadto macierz A ma dziewięć minorów wymiaru 1 i jeden minor wymiaru 3.

Definicja 12.15. Niech A będzie macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$. Jeśli $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to *$i$-tym minorem głównym* macierzy A nazywamy liczbę

$$M_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ii} \end{vmatrix},$$

czyli minor, który powstanie poprzez wykreślenie ostatnich $n - i$ wierszy i kolumn w macierzy A.

Przykład 12.16. Dla każdej macierzy kwadratowej wymiaru $n \times n$ mamy

$$M_1 = a_{11}, \qquad M_n = \det A.$$

W szczególności, jeśli macierz A jest wymiaru 2×2, to ma ona dokładnie dwa minory główne:

$$M_1 = a_{11}, \qquad M_2 = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Przykład 12.17. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy minory główne macierzy A:

$$M_1 = 1, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2.$$

Przypomnijmy, że macierz kwadratową A nazywamy *symetryczną*, jeśli $a_{ij} = a_{ji}$ dla wszystkich $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Przykład 12.18. Macierz A z Przykładu 12.17 jest symetryczna.

Możemy teraz sformułować kluczową dla nas definicję.

Definicja 12.19. Niech A będzie symetryczną macierzą kwadratową wymniaru $n \times n$. Mówimy, że macierz A jest *dodatnio określona*, jeśli wszystkie minory główne tej macierzy są dodatnie, tzn.

$$M_i > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12.4}$$

Mówimy, że macierz A jest *ujemnie określona*, jeśli macierz $-A$ jest dodatnio określona.

Przykład 12.20. Rozważmy macierz A z Przykładu 12.17. Jest to macierz symetryczna, której wszystkie minory główne są dodatnie. Macierz A jest więc dodatnio określona.

Przykład 12.21. Niech

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

Macierz A jest symetryczna. Obliczamy jej minory główne:

$$\begin{aligned} M_1 &= -3 < 0, \\ M_2 &= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 5 > 0, \\ M_3 &= \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -17 < 0. \end{aligned}$$

Ponieważ nie wszystkie minory główne są dodatnie, macierz ta nie jest dodatnio określona. Zbadajmy zatem, czy macierz A jest ujemnie określona. W myśl Definicji 12.19 należy zbadać, czy macierz $-A$ jest dodatnio określona. Macierz $-A$ jest równa

$$-A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix},$$

a jej minory główne

$$\begin{aligned} M_1' &= 3 > 0, \\ M_2' &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0, \\ M_3' &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 17 > 0. \end{aligned}$$

Wynika z tego, że macierz $-A$ jest dodatnio określona, a co za tym idzie, macierz A jest ujemnie określona.

Twierdzenie 12.22. *Niech A będzie symetryczną macierzą kwadratową wymiarową wymiaru $n \times n$. Macierz A jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$*

spełniona jest nierówność

(12.5) $$(-1)^i M_i > 0.$$

Warunek (12.5) w powyższym twierdzeniu można zapisać też następująco:

(12.6) $$M_i \begin{cases} > 0, & \text{gdy } i \text{ jest parzyste,} \\ < 0, & \text{gdy } i \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Dzięki temu twierdzeniu nie musimy wyznaczać macierzy $-A$ chcąc wiedzieć, czy macierz A jest ujemnie określona. Można to rozpoznać badając minory główne macierzy A – podobnie jak przy badaniu dodatniej określoności.

Przykład 12.23. Wróćmy do Przykładu 12.21. Obliczyliśmy tam, że minory główne macierzy A spełniają nierówności:

$$M_1 < 0, \qquad M_2 > 0, \qquad M_3 < 0.$$

Ponieważ spełniony jest warunek (12.6), od razu możemy stwierdzić, że macierz A jest ujemnie określona.

Przykład 12.24. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy minory główne macierzy A:

$$\begin{aligned} M_1 &= 1 > 0, \\ M_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 < 0, \\ M_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12 < 0. \end{aligned}$$

Minory te nie spełniają ani warunku (12.4) ani (12.6). Macierz A nie jest zatem ani dodatnio określona, ani ujemnie określona. W tym wypadku mówimy, że macierz A jest *nieokreślona*.

Warunki (12.4) i (12.6) pozwalają na bardzo łatwe sformułowanie kryterium dodatniej i ujemnej określoności dla macierzy wymiaru 2×2

Wniosek 12.25. *Niech*

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$$

dla pewnych $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Macierz A jest określona (tzn. jest dodatnio określona lub ujemnie określona) wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta^2 < \alpha\gamma$. W tym wypadku

- *jeśli $\alpha > 0$, to macierz A jest dodatnio określona,*
- *jeśli $\alpha < 0$, to macierz A jest ujemnie określona.*

W zastosowaniach do badania ekstremów funkcji wielu zmiennych pojawi się jeszcze pojęcie macierzy *słabo określonej*.

Definicja 12.26. Niech A będzie symetryczną macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$. Mówimy, że macierz A jest

(i) *słabo dodatnio określona*, jeśli

$$M_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{12.7}$$

(ii) *słabo ujemnie określona*, jeśli

$$(-1)^i M_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12.8}$$

Oczywiście, z zestawienia warunków (12.4) i (12.6) z warunkami (12.7) i (12.8) otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 12.27. *Jeśli macierz A jest słabo dodatnio (ujemnie) określona, to jest dodatnio (ujemnie) określona.*

Kolejne twierdzenie opowiada o związkach między dodatnią a ujemną określonością macierzy.

Twierdzenie 12.28. *Niech A będzie symetryczną macierzą kwadratową.*

(1) *Jeśli macierz A jest dodatnio określona, to nie jest słabo ujemnie określona. I na odwrót, jeśli jest ujemnie określona, to nie jest słabo dodatnio określona.*

(2) *Macierz A jest jednocześnie słabo dodatnio określona i słabo ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $A = 0$ (tzn. wszystkie wyrazy macierzy A są zerami).*

Przykład 12.29. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 4 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy minory główne macierzy A

$$\begin{aligned} M_1 &= 1 > 0, \\ M_2 &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \\ M_3 &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 4 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Oczywiście żaden z warunków (12.4) i (12.6), bo te wymagają, by każdy minor był różny od zera. Macierz A nie jest więc ani dodatnio określona ani ujemnie określona. Ponieważ spełniony jest warunek (12.7), macierz A jest słabo dodatnio określona.

Przykład 12.30. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy minory główne macierzy A

$$\begin{aligned} M_1 &= 2 > 0, \\ M_2 &= \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ M_3 &= \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0. \end{aligned}$$

Macierz A nie spełnia żadnego z warunków (12.7), (12.8), w związku z czym nie jest w żaden sposób określona (nawet słabo).

Definicja 12.31. Macierz, która nie jest ani słabo dodatnio określona ani słabo ujemnie określona, nazywamy *macierzą nieokreśloną*.

Wniosek 12.32. *Niech A będzie symetryczną macierzą kwadratową. Jeśli wszystkie minory główne są różne od zera, to macierz A spełnia jeden z trzech następujących warunków:*

- *macierz A jest dodatnio określona,*
- *macierz A jest ujemnie określona,*
- *macierz A jest nieokreślona.*

12.1.4. Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego. Jesteśmy teraz gotowi do sformułowania kluczowego twierdzenia, które będziemy wykorzytywać do badania ekstemów lokalnych funkcji wielu zmiennych.

Będziemy zakładali w tym rozdziale, że funkcja $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, którą badamy, jest klasy $C^2(U)$, tzn. funkcja f ma dobrze określone na zbiorze U wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu. Przypomnijmy, że dla każdego punktu $a \in U$ możemy rozważać hesjan $H_f(a)$, czyli macierz drugich pochodnych określoną w (12.3).

Twierdzenie 12.33. *Niech a_0 będzie punktem krytycznym funkcji f.*

(1) *Jeśli hesjan $H_f(a_0)$ jest macierzą dodatnio określoną, to funkcja f osiąga maksimum lokalne w punkcie a_0.*

(2) *Jeśli hesjan $H_f(a_0)$ jest macierzą ujemnie określoną, to funkcja f osiąga minimum lokalne w punkcie a_0.*

(3) *Jeśli hesjan $H_f(a_0)$ jest macierzą nieokreśloną, to funkcja f nie osiąga ekstremum lokalnego w punkcie a_0.*

Uwaga 12.34. Może się zdarzyć, że macierz $H_f(a_0)$ nie spełnia żadnego założenia spośród tych wymienionych w punktach (1) – (3) powyższego twierdzenia. Taka sytuacja nastąpi, gdy hesjan $H(a_0)$ będzie macierzą słabo dodatnio określoną, ale nie dodatnio określoną, albo gdy hesjan będzie macierzą słabo ujemnie określoną, ale nie ujemnie określoną[1]. W takich sytuacjach funkcja f może osiągnąć ekstremum lokalne w punkcie a_0, ale może też być tak, że ekstremum w tym punkcie nie jest osiągnięte.

Przykład 12.35. Niech $f(x, y, z) = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$. Wyznaczymy punkty, w których f osiąga ekstremum.

Najpierw wyznaczymy punkty krytyczne funkcji f. Obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y - 2z, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y + 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -2x + 4z.$$

[1] Z Wniosku 12.32 wynika, że w takich sytuacjach istnieją minory główne macierzy, które są równe zero.

Musimy teraz rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 3x^2 + y - 2z & = 0 \\ x + 2y + 3 & = 0 \\ -2x + 4z & = 0 \end{cases}$$

Jest on równoważny układowi

$$\begin{cases} 3x^2 + y - 2z = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ z = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

Dalej, dokonując odpowiednich podstawień w pierwszym równaniu otrzymujemy równanie kwadratowe

$$3x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = 0,$$

którego rozwiązaniami są $x_1 = -\frac{1}{2}$ i $x_2 = 1$. Otrzymujemy więc dwa punkty krytyczne:

$$a_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right), \qquad a_2 = \left(1, -2, \frac{1}{2}\right).$$

Obliczamy teraz pochodne rzędu drugiego:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0.$$

(Oczywiście, z uwagi na Twierdzenie 11.112 nie musieliśmy obliczać wszystkich pochodnych mieszanych.) Dla dowolnego punktu (x, y, z) hesjan ma postać

$$H_f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6x & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Dla punktów krytycznych otrzymujemy więc następujące macierze

$$H_f(a_1) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad H_f(a_2) = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy teraz minory główne dla obu hesjanów:

$$a_1: \quad M_1 = -3 < 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 < 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

$$a_2: \quad M_1 = 6 > 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11 > 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

Stwierdzamy, że macierz $H_f(a_1)$ jest nieokreślona, zaś macierz $H_f(a_2)$ jest dodatnio określona. Funkcja f osiąga zatem minimum lokalne w punkcie $\left(1, -2, \frac{1}{2}\right)$ i jest to jedyne ekstremum funkcji f.

Przykład 12.36. Wróćmy do funkcji $f(x,y) = x^3+3xy^2-6xy$ z Przykładu 12.9. W Przykładzie 12.10 wyznaczyliśmy hesjany we wszystkich punktach krytycznych funkcji f. Ponieważ są to macierze wymiaru 2×2, możemy ich określoność zbadać przy pomocy Wniosku 12.25:

- $H_f(0,0)$ jest nieokreślona, bo $\det H_f(0,0) = -36 < 0$,
- $H_f(0,2)$ jest nieokreślona, bo $\det H_f(0,2) = -36 < 0$,
- $H_f(-1,1)$ jest ujemnie określona, $\det H_f(-1,1) = 36 > 0$ i $M_1 = -6 < 0$,
- $H_f(1,1)$ jest dodatnio określona, $\det H_f(-1,1) = 36 > 0$ i $M_1 = 6 > 0$.

W związku z tym stwierdzamy, że w punkcie $(-1,1)$ funkcja f osiąga maksimum lokalne, zaś w punkcie $(1,1)$ – minimum lokalne.

Korzystając z Wniosku 12.25 możemy podać następujące warunki dla funkcji dwóch zmiennych.

Twierdzenie 12.37. *Załóżmy, że $f : U \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy $C^2(U)$ dla pewnego zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^2$. Niech $a_0 \in U$ będzie punktem krytycznym funkcji f.*

(i) *Jeśli* $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_0)\right)^2 < \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_0)$, *to f osiąga ekstremum lokalne w punkcie a_0. Typ tego ekstremum:*

(a) *maksimum, jeśli* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$;

(b) *minimum, jeśli* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$.

(ii) *Jeśli* $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_0)\right)^2 > \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_0)$, *to f nie osiąga ekstremum lokalnego w punkcie a_0.*

Przykład 12.38. Niech $f(x,y) = (1+e^x)\cos y + xe^x$. Zbadamy ekstrema lokalne tej funkcji.

Obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + e^x + xe^x = e^x(\cos y + x + 1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -(1+e^x)\sin y.$$

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} e^x(\cos y + x + 1) = 0 \\ -(1+e^x)\sin y = 0 \end{cases}$$

Z drugiego równania wynika, że $y = m\pi$ dla pewnej liczby całkowitej $m \in \mathbb{Z}$. Wtedy z pierwszego równania dostajemy warunek

$$x = -1 - \cos m\pi.$$

Jeśli m jest liczbą parzystą, to $\cos m\pi = 1$ i $x = -2$, jeśli zaś liczba m jest nieparzysta, to $\cos m\pi = -1$ i $x = 0$. Zbiór punktów krytycznych wygląda zatem nastepująco

$$\{(-2, 2k\pi) : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0, (2k+1)\pi) : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Obliczamy teraz pochodne drugiego rzędu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^x(\cos y + x + 1) + e^x = e^x(\cos y + x + 2), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -e^x \sin y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -(1 + e^x)\cos y. \end{aligned}$$

Otrzymujemy ogólną postać macierzy drugich pochodnych

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} e^x(\cos y + x + 2) & -e^x \sin y \\ -e^x \sin y & -(1 + e^x)\cos y \end{bmatrix}.$$

Obliczamy hesjany dla punktów krytycznych. Niech $k \in \mathbb{Z}$. Mamy wtedy

$$H_f(-2, 2k\pi) = \begin{bmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & -(1 + e^{-2}) \end{bmatrix}, \qquad H_f(0, (2k+1)\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

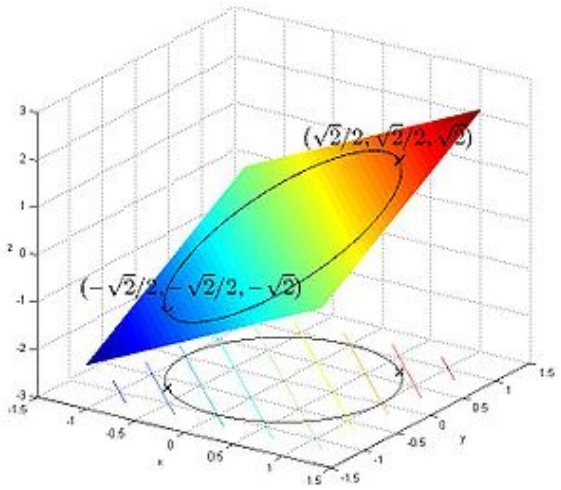
Macierz $H_f(-2, 2k\pi)$ jest nieokreślona, zaś macierz $H_f(0, (2k+1)\pi)$ jest dodatnio określona. Funkcja f osiąga zatem minimum lokalne w każdym punkcie postaci $(0, (2k+1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

12.2. Ekstrema warunkowe funkcji wielu zmiennych

12.2.1. Określenie pojęcia ekstremum warunkowego. Załóżmy, że U jest pewnym obszarem otwartym w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i $f : U \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją ciągłą. W poprzednim rozdziale opisaliśmy problem wyznaczania punktów leżących wewnątrz obszaru U, w których funkcja f osiąga ekstremum warunkowe.

Czasami jednak będziemy mieli do czynienia z problemem wyznaczania ekstremów troszkę innego typu. Rozpocznijmy od pewnego przykładu. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji dwóch zmiennych zadanej wzorem $f(x, y) = x + y$. Wykresem tej funkcji jest płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ opisana równaniem $x + y - z = 0$. Oczywiście funkcja ta nie ma ekstremów lokalnych. Łatwo to widać z rysunku, można to też uzasadnić tym, że w każdym punkcie $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$, a więc f nie ma punktów stacjonarnych. Przypuśćmy teraz, że nie interesują nas

wartości funkcji f dla wszystkich argumentów z $\mathbb{R}^2$. Rozważamy podzbiór W dziedziny opisany równaniem $x^2 + y^2 = 1$. Jest to przedstawiony na rysunku okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1. Zauważmy, że temu okręgowi odpowiada pewien podzbiór wykresu. Są to te punkty wykresu, które są postaci $(x, y, f(x, y))$, gdzie $(x, y) \in W$. Możemy teraz zadać pytanie o to, jakie są ekstremalne wartości funkcji f, ale przy dodatkowym założeniu, że rozważamy tylko argumenty należące do koła W. Takie ekstremalne wartości będziemy nazywali *ekstremami warunkowymi*.



Na rysunku zaznaczono dwa takie ekstrema. W punkcie $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ funkcja f przyjmuje wartość $\sqrt{2}$, która jest największa spośród wszystkich wartości przyjętych na okręgu W, zaś w punkcie $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ funkcja f przyjmuje wartość $-\sqrt{2}$, która jest najmniejsza spośród wszystkich wartości przyjętych na okręgu W. W punkcie $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ funkcja f osiąga zatem maksimum warunkowe przy warunku $x^2 + y^2 = 1$, zaś w punkcie $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ funkcja f osiąga minimum warunkowe.

W ogólnej sytuacji będziemy rozważali pewną funkcję $f : U \to \mathbb{R}$ określoną na pewnym obszarze otwartym $U \subset \mathbb{R}^n$ i pewien warunek zadany równaniem $g(a) = 0$, gdzie $g : U \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją ciągłą. *Ekstremami warunkowymi* pod warunkiem $g(a) = 0$ nazywać będziemy wartości ekstremalne funkcji f obciętej do zbioru $W = \{a \in U : \ g(a) = 0\}$.

12.2.2. Rozwikłanie warunku. Rozważmy następujące dwa przykłady wprowadzające.

Przykład 12.39. Rozważmy funkcję $f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 4y - 1$. Interesują nas ekstrema tej funkcji pod warunkiem $2x + y + 1 = 0$.

Zauważmy, że zbiór, do którego obcinamy funkcję f jest prostą na płaszczyznie opisaną równaniem $y = -2x - 1$. Problem wyznaczenia ekstremów warunkowych sprowadza się zatem do problemu wyznaczenia ekstremów funkcji jednej zmiennej określonej wzorem

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x, -2x - 1) = x^2 + x(-2x - 1) - 2(-2x - 1)^2 + 2x + 4(-2x - 1) - 1 = \\ &= -9x^2 - 15x - 7 \end{aligned}$$

Obliczamy pochodną funkcji φ:

$$\varphi'(x) = -18x - 15$$

i wyznaczamy jej miejsce zerowe:

$$\varphi'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -18x - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{5}{6}.$$

Ponieważ $\varphi''(x) = -18 < 0$, funkcja φ przyjmuje w punkcie $x = -\frac{5}{6}$ maksimum lokalne. Z równania opisującego warunek wynika, że jeśli $x = -\frac{5}{6}$, to $y = -2 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) - 1 = -\frac{8}{3}$. Zatem w punkcie $\left(-\frac{5}{6}, -\frac{8}{3}\right)$ funkcja f przyjmuje maksimum warunkowe.

Przykład 12.40. Rozważmy funkcję $f(x, y, z) = x + y + z$ określoną dla wszystkich $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ takich, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Interesują nas ekstrema tej funkcji pod warunkiem $x + y - xyz = 0$.

Z równania określającego warunek wyznaczamy zmienną z:

$$z = \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. \tag{12.9}$$

Rozważamy teraz funkcję dwóch zmiennych φ określoną wzorem

$$\varphi(x, y) = f\left(x, y, \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Musimy teraz wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji φ. Najpierw obliczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x^2}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}.$$

Wyznaczamy punkty krytyczne funkcji φ rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{y^2} = 0 \end{cases}$$

Jest on równoważny układowi

$$\begin{cases} x = -1 \ \vee \ x = 1 \\ y = -1 \ \vee \ y = 1 \end{cases}$$

Mamy zatem cztery punkty krytyczne: $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$.
Obliczamy teraz pochodne drugiego rzędu funkcji φ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Stąd otrzymujemy ogólną postać hesjanu

$$H_\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{y^3} \end{bmatrix}.$$

i hesjany dla punktów krytycznych

$$H_\varphi(-1,-1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad H_\varphi(-1,1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$H_\varphi(1,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad H_\varphi(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Macierze $H_\varphi(-1,1)$ i $H_\varphi(1,-1)$ są nieokreślone. Macierz $H_\varphi(-1,-1)$ jest ujemnie określona, a macierz $H_\varphi(1,1)$ jest dodatnio określona. Funkcja φ osiąga więc w punkcie $(-1,-1)$ maksimum lokalne, a w punkcie $(1,1)$ minimum lokalne.

Z równania (12.9) wnioskujemy

$$\begin{aligned} (x,y) = (-1,-1) &\quad\Rightarrow\quad z = -2, \\ (x,y) = (1,1) &\quad\Rightarrow\quad z = 2. \end{aligned}$$

Zatem funkcja f osiąga maksimum warunkowe w punkcie $(-1,-1,-2)$ i minimum warunkowe w punkcie $(1,1,2)$.

Powyższe dwa przykłady dotyczyły pewnej szczególnej sytuacji, którą teraz opiszemy.

Definicja 12.41. Niech $g : U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie pewną funkcją ciągłą. Powiemy, że funkcja $\psi : V \to \mathbb{R}$, gdzie $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$, jest *rozwikłaniem* warunku $g(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) = 0$, jeśli

(1) dla każdego $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)}) \in V$

$$\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)}, \psi(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)})\right) \in U,$$

(2) dla każdego $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)}) \in V$

$$g\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)}, \psi(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)})\right) = 0.$$

(3) zachodzi równość

$$\begin{aligned} &\left\{\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)}, \psi(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)})\right) : \ (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)}) \in V\right\} = \\ &= \left\{(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)}, x^{(n)}) : \ g(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)}, x^{(n)}) = 0\right\}. \end{aligned}$$

Przykład 12.42. W Przykładzie 12.39 $n = 2$ i warunek zadany jest funkcją dwóch zmiennych $g(x,y) = 2x + y + 1$. Zatem rozwikłanie warunku powinno być funkcją jednej zmiennej. Jak wyliczyliśmy, jest nim funkcja $\psi(x) = -2x - 1$.

Przykład 12.43. Z kolei, w Przykładzie 12.40 wymiar $n = 3$, a warunek to równanie wyznaczone przez funkcję trzech zmiennych $g(x, y, z) = x + y - xyz$. Rozwikłaniem tego warunku jest wyznaczona przez nas funkcja dwóch zmiennych $\psi(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Jak mogliśmy to zaobserować w dwóch powyższych przykładach, metoda wyznaczania ekstremum lokalnego, gdy da się rozwikłać warunek, sprowadza się do następujących kroków:

(1) znaleźć rozwikłanie ψ,

(2) wyznaczyć wzór funkcji $n-1$ zmiennych

$$\varphi(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)}) = f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)}, \psi(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-1)})\right),$$

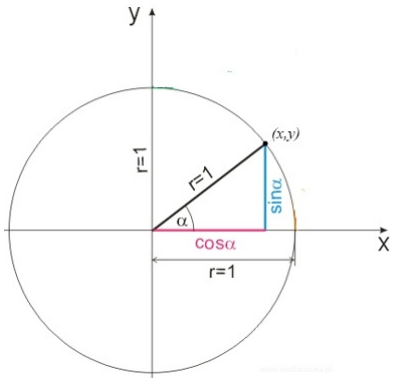
(3) zbadać ekstrema lokalne funkcji φ,

(4) oznaczyć ekstrema warunkowe w następujący sposób: jeśli funkcja φ osiąga ekstremum lokalne w punkcie $(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(n-1)})$, to f osiąga ekstremum warunkowe w punkcie

$$\left(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(n-1)}, \psi(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(n-1)})\right).$$

12.2.3. Parametryzacja krzywej. Opisana w poprzednim rozdziale metoda rozwikłania warunku me tę wadę, że nie zawsze można ją stosować. Zbiór W nie zawsze jest wykresem jakiejś funkcji $n-1$ zmiennych ψ. Taka sytuacja ma np. miejsce w przykładzie omawianym w Rozdziale 12.2.1 na stronie 258. Problem wyznaczenia ekstremów warunkowych dla tego przykładu rozwiążemy stosując metodę *parametryzacji* zbioru W.

Przypomnijmy, że rozważamy funkcję dwóch zmiennych $f(x, y) = x + y$ i warunek zadany równaniem $x^2 + y^2 = 1$. Jak wiadomo, równanie to opisuje koło o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1. Jak widać z załączonego rysunku, zastosowanie prostych zależności trygonometrycznych prowadzi do wniosku, że współrzędne dowolnego punktu (x, y) należącego do okręgu są postaci $x = \cos\alpha$ i $y = \sin\alpha$, gdzie $\alpha \in [0, 2\pi]$.



Chcą więc wyznaczyć ekstremalne wartości funkcji f obciętej do okręgu możemy rozważyć następującą funkcję jednej zmiennej

$$\varphi(\alpha) = f(\cos\alpha, \sin\alpha) = \cos\alpha + \sin\alpha.$$

Problem wyznaczenia ekstremów warunkowych sprowadza się zatem do problemu wyznaczenia ekstremów lokalnych funkcji φ. Ten zaś rozwiązujemy standardowo. Najpierw obliczamy pochodną funkcji φ:

$$\varphi'(\alpha) = -\sin\alpha + \cos\alpha.$$

Następnie wyznaczamy miejsca zerowe funkcji φ':

$$\varphi'(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\alpha = \cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \vee \alpha = \frac{5\pi}{4}.$$

Obliczamy drugą pochodną, aby zbadać, czy w wyznaczonych punktach krytycznych funkcja ϕ osiąga ekstrema:

$$\varphi''(\alpha) = -\cos\alpha - \sin\alpha$$

Obliczamy wartości φ'' w punktach krytycznych:

$$\begin{aligned} \varphi''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}, \\ \varphi''\left(\frac{5\pi}{4}\right) &= -\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że w punkcie $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ funkcja φ osiąga maksimum, zaś w punkcie $\alpha_2 = \frac{5\pi}{4}$ osiąga minimum. Wyznaczonym wartościom parametru α odpowiadają punkty na płaszczyznie:

$$\begin{aligned} a_1 &= (\cos\alpha_1, \sin\alpha_1) = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ a_2 &= (\cos\alpha_2, \sin\alpha_2) = \left(\cos\frac{5\pi}{4}, \sin\frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

Zatem w punkcie $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ funkcja f osiąga maksimum warunkowe na okręgu, zaś w punkcie $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – minimum warunkowe. Zgadza się to z obserwacjami poczynionymi na podstawie rysunku ze strony 258.

Ogólnie metodę parametryzacji będziemy stosować, gdy zbiór W, do którego zawężamy funkcję, jest krzywą. Pojęcie krzywej będziemy dyskutowali bardziej szczegółowo w ostatnim rozdziale. Na nasz obecny użytek powiemy, że *krzywą* w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ będziemy nazywali funkcję ciągłą $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, gdzie $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. Często mówiąc „krzywa" mamy na myśli obraz funkcji γ, tzn. zbiór $\{\gamma(t) : \ t \in [\alpha, \beta]\} \subset \mathbb{R}^n$. W praktyce też często będziemy utożsamiali te dwa pojęcia. Mówimy też czasami, że funkcja γ opisuje *parametryzację* krzywej w tym sensie, że każdemu punktowi „krzywej" rozumianej jako pewien podzbiór w $\mathbb{R}^n$ odpowiada jakaś wartość parametru $t \in [\alpha, \beta]$. Chcąc zatem opisać jakiś punkt na krzywej, wystarczy podać wartość parametru t, której ten punkt (faktycznie równy wartości $\gamma(t)$) odpowiada.

Przykład 12.44. W przykładzie opisanym na początku tego rozdziału parametryzacja koła opisana jest funkcją $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ zadaną wzorem $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ dla $t \in [0, 2\pi]$.

Zauważmy, że jeśli γ jest pewną krzywą, to dla każdego $t \in [\alpha, \beta]$ punkt $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ jest ciągiem n liczb rzeczywistych, tzn. jest postaci

$$\gamma(t) = (\gamma^{(1)}(t), \gamma^{(2)}(t), \ldots, \gamma^{(n)}(t)),$$

gdzie $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(n)}$ są pewnymi funkcjami rzeczywistymi określonymi na przedziale $[\alpha, \beta]$, czyli $\gamma^{(i)} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$. W przypadku krzywej w $\mathbb{R}^2$ będziemy pisać $(x(t), y(t))$ zamiast $(\gamma^{(1)}(t), \gamma^{(2)}(t))$, zaś dla krzywej w $\mathbb{R}^3$ będziemy pisać $(x(t), y(t), z(t))$ zamiast $(\gamma^{(1)}(t), \gamma^{(2)}(t), \gamma^{(3)}(t))$.

Twierdzenie 12.45. *Funkcja $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\gamma^{(i)} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ jest ciągła dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Procedurę wyznaczania ekstremów warunkowych funkcji f na krzywej γ można streścić w następujących krokach:

(1) wyznaczyć wzór funkcji γ (czyli wzory funkcji $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(n)}$), jeśli nie jest jawnie podany,

(2) wyznaczyć wzór funkcji jednej zmiennej $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, gdzie

$$\varphi(t) = f\left(\gamma^{(1)}(t), \gamma^{(2)}(t), \ldots, \gamma^{(n)}(t)\right),$$

(3) wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji jednej zmiennej φ,

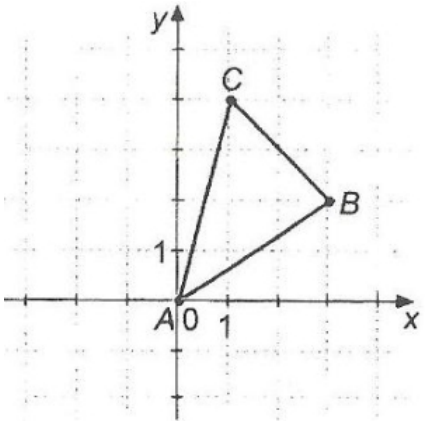
(4) oznaczyć ekstrema warunkowe w następujący sposób: jeśli funkcja φ osiąga ekstremum lokalne w punkcie t_0, to f osiąga ekstremum warunkowe w punkcie

$$\gamma(t_0) = \left(\gamma^{(1)}(t_0), \gamma^{(2)}(t_0), \ldots, \gamma^{(n)}(t_0)\right).$$

Definicja 12.46. Mówimy, że krzywa $\gamma : [\alpha, \beta]$ jest *gładka*, jeśli funkcja $\gamma^{(i)} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale domkniętym $[\alpha, \beta]$ i różniczkowalna na przedziale otwartym (α, β) dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$.

Mówimy, że krzywa γ jest *kawałkami gładka*, jeśli istnieje $N \in \mathbb{N}$ i liczby rzeczywiste $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N$ takie, że $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_N = \beta$ oraz każda funkcja $\gamma^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jest różniczkowalna na każdym przedziale (α_{j-1}, α_j) dla $j = 1, 2, \ldots, N$,

Przykład 12.47. Niech $f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2 + 2x - 6y - 1$. Wyznaczymy ekstrema warunkowe funkcji f na krzywej, która jest brzegiem trójkąta przedstawionego na rysunku



Brzeg trójkąta jest krzywą kawałkami gładką. Można go sparametryzować funkcją

$$\gamma : [0,3] \to \mathbb{R}^2,$$

gdzie $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ i funkcje x i y zadane są wzorami

$$x(t) = \begin{cases} 3t, & \text{gdy } t \in [0,1], \\ -2t+5, & \text{gdy } t \in (1,2], \\ -t+3, & \text{gdy } t \in (2,3], \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} 2t, & \text{gdy } t \in [0,1], \\ 2t, & \text{gdy } t \in (1,2], \\ -4t+12, & \text{gdy } t \in (2,3]. \end{cases}$$

Krzywa γ składa się z trzech „kawałków” $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, z których każdy jest funkcją liniową. Będziemy analizować zachowanie funkcji f na każdym z tych kawałków po kolei.

(I) Badamy krzywą $\gamma_1(t) = (3t, 2t)$ dla $t \in [0,1]$.

Funkcja f zawężona do krzywej γ_1 sprowadza się do funkcji $\varphi_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$\varphi_1(t) = f(3t, 2t) = (3t)^2 + 3t \cdot 2t - 2 \cdot (2t)^2 + 2 \cdot 3t - 6 \cdot 2t - 1 = 7t^2 - 6t - 1.$$

Jest to funkcja kwadratowa. Obliczamy pochodną

$$\varphi_1'(t) = 14t - 6,$$

wyznaczamy jej miejsce zerowe

$$\varphi_1'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 14t - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{3}{7}$$

i jej znaki

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 14t - 6 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t > \dfrac{3}{7} \\ \varphi_1'(t) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 14t - 6 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad t < \dfrac{3}{7} \end{cases}$$

Uwzględniając fakt, że funkcja φ_1 jest określona tylko na przedziale $[0,1]$ otrzymujemy następujące przedziały monotoniczności:

- φ_1 jest malejąca na przedziale $\left(0, \frac{3}{7}\right)$,
- φ_1 jest rosnąca na przedziale $\left(\frac{3}{7}, 1\right)$.

(II) Badamy krzywą $\gamma_2(t) = (-2t+5, 2t)$ dla $t \in [1,2]$.

Funkcja f zawężona do krzywej γ_2 sprowadza się do funkcji $\varphi_2 : [1,2] \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= f(-2t+5, 2t) = \\ &= (-2t+5)^2 + (-2t+5)\cdot 2t - 2\cdot(2t)^2 + 2(-2t+5) - 6\cdot 2t - 1 = \\ &= -8t^2 - 26t + 34.\end{aligned}$$

To też jest funkcja kwadratowa. Obliczamy pochodną

$$\varphi_2'(t) = -16t - 26,$$

wyznaczamy jej miejsce zerowe

$$\varphi_2'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -16t - 26 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{13}{8}$$

i jej znaki

$$\begin{cases} \varphi_2'(t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -16t - 26 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t < -\frac{13}{8} \\ \varphi_2'(t) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -16t - 26 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad t > -\frac{13}{8} \end{cases}$$

Funkcja φ_2 jest określona tylko na przedziale $[1,2]$. Z powyższych rachunków wynika, że:

- φ_2 jest malejąca na przedziale $(1,2)$.

(III) Badamy krzywą $\gamma_3(t) = (-t+3, -4t+12)$ dla $t \in [1,2]$.

Funkcja f zawężona do krzywej γ_3 sprowadza się do funkcji $\varphi_3 : [2,3] \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$\begin{aligned}\varphi_3(t) &= \\ &= f(-t+3, -4t+12) = \\ &= (-t+3)^2 + (-t+3)(-4t+12) - 2(-4t+12)^2 + 2(-t+3) - 6(-4t+12) - 1 = \\ &= -27t^2 + 184t - 310.\end{aligned}$$

Tu również wychodzi funkcja kwadratowa. Obliczamy pochodną

$$\varphi_3'(t) = -54t + 184,$$

wyznaczamy jej miejsce zerowe

$$\varphi_3'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -54t + 184 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{92}{27}$$

i jej znaki

$$\begin{cases} \varphi_3'(t) > 0 & \Leftrightarrow \quad -54t + 184 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t < \dfrac{92}{27} \\ \varphi_3'(t) < 0 & \Leftrightarrow \quad -54t + 184 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad t > \dfrac{92}{27} \end{cases}$$

Funkcja φ_3 jest określona tylko na przedziale $[2, 3]$. Z powyższych rachunków wynika, że:

- φ_3 jest rosnąca na przedziale $(2, 3)$.

Rozważmy teraz funkcję $\varphi : [0, 3] \to \mathbb{R}$ określoną jako $\varphi(t) = f(\gamma(t))$. Jest to funkcja, która składa się z „kawałków" φ_1, φ_2 i φ_3. Zatem ma ona następujące przedziały monotoniczności:

- φ jest rosnąca na przedziałach $\left(\frac{3}{7}, 1\right)$ i $(2, 3)$,
- φ jest malejąca na przedziałach $\left(0, \frac{3}{7}\right)$ i $(1, 2)$.

Weźmy jeszcze pod uwagę fakt, że γ jest krzywą zamkniętą, tzn. $\gamma(0) = \gamma(3)$. Wynika z tego, że $\varphi(0) = \varphi(3)$. Wynika stąd, że φ ma następujące ekstrema lokalne:

- maksima lokalne w punktach 0 (który możemy utożsamiać z punktem 3) i 1,
- minima lokalne w punktach $\frac{3}{7}$ i 2.

Ponieważ

$$\varphi(0) = (0, 0), \quad \varphi\left(\frac{3}{7}\right) = \left(\frac{9}{7}, \frac{6}{7}\right), \quad \varphi(1) = (3, 2), \quad \varphi(2) = (1, 4),$$

funkcja f przyjmuje następujące ekstrema warunkowe na krzywej γ:

- maksima w punktach $(0, 0)$ i $(3, 2)$,
- minima lokalne w punktach $\left(\frac{9}{7}, \frac{6}{7}\right)$ i $(1, 4)$.

12.2.4. Metoda mnożników Lagrange'a. Rozpatrujemy teraz ponownie ogólny problem wyznaczania ekstremów warunkowych funkcji $f : U \to \mathbb{R}$ przy warunku $g(x) = 0$. Zakładamy teraz, że funkcja f jest klasy $C^2(U)$, zaś funkcja g jest klasy $C^1(U)$.

Rozważmy funkcję $n + 1$ zmiennych $L : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x), \qquad x \in U,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Funkcję L nazywamy *funkcją Lagrange'a*, a parametr λ nosi nazwę *mnożnika Lagrange'a*. Metoda mnożników Lagrange'a wyznaczania ekstremów warunkowych polega na wyznaczaniu ekstremów lokalnych funkcji Lagrange'a. Mamy bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 12.48. *Jeśli funkcja f osiąga w punkcie $a_0 \in U$ ekstremum warunkowe, to dla pewnej wartości $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ spełniony jest następujący układ warunków:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}(a_0, \lambda_0) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_1}(a_0, \lambda_0) = 0 \\ \dots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n}(a_0, \lambda_0) = 0 \\ g(a_0) = 0 \end{cases}$$

Przykład 12.49. Jeszcze raz rozważmy przykład wprowadzający omawiany na początku Rozdziału 12.2.1 na stronie 258. Mamy tam funkcję dwóch zmiennych $f(x, y) = x + y$ i szukamy ekstremów przy warunku $x^2 + y^2 = 1$. Funkcja g ma zatem postać $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, a funkcja Lagrange'a

$$L(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Obliczamy pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\lambda x, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda y.$$

Twierdzenie 12.48 prowadzi nas do układu trzech równań z trzema niewiadomymi

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 2\lambda x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ równań:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ \left(\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ \lambda^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \right)$$

Otrzymaliśmy zatem dwa punkty, w których spełniony jest warunek konieczny istnienia ekstremum warunkowego: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Oczywiście Twierdzenie 12.48 formułuje jedynie warunek konieczny istnienia ekstremum warunkowego. Punkty spełniające ten warunek należy traktować jako punkty „podejrzane" o ekstremum.

Kolejne twierdzenie formułuje warunki wystarczające. Będziemy w nim używać oznaczenia (12.10)

$$H_L(a,\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(a,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(a,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3}(a,\lambda) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(a,\lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}(a,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}(a,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3}(a,\lambda) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n}(a,\lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1}(a,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2}(a,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2}(a,\lambda) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_n}(a,\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1}(a,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2}(a,\lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_3}(a,\lambda) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}(a,\lambda) \end{bmatrix}$$

Jest to hesjan funkcji L rozpatrywanej jako funkcja n zmiennych.

Twierdzenie 12.50. *Niech $a_0 \in U$. Załóżmy, że dla pewnej wartości $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ spełnione są założenia Twierdzenia 12.48.*

(1) *Jeśli $H_L(a_0,\lambda_0)$ jest macierzą dodatnio określoną, to funkcja f przyjmuje w punkcie a_0 minimum przy warunku $g(a)=0$.*

(2) *Jeśli $H_L(a_0,\lambda_0)$ jest macierzą ujemnie określoną, to funkcja f przyjmuje w punkcie a_0 maksimum przy warunku $g(a)=0$.*

(3) *Jeśli $H_L(a_0,\lambda_0)$ jest macierzą nieokreśloną, to funkcja f nie przyjmuje w punkcie a_0 ekstremum przy warunku $g(a)=0$.*

Przykład 12.51. Wróćmy do Przykładu 12.49. Chcąc zbadać, czy w wyznaczonych punktach „podejrzanych" są istotnie osiągane ekstrema warunkowe, sprawdzimy zachodzenie warunków sformułowanych w Twierdzeniu 12.50. Obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji L:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -2\lambda, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 0.$$

Stąd:

$$H_L(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{bmatrix}.$$

Dla punktów „podejrzanych” otrzymujemy następujące hesjany:

$$H_L\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix},\quad H_L\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\begin{bmatrix}-\sqrt{2} & 0\\ 0 & -\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

Macierz $H_L\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ jest dodatnio określona, zaś macierz $H_L\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ jest ujemnie określona. Oznacza to, że w punkcie $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ funkcja f przyjmuje minimum warunkowe, a w punkcie $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ przyjmuje maksimum warunkowe. Oczywiście, zgadza się to z wynikiem otrzymanym na stronie 262.

ROZDZIAŁ 13

Elementy analizy wektorowej

13.1. Iloczyn wektorowy

W Rozdziałach 11.1.2 i 11.1.3 omówiliśmy działania i operacje na wektorach w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Były to działania dodawania wektorów, mnożenia wektorów przez liczby i operacja iloczynu skalarnego. W tym rozdziale skupimy się na własnościach przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Z punktu widzenia fizyka przestrzeń ta jest o tyle ważna, że ona modeluje otaczającą nas przestrzeń fizyczną. Równania fizyki matematycznej, np. równania elektrodynamiki są zdefiniowane właśnie na przestrzeni trójwymiarowej.

Przypomnijmy, że z geometrycznego punktu widzenia możemy elementy przestrzeni $\mathbb{R}^n$ traktować dwojako: jako punkty w przetrzeni euklidesowej i jako wektory (patrz Rozdział 11.1.1). Elementy przestrzeni $\mathbb{R}^n$ traktowane jako punkty będziemy oznaczać matematyczną kursywą, np. $v, w, \ldots$, zaś elementy $\mathbb{R}^n$ traktowane jako wektory oznaczamy czcionką pogrubioną, np. $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots$. Podkreślmy, że niezależnie od interpretacji element przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest z matematycznego punktu widzenia zawsze ciągiem n liczb rzeczywistych.

Na zajęciach z Algebry Liniowej wprowadza się pojęcie *bazy liniowej* w przestrzeni euklidesowej[1] $\mathbb{R}^n$. Jest to układ wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ mający tę własność, że dla każdego wektora $\mathbf{v}$ istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n.$$

Oczywiście każda przestrzeń wektorowa posiada bardzo wiele baz liniowych.

Ustalmy teraz, że $n = 3$. Będziemy rozpatrywać *bazę kanoniczną* w przstrzeni $\mathbb{R}^3$. Składa się ona z następujących trzech wektorów:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1). \tag{13.1}$$

Zauważmy, że jeśli $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, to

$$\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k}.$$

[1] Oczywiście pojęcie bazy liniowej rozpatruje się w szerszej klasie przestrzeni liniowych, których szczególnymi przypadkami są przestrzenie euklidesowe.

Rozważmy teraz dwa wektory $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.

Definicja 13.1. *Iloczynem wektorowym* wektorów $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ nazywamy wektor $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ określony wzorem:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2w_3 - v_3w_2)\,\mathbf{i} + (v_3w_1 - v_1w_3)\,\mathbf{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\,\mathbf{k}. \tag{13.2}$$

Przykład 13.2. Niech $\mathbf{v} = (-3, 5, 1)$, $\mathbf{w} = (2, 1, -1)$. Wtedy

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= \big(5 \cdot (-1) - 1 \cdot 1\big)\mathbf{i} + \big(1 \cdot 2 - (-3) \cdot (-1)\big)\mathbf{j} + \big((-3) \cdot 1 - 5 \cdot 2\big)\mathbf{k} = \\ &= -6\,\mathbf{i} - \mathbf{j} - 13\,\mathbf{k} = (-6, -1, -13) \end{aligned}$$

Przykład 13.3. Niech $\mathbf{v} = (2, 5, -1)$, $\mathbf{w} = (-6, -15, 3)$. Wtedy

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= \big(5 \cdot 3 - (-1) \cdot (-15)\big)\mathbf{i} + \big((-1) \cdot (-6) - 2 \cdot 3\big)\mathbf{j} + \big(2 \cdot (-15) - 5 \cdot (-6)\big)\mathbf{k} = \\ &= 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = (0, 0, 0) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Uwaga 13.4. Zauważmy, że korzystając z definicji wyznacznika macierzy wymiaru 2×2 wzór (13.2) można również zapisać w następującej formie

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}. \tag{13.3}$$

Uwaga 13.5. Najłatwiejszym sposobem na zapamiętanie wzoru na iloczyn wektorowy jest zapisanie go w następującej postaci wyznacznika macierzy wymiaru 3×3

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{13.4}$$

Zwróćmy uwagę, że należy powyższy wzór traktować raczej jako pewną regułę mnemotechniczną niż ścisłą formułę matematyczną. W rzeczywistości wyznacznik definiuje się dla macierzy, której wyrazami są liczby rzeczywiste. Tutaj wyrazami w pierwszym wierszu są wektory.

Przykład 13.6. Niech $\mathbf{v} = (1, -2, 2)$ i $\mathbf{w} = (3, 2, -1)$. Wtedy

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k} - 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 8\mathbf{k} = \\ &= (-2, 7, 8) \end{aligned}$$

Twierdzenie 13.7. *Niech* $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Wtedy:*

(1) $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *(antyprzemienność);*
(2) $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ *(rozdzielność względem dodawania);*
(3) $(\alpha\mathbf{v}) \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times (\alpha\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ *(mieszana łączność z mnożeniem przez liczby);*
(4) $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + \mathbf{u} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ *(tożsamość Jacobiego).*

Przykład 13.8. Wróćmy do Przykładu 13.3. Obliczyliśmy, że dla podanych tam wektorów $\mathbf{v} = (2, 5, -1)$ i $\mathbf{w} = (-6, -15, 3)$ zachodzi równość $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$. Zauważmy, że zachodzi także równość $\mathbf{w} = -3\mathbf{v}$, czyli wektor $\mathbf{w}$ jest wielokrotnością wektora $\mathbf{v}$.

Mówimy, że wektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ są *współliniowe* (*liniowo zależne* lub *równoległe*), jeśli $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ lub $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ lub $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}$ dla pewnej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 13.9. *Niech* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. *Równość* $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$ *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory* $\mathbf{v}$ *i* $\mathbf{w}$ *są współliniowe.*

Przykład 13.10. Z powyższego twierdzenia wynika, że dla każdego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ zachodzi równość

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{13.5}$$

Uwaga 13.11. Z Twierdzenia 13.9 natychmiast wynika, że dla wektorów bazowych $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ mamy

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Ponadto, można łatwo uzsadnić równości

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

Równości te można wykorzystać przy obliczaniu iloczynu wektorowego dowolnych wektorów. Robimy przy tym użytek z własności opisanych w Twierdzeniu 13.7.

Przykład 13.12. Weźmy wektory $\mathbf{v} = (1, -2, 2)$ i $\mathbf{w} = (3, 2, -1)$ z Przykładu 13.6:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \\ &= (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \\ &= 3\mathbf{i} \times \mathbf{i} + 2\mathbf{i} \times \mathbf{j} - \mathbf{i} \times \mathbf{k} - 6\mathbf{j} \times \mathbf{i} - 4\mathbf{j} \times \mathbf{j} + 2\mathbf{j} \times \mathbf{k} + 6\mathbf{k} \times \mathbf{i} + 4\mathbf{k} \times \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \\ &= 2\mathbf{k} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k} + 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{i} = -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\end{aligned}$$

Uwaga 13.13. Dla dowolnych wektorów $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ spełnione są równości

$$\mathbf{v} \circ (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \circ (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0.$$

Oznacza to, że wektor $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ jest prostopadły do obu wektorów $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$. Ponieważ jest on niezerowy wtedy, gdy $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ wyznaczają płaszczyznę w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, to warunek ten jednoznacznie wyznacza kierunek wektora $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Zwrot tego wektora wyznaczamy przy pomocy tzw. reguły śruby prawoskrętnej.

Twierdzenie 13.14. *Dla dowolnych wektorów $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ zachodzi równość*

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 - (\mathbf{v} \circ \mathbf{w})^2.$$

Z Wniosku 11.10 wynika równość

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \vartheta,$$

gdzie $\vartheta \in [0, \pi]$ jest kątem (nieskierowanym) między wektorami $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$. Korzystając z jedynki trygonometrycznej otrzymujemy wniosek.

Wniosek 13.15. *Dla dowolnych wektorów $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ zachodzi równość*

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \sin \vartheta.$$

Uwaga 13.16. Z powyższego wzoru wynika, że długość iloczynu wektorowego $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ jest równa polu równoległoboku rozpiętego przez wektory $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$.

13.2. Pola wektorowe

13.2.1. Własności pól wektorowych. W Rozdziale 11 rozpatrywaliśmy funkcje, których dziedzinami były podzbiory przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a wartościami były liczbami rzeczywiste. Teraz rozważać będziemy ogólniejszą klasę funkcji. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Jeśli

$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, gdzie wartości $\mathbf{F}(a)$ dla $a \in U$ traktujemy jako wektory, to funkcję $\mathbf{F}$ nazywamy *polem wektorowym*. Ponieważ $\mathbf{F}(a) \in \mathbb{R}^m$ dla każdego $a \in \mathbb{R}^n$, możemy zapisać

$$\mathbf{F}(a) = (F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \ldots, F^{(m)}(a)),$$

$F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(m)} : U \to \mathbb{R}$ są pewnymi jednoznacznie wyznaczonymi funkcjami n zmiennych.

Oczywiście, podobnie jak dla rzeczywistych funkcji wielu zmiennych, jest sens mówić o ciągłych lub różniczkowalnych polach wektorowych. Pominiemy tutaj dosyć oczywiste definicje. Poprzestaniemy jedynie na sformułowaniu następujących kryteriów.

Twierdzenie 13.17. *Pole wektorowe $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągłe w punkcie $a_0 \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ funkcja $F^{(j)} : U \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie a_0.*

Twierdzenie 13.18. *Pole wektorowe $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalne w punkcie $a_0 \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ funkcja $F^{(j)} : U \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie a_0.*

Z ostatniego twierdzenia wynika, że jeśli pole $\mathbf{F}$ jest różniczkowalne w punkcie $a_0 \in U$, to dla każdej pary (i, j), gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, określona jest pochodna cząstkowa

$$\frac{\partial F^{(j)}}{\partial x_i}(a_0).$$

Jest zatem sens rozpatrywać macierz wymiaru $m \times n$

$$D\mathbf{F}(a_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x_1}(a_0) & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x_2}(a_0) & \ldots & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x_n}(a_0) \\ \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_1}(a_0) & \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_2}(a_0) & \ldots & \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x_n}(a_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^{(m)}}{\partial x_1}(a_0) & \frac{\partial F^{(m)}}{\partial x_2}(a_0) & \ldots & \frac{\partial F^{(m)}}{\partial x_n}(a_0) \end{bmatrix},$$

którą nazywamy *pochodną* pola $\mathbf{F}$ w punkcie a_0.

Przykład 13.19. Niech $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}^3$, gdzie $\mathbb{R}^3_+ = \{(x, y, z) : \ x, y, z \geq 0\}$, będzie zadana wzorem

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy^2 - 3x^z, y \sin(\pi xz), 2^{3x-z} + x \ln y).$$

Obliczamy pochodne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} &= 2y^2 - 3zx^{z-1} \\
\frac{\partial F^{(1)}}{\partial y} &= 4xy \\
\frac{\partial F^{(1)}}{\partial z} &= -3x^z \ln x \\
\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} &= \pi yz \cos(\pi xz) \\
\frac{\partial F^{(2)}}{\partial y} &= \sin(\pi xz) \\
\frac{\partial F^{(2)}}{\partial z} &= \pi xy \cos(\pi xz) \\
\frac{\partial F^{(3)}}{\partial x} &= 3 \cdot 2^{3x-z} + \ln y \\
\frac{\partial F^{(3)}}{\partial y} &= \frac{x}{y} \\
\frac{\partial F^{(3)}}{\partial z} &= -2^{3x-z}.
\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$D\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2y^2 - 3zx^{z-1} & 4xy & -3x^z \ln x \\ \pi yz \cos(\pi xz) & \sin(\pi xz) & \pi xy \cos(\pi xz) \\ 3 \cdot 2^{3x-z} + \ln y & \dfrac{x}{y} & -2^{3x-z} \end{bmatrix}.$$

Na przykład

$$D\mathbf{F}(1,1,1) = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -\pi & 0 & -\pi \\ 12 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

13.2.2. Pole gradientowe. Niech $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$, będzie funkcją różniczkowalną. Wtedy funkcja, która każdemu punktowi $a \in U$ przyporządkowuje gradient $\nabla f(a)$ jest polem wektorowym. W tym przypadku j-ta współrzędna tego pola jest po prostu równa $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$.

Przykład 13.20. Jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna, to

$$D(\nabla f)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{bmatrix}$$

Zatem

$$D(\nabla f)(a) = H_f(a),$$

gdzie $H_f(a)$ jest hesjanem zdefiniowanym w (12.3)

Pole gradientowe ma następującą własność wynikającą ze związków pochodnej kierunkowej z gradientem opisanych w Rozdziale 11.4.3 (patrz Twierdzenie 11.108)

Twierdzenie 13.21. *Niech $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, i niech $a_0 \in U$. Załóżmy, że $\nabla f(a_0) \neq \mathbf{0}$ i niech $\mathbf{v}_0 = \frac{1}{\|\nabla f(a_0)\|} \nabla f(a_0)$. Wtedy dla każdego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ takiego, że $\|\mathbf{v}\| = 1$, spełniona jest nierówność*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a_0) \leq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_0}(a_0). \tag{13.6}$$

Uwaga 13.22. Zauważmy, że wektor $\mathbf{v}_0$ ma długość 1:

$$\|\mathbf{v}_0 = \left\| \frac{1}{\|\nabla f(a_0)\|} \nabla f(a_0) \right\| = \frac{\|\nabla f(a_0)\|}{\|\nabla f(a_0)\|} = 1.$$

Nierówność (13.6) można interpretować w następujący sposób:

Gradient $\nabla f(a_0)$ wskazuje kierunek najszybszego wzrostu wartości funkcji f.

Przykład 13.23. Niech $f(x, y, z) = yx^{2y+z}$, gdzie $x, y, z \geq 0$. Niech $a_0 = (1, 1, 1)$. Znajdziemy kierunek najszybszego wzrostu funkcji f.

Obliczamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= y(2y+z)x^{2y+z-1},\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^{2y+z}+2yx^{2y+z}\ln x=(1+2y\ln x)x^{2y+z},\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= yx^{2y+z}\ln x.\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$\nabla f(1,1,1)=(3,1,0).$$

Długość wektora $\nabla f(1,1,1)$ wynosi $\sqrt{3^2+1^2+0^2}=\sqrt{10}$. Zatem kierunek najszybszej zmiany funkcji f jest wyznaczony przez wektor

$$\mathbf{v}_0=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}},0\right).$$

Definicja 13.24. Pole wektorowe $\mathbf{F}: U\to\mathbb{R}^3$ nazywamy *potencjalnym*, jeśli istnieje funkcja różniczkowalna $f: U\to\mathbb{R}$ taka, że

$$\mathbf{F}(a)=\nabla f(a),\qquad a\in U.$$

Funkcję f nazywamy wtedy *potencjałem* pola $\mathbf{F}$.

Przykład 13.25. Niech

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(2xy+3z^2,x^2,6xz).$$

Łatwo sprawdzić, że jeśli $f(x,y,z)=x^2y+3xz^2$, to zachodzi równość $\nabla f=\mathbf{F}$, zatem pole $\mathbf{F}$ jest potencjalne.

W dalszym ciągu poznamy sposób badania potencjalności pola wektorowego.

13.3. Pola wektorowe w $\mathbb{R}^3$

W rozdziale tym będziemy rozważać jedynie pola wektorowe określone na podzbiorach $\mathbb{R}^3$ o wartościach także w $\mathbb{R}^3$, tzn. $\mathbf{F}: U\to\mathbb{R}^3$, gdzie $U\subset\mathbb{R}^3$. Zwyczajowo wprowadzamy następujące oznaczenia współrzędnych pola $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big), \tag{13.7}$$

gdzie $P,Q,R: U\to\mathbb{R}$ są funkcjami trzech zmiennych.

13.3.1. Rotacja pola wektorowego. Zakładamy, że pole wektorowe $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^3$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^3$, jest różniczkowalne.

Definicja 13.26. *Rotacją* pola wektorowego (13.7) nazywamy pole wektorowe $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ zadane wzorem

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{13.8}$$

(Dla większej przejrzystości pominęliśmy w powyższym zapisie argumenty wszystkich funkcji)

Uwaga 13.27. Możemy symbolicznie zapisać wzór na rotację pola $\mathbf{F}$ w postaci macierzowej:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{13.9}$$

Wyliczając powyższy wyznacznik otrzymujemy

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{F} &= \frac{\partial R}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial Q}{\partial x}\mathbf{k} - \frac{\partial Q}{\partial z}\mathbf{i} - \frac{\partial R}{\partial x}\mathbf{j} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{k} = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Zatem przez analogię do formuły (13.4) możemy też symbolicznie zapisać wzór na rotację w następujący sposób:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}, \tag{13.10}$$

gdzie ∇ oznacza „wektor” $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

Przykład 13.28. Niech

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(2x^2 \sin y - \ln(1 + z^2), z - \cos y, xe^{xy}\right).$$

Wtedy mamy

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= 2x^2 \sin y - \ln(1 + z^2), \\ Q(x, y, z) &= z - \cos y, \\ R(x, y, z) &= xe^{xy}. \end{aligned}$$

Obliczamy potrzebne pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x^2 \cos y, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{2z}{1 + z^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = 1,$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} = (1+xy)e^{xy}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = x^2 e^{xy}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(x^2 e^{xy} - 1, -\frac{2z}{1+z^2} - (1+xy)e^{xy}, -2x^2 \cos y \right).$$

Przykład 13.29. Jeśli $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^3$, to ∇f jest polem wektorowym. Jest więc sens obliczać rotację tego pola. Rozważmy funkcję f zadaną wzorem

$$f(x,y,z) = x^2 e^{2x-y^2} \sin(yz).$$

Wtedy

$$\begin{aligned} &\nabla f(x,y,z) = \\ &= \left(2(x+x^2)e^{2x-y^2}\sin(yz), x^2(-2y\sin(yz) + z\cos(yz))e^{2x-y^2}, x^2 y e^{2x-y^2}\cos(yz) \right). \end{aligned}$$

Oznaczając przez P, Q, R odpowiednio pierwszą, drugą i trzecią współrzędną pola gradientowego ∇f obliczamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} &= x^2 e^{2x-y^2}\cos(yz) - 2x^2 y^2 e^{2x-y^2}\cos(yz) - x^2 yz e^{2x-y^2}\sin(yz) \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= x^2(-2y^2\cos(yz) + \cos(yz) - yz\sin(yz))e^{2x-y^2} \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= 2(x+x^2)ye^{2x-y^2}\cos(yz) \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= 2xye^{2x-y^2}\cos(yz) + 2x^2 y e^{2x-y^2}\cos(yz) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2x(-2y\sin(yz) + z\cos(yz))e^{2x-y^2} + 2x^2(-2y\sin(yz) + z\cos(yz))e^{2x-y^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 2(x+x^2)\left(-2ye^{2x-y^2}\sin(yz) + ze^{2x-y^2}\cos(yz)\right) \end{aligned}$$

Z powyższych rachunków wynikają równości

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Zatem

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Korzystając z Twierdzenia 11.112 można wykazać, że jest to fakt ogólny.

Twierdzenie 13.30. *Niech* $\mathbf{F}, \mathbf{G} : U \to \mathbb{R}^3$ *będą polami wektorowymi,* $f : U \to \mathbb{R}$ *funkcją trzech zmiennych i* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Wtedy zachodzą następujące równości:*

(1) $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot}\mathbf{F} + \operatorname{rot}\mathbf{G}$,
(2) $\operatorname{rot}(\alpha\mathbf{F}) = \alpha\operatorname{rot}\mathbf{F}$,
(3) $\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$,
(4) $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f\operatorname{rot}\mathbf{F}$.

Definicja 13.31. Pole wektorowe $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}$ nazywamy *bezwirowym*, jeśli $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Uwaga 13.32. Punkt (3) Twierdzenia 13.30 można sformułować mówiąc, że jeśli pole wektorowe jest potencjalne, to jest bezwirowe. Okazuje się, że implikację tę można też odwrócić.

Twierdzenie 13.33. *Niech pole wektorowe* $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^3$ *będzie klasy* $C^2(U)$. *Pole* $\mathbf{F}$ *jest potencjalne wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwirowe.*

Przykład 13.34. Zbadamy, czy pole wektorowe

$$\mathbf{F} = (0, 3z^2, 6yz)$$

jest postaci ∇f dla pewnej funkcji f. Z powyższego twierdzenia wynika, że należy zbadać, czy pole $\mathbf{F}$ jest bezwirowe. Obliczmy zatem rotację pola $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 3z^2 & 6yz \end{vmatrix} = 6z\mathbf{i} - 6z\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

Ponieważ $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, stwierdzamy, że da się znaleźć taką funkcję trzech zmiennych f, dla której zachodzi równość $\mathbf{F} = \nabla f$. Obliczając odpowiednie całki możemy wyznaczyć funkcję f:

$$f(x, y, z) = 3yz^2.$$

13.3.2. Dywergencja pola wektorowego. Niech $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^3$ będzie różniczkowalnym polem wektorowym postaci (13.7).

Definicja 13.35. *Dywergencją* pola wektorowego nazywamy funkcję $\operatorname{div}\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{13.11}$$

Uwaga 13.36. Wzór (13.11) można symbolicznie zapisać formułą:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \circ \mathbf{F}, \tag{13.12}$$

jako iloczyn skalarny „wektora” $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ z wektorem $\mathbf{F} = (P, Q, R)$.

Przykład 13.37. Niech $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2y, x - 2yz, 3yz^2 - x^3)$ dla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Wtedy

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 6xy + x - 2z + 6yz.$$

Twierdzenie 13.38. *Niech $\mathbf{F}, \mathbf{G} : U \to \mathbb{R}^3$ będą polami wektorowymi, $f : U \to \mathbb{R}$ funkcją trzech zmiennych i $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy zachodzą następujące równości:*

(1) $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div}\mathbf{F} + \operatorname{div}\mathbf{G}$,
(2) $\operatorname{div}(\alpha\mathbf{F}) = \alpha\operatorname{div}\mathbf{F}$,
(3) $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = \nabla f \circ \mathbf{F} + f\operatorname{div}\mathbf{F}$,
(4) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \operatorname{rot}\mathbf{F} \circ \mathbf{G} + \mathbf{F} \circ \operatorname{rot}\mathbf{G}$,
(5) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$.

Uwaga 13.39. Używając konwencji wprowadzonej wzorem (13.12) możemy zapisać równość (3) z powyższego twierdzenia również w następujący sposób:

$$\nabla \circ (f\mathbf{F}) = \nabla f \circ \mathbf{F} + f\nabla \circ \mathbf{F}.$$

Podobnie, równość (4) wygląda następująco:

$$\nabla \circ (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \circ \mathbf{G} - \mathbf{F} \circ (\nabla \times \mathbf{G}),$$

a równość (5)

$$\nabla \circ (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

Definicja 13.40. Niech $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^3$, będzie funkcją klasy $C^2(U)$. Definiujemy funkcję $f : U \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f). \tag{13.13}$$

Operator Δ przyporządkowujący funkcję Δf funkcji f nazywamy *operatorem Laplace'a* (lub krótko *laplasjanem*).

Uwaga 13.41. Z określenia (13.11) wynika, że

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{13.14}$$

Przykład 13.42. Niech $f(x, y, z) = xy^2 - x^2 z$ dla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Chcąc skorzystać ze wzoru (13.14) obliczamy potrzebne pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 2xz, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2z,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -x^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Stąd otrzymujemy

$$\Delta f(x, y, z) = 2x - 2z.$$

Uwaga 13.43. Stosując konwencję (13.12) możemy zapisać

$$\Delta f = \nabla \circ \nabla f.$$

Dlatego też piszemy czasami tożsamość $\Delta = \nabla^2$.

Twierdzenie 13.44. *Dla dowolnego pola wektorowego* $\mathbf{F}$ *zachodzi wzór*

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F},$$

gdzie $\Delta \mathbf{F}$ *jest polem wektorowym określonym jako*

$$\Delta \mathbf{F} = (\Delta P, \Delta Q, \Delta R).$$

ROZDZIAŁ 14

Całki z funkcji wielu zmiennych

14.1. Wprowadzenie całki podwójnej

14.1.1. Całka po prostokącie. Wprowadzamy pojęcie całki wielokrotnej. Podobnie jak w przypadku całki funkcji jednej zmiennej najpierw wprowadzimy intuicyjne, geometryczne pojęcie całki, ustalimy wymagane własności. Skoncentrujemy się najpierw na przypadku całki podwójnej. Niech $f(x,y)$ będzie funkcją ciągłą, nieujemną, określoną na prostokącie otwartym $P = \{(x,y) :\ a < x < b,\ c < y < d\}$. Wykresem tej funkcji jest powierzchnia $z = f(x,y)$ nad prostokątem P.

Rozważmy trójwymiarową bryłę ograniczoną od dołu płaszczyzną OXY, od góry wykresem funkcji $z = f(x,y)$, a z boków czterema pionowymi płaszczyznami $x = a$, $x = b$, $y = c$ oraz $y = d$. Niech V będzie objętością tej bryły.

Definicja 14.1. Liczbę V nazywamy *całką podwójną* funkcji $f(x,y)$ po prostokącie P, i oznaczamy

$$V = \iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

14.1.2. Całka iterowana. Powyższa definicja pozwala nam wprost obliczyć tylko takie całki, w przypadku których potrafimy określić objętość bryły pod wykresem. Pojęcie objętości wprowadzamy następująco. Wybieramy pewną prostą w przestrzeni, niech to będzie oś OY. W punkcie $y = t$ tej osi tworzymy płaszczyznę do niej prostopadłą, i oznaczamy przez $A(t)$ pole przekroju tej płaszczyzny z rozważaną bryłą. Objętość bryły to całka po całej osi z funkcji $A(t)$. W naszym przypadku $A(t) = 0$ dla t spoza przedziału (c,d), a więc

$$V = \int_c^d A(t)\,\mathrm{d}t.$$

Policzymy teraz $A(t)$. Obszar ten leży w płaszczyźnie pionowej $y = t$, i w tej płaszczyźnie jest obszarem pod wykresem funkcji jednej zmiennej $x \mapsto z = f(x,t)$, dla $a < x < b$. W takim

razie

$$A(t) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Zamieniając nazwę zmiennej całkowania t na y otrzymujemy więc

$$\iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y.$$

W ten sposób uzyskaliśmy wzór na obliczanie całki podwójnej przy pomocy dwóch całek pojedynczych, tak zwanych *całek iterowanych*. W powyższym wzorze będziemy pomijać duże nawiasy, wystarczy pamiętać, że kiedy granice są na poszczególnych znakach całek, to chodzi o pojedyncze całki iterowane, i że znaki różniczek odnoszą się: zewnętrzna do całki zewnętrznej, a wewnętrzna do całki wewnętrznej. Przy obliczaniu objętości mogliśmy jako oś całkowania wybrać oś x-ów, wtedy uzyskalibyśmy odwrotną kolejność całek iterowanych

$$\iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Przykład 14.2. Ważny przypadek szczególny występuje, kiedy funkcja podcałkowa jest iloczynem dwóch funkcji jednej zmiennej

$$f(x,y) = \phi(x)\psi(y).$$

Wtedy całka podwójna jest iloczynem dwóch całek pojedynczych

$$\begin{aligned}&\iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_a^b \int_c^d \phi(x)\psi(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_a^b \phi(x) \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d \psi(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Przykład 14.3. Obliczymy całkę podwójną

$$\iint_P (6x^2y + 8xy^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdzie P jest prostokątem $\{(x,y) :\ 1 < x < 2,\ 3 < y < 4\}$. Korzystamy z całek iterowanych

$$\int_3^4 \int_1^2 (6x^2y + 8xy^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_3^4 \left(\int_1^2 (6x^2y + 8xy^3)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y.$$

Funkcja $6x^2y + 8xy^3$ zmiennej x, przy ustalonym, stałym y ma funkcję pierwotną $2x^3y + 4x^2y^3$. A więc

$$\int_1^2 (6x^2y + 8xy^3)\,\mathrm{d}x = (2x^3y + 4x^2y^3)\big|_{x=1}^{x=2} = 14y + 12y^3,$$

czyli całka podwójna jest równa

$$\int_3^4 (14y + 12y^3)\,\mathrm{d}y = (7y^2 + 3y^4)\big|_3^4 = 574.$$

Jeżeli funkcja $f(x,y)$ w prostokącie P przyjmuje wartości zarówno dodatnie jak i ujemne, to całkę podwójną z $f(x,y)$ określamy jako różnicę objętości. Od objętości części bryły ograniczonej wykresem i płaszczyzną OXY położonej powyżej tej płaszczyzny odejmujemy objętość pozostałej części bryły, położonej poniżej tej płaszczyzny.

14.1.3. Całka po dowolnym obszarze. Całka podwójna została na razie określona tylko dla obszaru całkowania będącego dwuwymiarowym przedziałem, i tylko dla funkcji ciągłej. Całkę możemy też określić dla przypadku gdy funkcja $f(x,y)$ jest wystarczająco regularna, a ograniczony obszar D wystarczająco gładki. Niech obszar D zawiera się w jakimś prostokącie P (skoro obszar jest ograniczony, to musi się zawierać w jakimś wystarczająco dużym skończonym prostokącie). Rozszerzamy określenie funkcji $f(x,y)$ na cały prostokąt P następująco:

$$f(x,y) = 0, \qquad \text{dla } (x,y) \in P \setminus D.$$

Całka

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

jest określona jako

$$\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Przykład 14.4. Niech D będzie obszarem trójkątnym ograniczonym prostymi $2y = x$, $y = 2x$ oraz $x = \pi$. Należy obliczyć

$$\iint_D \sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Zauważmy, że dla $0 < x_0 < \pi$ przekrój obszaru D z prostą $x = x_0$ to odcinek tej prostej $\frac{x_0}{2} < y < 2x_0$. Obliczamy więc całkę

$$\begin{aligned}\iint_D \sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^\pi \int_{\frac{x}{2}}^{2x} \sin y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi (-\cos y)\Big|_{\frac{x}{2}}^{2x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^\pi \left(\cos\frac{x}{2} - \cos 2x\right)\,\mathrm{d}x = \left(2\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi == 2\sin\frac{\pi}{2} = 2.\end{aligned}$$

14.1.4. Własności całki podwójnej. Całka podwójna zdefiniowana geometrycznie przy pomocy pojęcia objętości ma następujące własności

Twierdzenie 14.5. *Niech f, g będą funkcjami dwóch zmiennych określonymi na obszarze D i niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy*

(1) $\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$ *pole obszaru D,*

(2) $\iint_D \alpha f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

(3) $\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

(4) $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *jeżeli* $f \leq g$ *w* D,

(5) $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *jeżeli,* $D_1 \cup D_2 = D$ *oraz* $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

http://www.medianauka.pl/

Bibliografia

[1] A. Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, PWN 1976.
[2] A. Błaszczyk, S. Turek, *Teoria mnogości*, PWN Wydawnictwo Naukowe 2007.
[3] V. V. Prasolov, V. M. Tikhomirov, *Geometry*, American Mathematical Society 2001.
[4] A. Wojciechowska, *Elementy logiki i teorii mnogości*, PWN 1979.