Podstawowe struktury algebraiczne

Termin algebra pochodzi od arabskiego wyrazu al – dżabr, który tłumczy się jako "upraszczanie", "łączenie".

Początkowo algebra była nauką o równaniach i ich rozwiązywaniu, o wielomianach i macierzach. Na przełomie XIX i XX wieku algerba stała sie nauką aksjomatyczną. Powstały jej najważniejsze działy: teoria grup, pierścieni, ciał, struktur algebraicznych i algebr.

Słynna grupa Bourbaki podaje definicję: "zajmować się algebrą oznacza w istocie obliczać, to jest wypełniać nad elementem pewnego zbioru operacje algebraiczne, których najbardziej znanym przykładem są cztery działanai arytmentyki elementarnej".

Algebra stała się językiem matematyki. Nowoczesna algebra jest podstawą matematyki, fizyki i chemii teoretycznej.

1.Działania

Niech Xoznacza jakikolwiek zbiór przedmiotów, np. pewien zbiór liczb, pewien zbiór wielomianów, pewien zbiór obiektów na płaszczyźnie. Przedmioty zbioru Xnazywamy jego elementami.

Definicja

Działaniem dwuargumentowym wewnętrznym w zbiorze Xnazywamy każde odwzorowanie postaci:

$$O: X \times X \to X$$

Przyjmujemy umowę, że zamiast $O(x, y)$, gdzie $x, y \in X$, będziemy pisać $x \circ y$. Element $x \circ y$zbioru Xnazywamy wynikiem działania $\circ$na uporządkowanej parze (x, y).

Uwaga:
Dla oznaczenia działania będziemy równierz używać innych symboli: *,º,• itd.

Definicja

Jeżeli dla każdej pary x, yelementów zbioru Xw który mokreślone jest działanie $\circ$mamy:

$$x \circ y = y \circ x$$

to mówimy, że działanie to jest przemienne w zbiorze X.

Dodawanie i mnożenie w zbiorze liczb naturalnych są działaniami przemiennymi.

Definicja

Jeżeli dla każdych trzech elementów x, y, zzbioru X, w którym określone jest działanie $\circ$mamy:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

to mówimy, że działanie jest łączne w zbiorze X.

Uwaga

Jeżeli działanie jest łączne to jego wynik dla dowolnej (skończonej) liczby elementów nie zależy od położenia nawiasów:

$$(x \circ y) \circ (z \circ w) = x \circ ((y \circ z) \circ w) = ((x \circ y) \circ z) \circ w \text{itd.}$$

Rozdzielność działania względem innego działania

Jeżeli w danym zbiorze Xsą określone dwa działania $@, \circ$to mówimy, że działanie @jest prawostronie rozdzielne względem działania $\circ$, jeżeli :

$$(x \circ y)@z = (x@z)(y@z)$$

dla wszystkich $x, y, z \in X$.

Podobnie działanie @nazywamy lewostronnie rozdzielnym względem działania $\circ$jeżeli:

$$z@(x \circ y) = (z@x)(z@y)$$

dla wszystkich $x, y, z \in X$..

Jeżeli działenie @jest przemienne i prawostronnie (lewostronnie) rozdzielne względem działania ∘to jest ono też względem niego lewostronnie (prawostronnie) rozdzielne.

Mówimy wtedy, że działanie @jest rozdzielne względem działania ∘.

Np. w zbiorze liczb naturalnych mnożenie jest rozdzielne względem dodawania, natomiast dodawanie nie jest rozdzielne (prawostronnie lub lewostronnie) względem mnożenia.

Definicja

Niech∘- działanie w niepustym zbiorze X. Element $e \in X$nazywamy elementem neutralnym lub jednostkowym dla działania ∘jeżeli:

$$x \circ e = e \circ x = x$$

dla każdego elementu $x \in X$.

Fakt

Dla dowolnego działania ∘w zbiorze Xistnieje co najwyżej jeden element neutralny dla tego działania.

Dowód

Niech ei e'będą elementami neutralnymi dla działania∘. Wtedy:

$$e \circ e' = e$$
$$e \circ e' = e'$$

stąd $e' = e$.

Definicja

Niech ebędzie elementem neutralnym dla działania ∘w zbiorze X.
Mówimy, że element $x \in X$jest odwracalny (względem działania ∘) jeżeli istnieje element $y \in X$taki, że:

$$x \circ y = y \circ x = e$$

Element $y$nazywamy wtedy elementem odwrotnym do elementu x(względem działania ∘) i zwykle oznaczamy go x^{-1}(lub $-x$).

Twierdzenie

Jeżeli działanie $\circ$w zbiorze Xposiada element neutralny ei jest łączne. Wtedy dowolny element $x \in X$posiada co najmniej jeden element odwrotny.

Będziemy stosować następujące oznaczenia:

$\mathbb{N}$- zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{Z}$- zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$- zbiór liczb wymiernych
$n\mathbb{Q}$- zbiór liczb niewymiernych
$\mathbb{R}$- zbiór liczb rzeczywistych

Definicja

Niech$X$, Fzbiory. Działaniem dwuargumentowym zewnętrznym w zbiorze Xwzględem zbioru F(lub krótko, działaniem zewnętrznym w zbiorze X) nazywamy każde odwzorowanie postaci:

$$\%_0 : F \times X \to X$$

Zamiast $@(t,x)$piszemy $t@x$dla $(t,x) \in F \times X$.

Zbiór Fmoże być równy X.

A więc pojęcie działania zewnętrznego jest uogólnieniem pojecia działania wewnętrznego.

Struktury algebraiczne

Niech Xbędzie zbiorem, $_1$, $_2$, ..., $_n$- działania wewnętrzne w zbiorze X.

Dane są też zbiory $F_1, \ldots, F_m$oraz m działań zewnętrznych $@_i : F_i \times X \to X$gdzie $i = 1, \ldots, m$w zbiorze X.

Definicja

Strukturą algebraiczną będziemy nazywać każdy układ postaci:

$$(X, F_1, F_2, \ldots, F_m;\ {}_1,\ {}_2, \ldots\ldots,\ {}_n, @_1, @_2, \ldots\ldots, @_m 0)$$

Przykłady struktur algebraicznych

a) **Półgrupy**: Półgrupa jest strukturą algebraiczną postaci $(G, @)$, gdzie @jest działaniem łącznym w zbiorze $G \neq \emptyset$.

b) **Grupy**: Grupa jest to półgrupą $(G, @)$taką, że działanie @posiada element neutralny, każdy element $x \in G$posiada element odwrotny. Jeżeli działanie @jest przemienne to mówimy, że grupa (półgrupa) Gjest przemienna lub abelowa.

c) **Pierścienie**: Pierścieniem jest struktura $(P, +, \circ)$, $P \neq 0$taka, że:

i)$(P, +)$jest grupą przemienną. Element neutralny ze względu na działanie + będziemy oznaczać 0.
ii)działanie $\circ$jest łączne w zbiorze P.

iii) działanie $\circ$jest rozdzielne względem działania +.

Pierścień nazywamy przemiennym jeżeli działanie $\circ$jest przemienne.

Przykład

Zbiory $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$i $\mathbb{R}$ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem liczb jest pierścieniem przemiennych.

Definicja

Jedynką pierścienia Pnazywamy element neutralny ze względu na działanie $\circ$. Jedynkę w pierścieniu będziemy zwykle oznaczać 1.

Każdy z pierścieni $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$i $\mathbb{R}$jest pierścieniem z jedynką, którą jest liczba 1.

d) Ciałem nazywamy pierścień $(P, +, \circ)$spełniający warunki:
i) Pma co najmniej dwa elementy.
ii) para $(G \setminus \{0\} \equiv G^*,\ )$jest grupą abelową i $1 \neq 0$

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$i zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia liczb sąciałami.

Morfizmy struktur

Definicja

Niech będą dane dwie struktury algebraiczne:

$A = (X, F_1, \ldots, F_m;\ _1, \ldots,\ _n; @_1, \ldots, @_m)$i
$B = (X', F_1, \ldots, F_m;\ _1', \ldots,\ _n'; @_1', \ldots, @_m')$

gdzie $_i,\ _i', i = 1,2,\ldots,n$działania wewnętrzne i $@_i, @_i', i = 1,2,\ldots,m$- działania zewnętrzne.

Odwzorowanie $f: X \to X'$nazywamy homomorfizmem struktur Ai Bjeżeli:

$f(x\ _j\ y) = f(x)\ _j'\ f(y)$dla $j = 1,2,\ldots,n$i każdy $x, y \in X$oraz $f(x@_i x) = t(x)@_i' f(x)$dla $i = 1,2,\ldots,m$i każdego $t \in F_i$oraz $x \in X$.

Definicja

Niech $f: X \to X'$jest homomorfizmem struktur. Homomorfizm $f$nazywamy monomorfizmem jeżeli $f$jest injekcją; epimorfizmem jeżeli $f$jest surjekcją; izomorfizmem jeżeli $f$jest injekcją i surjekcją.

Algebra liniowa. Przestrzenie liniowe (wektorowe)

Definicja

Przestrzenią liniową (lub wektorową) L nad ciałem $(K,\oplus,*)$ nazywamy zbiór L z dwoma wyróżnionymi działaniami:
wewnętrznym, które oznaczamy $+;+:L\times L\to L$, działanie to nazwyamy dodawaniem wektorów i zewnętrznym, które oznaczamy $\bullet;\bullet:K\times L\to L$, działanie to nazywamy mnożeniem wektora przez skalar i spełnione są aksjomaty:

a) Dodawanie elementów przestrzeni L (wektorów) wprowadza w L strukturę grupy abelowej. Element neutralny tej grupy będziemy oznaczać symbolem 0, element odwrotny do $l\in L$, symbolem $-l$.
b) Mnożenie wektorów przez elementy ciała K (skalary) spełnia warunek $1\bullet l=l$ dla każdego $l\in L$ i jest łączne $a\bullet(b\bullet l)=(a\bullet b)\bullet l$ dla każdych $a,b\in K$ i $l\in L$.
c) Zachodzą prawa rozdzielności
$$a\bullet(l_1+l_2)=a\bullet l_1+a\bullet l_2\ ,\quad (a_1+a_2)\bullet l=a_1\bullet l+a_2\bullet l$$
dla wszystkich $l,l_1,l_2\in L$ i $a,a_1,a_2\in K$.

Uwagi

1) Jeżeli $a\bullet l=0$ to $a=0$ lub $l=0$.
2) Dla dowolnych $a_1,.....,a_n\in K$ i $l_1,.....,l_n\in L$ wyrażenie $\sum_{i=1}^{n}a_i l_i$ jest jednoznacznie określone. Nazywa się ono kombinacją liniową wektorów $l_1,.....,l_n$.

Przykład

S dowolny, niepusty zbiór, K ustalone ciało. Niech $F(S,K)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji $f:S\to K$.

Dla dowolnych $f,g\in F(S,K)$ i $a\in K$ definiujemy działanie dodawania wektorów i mnożenia wektora przez skalar:

$$(f+g)(s)=f(s)+g(s)\ ;\quad (a\bullet f)(s)=a\bullet f(s)$$

Łatwo można pokazać, że zbiór $F(S,K)$ z tak wprowadzonymi działaniami jest przestrzenią liniową.

Definicja

Niech $(L, K, +, \bullet)$ będzie przestrzenią liniową i niech $M \subset L$. Mówimy, że M jest podprzestrzenią (przestrzeni liniowej L), gdy $(M, K, +, \bullet)$ jest przestrzenią wektorową (gdzie + i $\bullet$ są działaniami z przestrzeni L obciętymi do zbioru M.

Twierdzenie

Podzbiór N przestrzeni liniowej L jest podprzestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy:

a) $N \neq \emptyset$
b) $x + y \in N$ dla wszystkich $x, y \in N$
c) $a * x \in N$ dla każdego $x \in N$ i $a \in K$

Przykład

Niech $R[x]$ oznacza zbiór wielomianów zmiennej rzeczywistej x o współczynnikach rzeczywistych. Jest to podprzestrzeń przestrzeni wektorowej $F(R, R)$. Niech $n \in N$ i oznaczamy przez $R_n[x]$ zbiór wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej n.

Jest to podprzestrzeń przestrzeni $R[x]$, a więc i przestrzeni $F(R, R)$.

Przestrzeń sprzężona

Niech L będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. $F(L, K)$ oznacza przestrzeń liniową wszystkich funkcji określonych na L o wartościach w K.

Definicja

Funkcję $f \in F(L, K)$ nazywamy funkcją liniową (funkcjonałem liniowym, formą liniową) jeżeli zachodzą warunki:

1) $f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2)$
2) $f(a \bullet l) = a \bullet f(l)$

dla wszystkich $l, l_1, l_2 \in L$ i $a \in K$.

Pierwszy warunek nazywa się addytywnością funkcji, drugi – jednorodnoscią.

Tak więc funkcja liniowa jest morfizmem struktur $(L, K, +, \bullet)$ i $(K, K, +, \bullet)$.

Przykład

1. S - dowolny zbiór, K - ciało skalarów. Niech $a \in S$ i $f, g \in F(S, K)$.

   Definiujemy odwzorowanie $\delta_a : F(S, K) \to K$, $\delta_a f = f(a)$.

   Jest to funkcja liniowa, bo:
   $\delta_a(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = \delta_a f + \delta_a g$
   $\delta_a(b \bullet f) = (b \bullet f)(a) = b \bullet f(a) = b \bullet \delta_a f$
   $b \in K$.
2. $f, g \in C'(R)$, $a \in \mathbb{R}$.

   Definiujemy $D_a f = \frac{df}{dx}|_a$

   $D_a(f+g) = \frac{d}{dx}(f+g)|_a = \frac{df}{dx}|_a + \frac{dg}{dx}|_a = D_a f + D_a g$

   $D_a(b \bullet f) = \frac{d}{dx}(bf)|_a = b\frac{df}{dx}|_a = b \bullet D_a f$

   $b \in \mathbb{R}$

Fakt

Funkcje liniowe $f : L \to K$ tworzą podprzestrzeń liniową przestrzeni $F(L, K)$. Bardzo prosty dowód pomijamy.

Przestrzeń liniową funkcji liniowych na przestrzeni liniowej L nazywamy przestrzenią sprzężoną (dualną, dwoistą) do L i oznaczamy ją L^* .

Baza i wymiar

Definicja

L - przestrzeń liniowa nad ciałem K . Rodzinę wektorów $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ przestrzeni L nazywamy bazą (skończoną) przestrzeni L , jeżeli każdy wektor $l \in L$ można **jednoznacznie** przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów rodziny $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$:

$$l = \sum_{i=1}^{a} a_i e_i \qquad a_i \in K, i = 1,2, \ldots, n$$

Współczynniki a_i nazywamy współrzędnymi wektora l w bazie $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Przykład

1) Weźmy przestrzeń liniową $(K^n, K, +, \bullet)$. Wektory: $e_1=(1,0,\ldots,0)$, $e_1=(0,1,\ldots,0)$,....., $e_n=(0,0,\ldots,1)$ tworzą bazę tej przestrzeni.
2) W przestrzeni $R_n[x]$ bazę stanowią wektory $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

Definicja

Przestrzeń liniową L nazywamy skończenie wymiarową jeżeli jest zerowymiarowa ($L=\{0\}$) lub ma skończoną bazę.

Pozostałe przestrzenie liniowe nazywamy nieskończenie wymiarowymi.

Twierdzenie

W skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej liczba elementów bazy nie zależy od tej bazy, (Wszystkie bazy mają tę samą ilość elementów).

Liczbę tę nazywamy wymiarem przestrzeni liniowej L i oznaczamy $\dim L$.

Gdy $\dim L=n$ mówimy, że przestrzeń L jest n wymiarowa.

Przykład

1) $\dim K^n=n$, bo wiemy, że baza w tej przestrzeni zawiera n wektorów.
2) $\dim R_n[x]=n+1$

Definicja

Powłoką liniową rodziny wektorów przestrzeni liniowej L nazywamy zbiór wszystkich ich kombinacji liniowych.

Przykład

1) Powłoką liniową wektorów $(1,0,0)$ i $(0,1,0)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest płaszczyzna $Oxy\ (z=0)$.
2) Powłoką liniową wektorów $1, x, x^2$ w przestrzeni $R_n[x]$ jest przestrzeń $R_2[x]$.

Powłoka liniowa rodziny wektorów jest podprzestrzenią liniową przestrzeni L .

Powłokę liniową rodziny wektorów $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ będziemy nazywać też podprzestrzeńią liniową rozpiętą (generowaną) przez wektory $(l_1, l_2, \dots, l_n)$.

Rzędem rodziny wektorów nazywamy wymiar jej powłoki liniowej.

Uwaga

Połoka liniowa bazy przestrzeni liniowej L jest równa całej przestrzeni L .

Definicja

Rodzinę wektorów $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ przestrzeni liniowej L nazywamy rodziną liniowo niezależną jeżeli równanie wektorowe:

$$x_1 l_1 + x_2 l_2 + \dots\dots + x_n l_n = 0$$

gdzie $x_i \in K$, $i = 1,2,\dots,n$ ma tylko zerowe rozwiązanie.

Rodzinę wektorów nazywamy liniowo zależną jeżeli nie jest liniowo niezależna.

Przykład

1) Wektory $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne.
2) Wektory $1, x, x^2, x^3$ są liniowo niezależne w przestrzeni $R[x]\,(R_3[x])$.
3) Wektory $1, \sin^2(x), \cos^2(x)$ są liniowo zależne w przestrzeni $F(R,R)$.

Definicja

Zbiór M wektorów przestrzeni liniowej L jest liniowo niezależny, jeżeli każdy skończony podzbiór zbioru M jest liniowo niezależny.

Przykład

Zbiór $M = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ jest liniowo niezależny w przestrzeni $R[x]$

Twierdzenie

Niech $B=(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ będzie rodziną wektorów przestrzeni liniowej L. Wtedy następujące warunki są równoznaczne:

i. B jest bazą przestrzeni L.
ii. Każdy wektor $l \in L$ mozna jednoznacznie przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów rodziny B.
iii. B jest minimalną rodziną wektorów generująca przestrzeń L.
iv. B jest maksymalną liniowo niezależną rodziną wektorów w przestrzeni L.

Twierdzenie

Jeżeli rodzina wektorów $B=(e_1, e_2, \dots, e_n)$ jest bazą w przestrzeni liniowej L, a rodzina $A=(f_1, f_2, \dots, f_n)$ wektorów przestrzeni L jest liniowo niezależna, to:

1. $m \leq n$
2. jeżeli $m=n$ to rodzina A jest bazą przestrzeni L.
3. jeżeli $m<n$ to istnieje $n-m$ wektorów bazy B, które wraz z wektorami rodziny A tworzą bazę przestrzeni L.

Twierdzenie to nosi nazwę twierdzenia o wymianie, bo pozwala wymienić pewną liczbę wektorów bazy na taką samą liczbę wektorów liniowo niezależnych.

Fakt (monotoniczność wymiaru)

L - przestrzeń liniowa. M liniowa podprzestrzeń w L.

Wtedy $\dim M \leq \dim L$, a jeżeli $\dim L < \infty$ to $\dim M = \dim L$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M=L$.

Odwzorowania liniowe

Definicja

Niech L i M przestrzenie liniowe nad ciałem K. Odwzorowanie $f: L \to M$ nazywa się odwzorowaniem liniowym, gdy spełnione są warunki:

1. $f(l_1+l_2)=f(l_1)+f(l_2)$ - addytywność
2. $f(al)=a f(l)$ - jednorodność

dla wszystkich $l, l_1, l_2 \in L$ i $a \in K$.

Odwzorowania liniowe są homomorfizmami odpowiednich struktur, a więc: $f(0)=0$ i $f(-l)=-f(l)$ dla f liniowego.

Przez indukcję można pokazać, że jeżeli f jest odwzorowaniem liniowym określonym na przestrzeni liniowej L nad ciałem K, to:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i l_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i f(l_i)$$

dla wszystkich $l_i \in L \quad i=1,....,n$ i wszystkich $a_i \in K$, $i=1,....,n$.

Odwzorowanie liniowe $f: L \to L$ nazywamy też operatorem liniowym w przestrzeni L lub endomorfizmem tej przestrzeni.

Przykłady

1. odwzorowanie zerowe $f: L \to L$ i $f(l)=0$ dla każdego $l \in L$.
2. odwzorowanie tożsamościowe: $f: L \to L$ i $f(l)=l$ dla każdego $l \in L$. Odwzorowanie to oznaczamy I_L lub Id_L .
3. funkcjonały liniowe $f: L \to K$ są oczywiście odwzorowaniami liniowymi.
4. Niech w będzie wielomianem. Wtedy odwzorowanie $f: w \to w'$, gdzie w' oznacza pochodną wielomianu w , jest endomorfizmem (operatorem liniowym) przestrzeni $R[x]$.

Oznaczmy przez $\mathscr{L}(L, M)$ zbiór odwzorowań liniowych z przestrzeni liniowej L do przestrzeni M .

Łatwo widać, że jeżeli $f, g \in \mathscr{L}(L, M)$ i $a \in K$ to $f+g$ i af są odwzorowaniami liniowymi.

Tak więc $\mathscr{L}(L, M)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej wszystkich odwzorowań z L do M .

Ponadto , jeżeli L , M i N są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i $f \in \mathscr{L}(L, M)$, a $g \in \mathscr{L}(M, N)$ to superpozycja $g \circ f: L \to N$ też jest odwzorowaniem liniowym $g \circ f \in \mathscr{L}(L, N)$.

Twierdzenie

Niech $f \in \mathscr{L}(L, M)$ i f jest bijekcją.. Wtedy istnieje odwzorowanie odwrotne f^{-1} i $f^{-1} \in \mathscr{L}(M, L)$.

Związek między odwzorowaniami liniowymi i podprzestrzeniami liniowymi

Definicja

Niech L, M przestrzenie liniowe nad ciałem K i $f \in \mathscr{L}(L, M)$.

Zbiór $Ker\, f=\{l\in L: f(l)=0\}$ nazywamy <u>jądrem odwzorowania *f*</u>, a zbiór $Im\, f=\{m\in M: istnieje\ l\in L\ i\ f(l)=m\}$ nazywamy <u>obrazem odwzorowania *f*</u>.

<u>Twierdzenie</u>

Niech $f\in\mathscr{L}(L,M)$. Wtedy

1. $Ker\, f$ jest podprzestrzenią liniową w L .
2. $Im\, f$ jest podprzestrzenią liniową w M .
3. $Ker\, f=\{0\}\Leftrightarrow$ f jest monomorfizmem.
4. $Im\, f=M\Leftrightarrow$ f jest epimorfizmem.
5. f jest izomorfizmem $\Leftrightarrow Ker\, f=\{0\}$ i $Im\, f=M$.

Dowód:

$\Rightarrow$ a.a.

1. Niech $l,l_1,l_2\in Ker\, f$ i $a\in K$: $f(l_1)=f(l_2)=0$. Wtedy
   $f(l_1+l_2)=f(l_1)+f(l_2)=0+0=0$ i $f(al)=a\,f(l)=a0=0$
2. $m,m_1,m_2\in Im\, f$ i $a\in K$. Stąd istnieją takie wektory $l_1,l_2\in L$, że
   $f(l_1)=m_1$ i $f(l_2)=m_2$.

   A więc $m_1+m_2=f(l_1+l_2)$ i $m_1+m_2\in Im\, f$, $am=af(l)=f(al)$ i $am\in Im\, f$.

3. Załóżmy, że istnieją wektory $l_1,l_2\in L$ takie, że $l_1\neq l_2$ i $f(l_1)=f(l_2)$.
   Stąd $f(l_1-l_2)=0$, a więc $l_1-l_2\in Ker\, f$, czyli z założenia $l_1=l_2$.
   Sprzeczność.

$\Leftarrow$ a.a.

Niech wektor $0\neq l\in Ker\, f$. Stąd $f(l)=0$ i $f(0)=0$. Sprzeczność bo *f* jest monomorfizmem.

<u>Twierdzenie</u>

L - przestrzeń liniowa, $dim\, L<\infty$. M - przestrzeń liniowa i $f: L\to M$ odwzorowanie liniowe.

Wtedy $dim\, Ker\, f<\infty$ i $dim\, Im\, f<\infty$ oraz $dim\, Ker\, f+dim\, Im\, f=dim\, L$.

Macierze i układy równań liniowych

Definicja

Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Macierzą rzeczywistą (zespoloną) A o m wierszach i n kolumnach nazywamy funkcję, której każdej parze liczb naturalnych (i, j) , $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą (zespoloną) a_{ij}.

Funkcją tę zapisujemy zwykle w postaci tablicy:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & .... & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rodzinę $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{1n})$ nazywamy i – tym wierszem macierzy A , a rodzinę $(a_{1k}, a_{1k}, ..., a_{mk})$ - k – tą kolumną macierzy A .

Jeżeli $m = n$ to macierz nazywamy macierzą kwadratową stopnia n .

Zbiór macierzy o m wierszach i n kolumnach będziemy oznaczać $M_{m \times n}$. Elementy tego zbioru nazywamy macierzami o wymiarze $m \times n$.

Macierz o elementach a_{ij} zwykle oznaczamy (a_{ij}) .

Jeżeli (a_{ik}) macierz kwadratowa o wymiarze n i $a_{ik} = 0$ dla $i \neq k$ to macierz (a_{ik}) nazywamy macierzą diagonalną.

Jeżeli (a_{ik}) jest macierzą diagonalną i wszystkie elementy a_{ii} są równe 1 to macierz tę nazywamy macierzą jednostkową i oznaczamy E lub I .

Jeżeli wszystkie elementy macierzy są równe zeru, to taką macierz nazywamy macierzą zerową.

Definicja

Jeżeli $A=(a_{ij})$ jest macierzą wymiaru $m\times n$ to macierzą transponowaną do macierzy A nazywamy macierz $B=(b_{ij})$ wymiaru $n\times m$ taką, że $b_{ij}=a_{ji}$. Macierz transponowaną do macierzy A oznaczamy A^T .

Macierz odwzorowania liniowego

Niech M, N - skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe nad ciałem $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), $dim\, N=n, dim\, M=m$. $(e_1, e_2, ..., e_n)$ - baza w przestrzeni N ; $(f_1, f_2, ..., f_m)$ - baza w przestrzeni M .

Każdemu odwzorowaniu liniowemu $f: N\to M$ mozna przyporządkować macierz $A_f=(a_{ik})$ o wymiarach $m\times n$ i elementach z ciała $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).

$$f(e_k)=\sum_{i=1}^{m} a_{ik} f_i \qquad k=1,2,...n$$

Przykład

Niech odwzorowanie liniowe $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ będzie zdefiniowane następująco $f(x_1, x_2, x_3)=(x_1, x_2, x_1+x_2+x_3)$ gdzie $x_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,3$.

W $\mathbb{R}^3$ wybierzmy bazę kanoniczną:

$e_1=f_1=(1,0,0),\ e_2=f_2=(0,1,0),\ e_3=f_3=(0,0,1)$

Wtedy:

$f(e_1)=(1,0,1),\ f(e_2)=(0,1,1),\ f(e_2)=(0,0,1)$

i macierz A_f ma postać:

$$A_f=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Opisane powyżej przyporządkowanie $f\to A_f$ jest bijekcją między zbiorem $\mathcal{L}(L,M)$, a zbiorem $M_{m\times n}$. Bijekcja ta nie jest kanoniczna bo zależy od wyboru baz w przestrzeniach N i M.

Działania na macierzach

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie przez liczbę

Definicja

Niech $A,B\in M_{m\times n},\ A=(a_{ik});\ B=(b_{ik})$.

Sumą (różnicą) macierzy A i B nazywamy macierz C, $C=(c_{ik})$ taką, że $c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$ ($c_{ik}=a_{ik}-b_{ik}$) dla $i=1,2,\dots,m$; $k=1,2,\dots,n$. Niech $a\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Sumę (różnicę) macierzy A i B oznaczamy $A+B$ ($A-B$).

Iloczynem macierzy A przez liczbę a nazywamy macierz $D=(d_{ik})$ taką, że $d_{ik}=aa_{ik}$, $i=1,2,\dots,m$; $k=1,2,\dots,n$. Macierz D oznaczamy aA

Fakt

Zbiór $M_{m\times n}$ z tak wprowadzonymi działaniami jest przestrzenią liniową, a odwzorowanie $f\to A_f$ jest izomorfizmem przestrzeni $f(N,M)$ i $M_{m\times n}$.

Uwaga

$$(A+N)^T=A^T+B^T\ ;\quad (aA)^T=aA^T\ ;\quad (A^T)^T=A$$

Iloczyn macierzy

Iloczyn macierzy $A \in M_{m\times k}$ i macierzy $B \in M_{l\times n}$ jest określony wtedy i tylko wtedy, gdy $k = l$ i jest macierzą ze zbioru $M_{m\times n}$.

Jeżeli $A=(a_{ij})$ $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,k$ i $B=(b_{lp})$, $l=1,2,\dots,k$, $p=1,2,\dots,n$ to iloczyn AB jest macierzą $C=(c_{rs})$, $r=1,2,\dots,m$, $s=1,2,\dots,n$ taką, że:

$$c_{rs}=\sum_{t=1}^{k} a_{rt} b_{ts}$$

Przykład

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ wtedy $A*B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 5\\ 5 & 6 & 10\end{pmatrix}$

Twierdzenie

Niech $A, B, C \in M_{n\times n}$, $a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.
Wtedy:

1. $A(BC)=(AB)C$
2. $(A+B)C=AC+BC$ oraz $A(B+C)=AB+AC$
3. $(aA)B=a(AB)=A(aB)$
4. $AI=IA=A$

Twierdzenie

1. Jeżeli pewna kolumna (wiersz) macierzy A składa się z samych zer to $det\, A=0$.
2. Jeżeli macierz B powstała z macierzy A przez zmianę dwóch kolumn (wierszy) to $det\, B=-det\, A$, stąd wynika, że jeżeli dwie kolumny (wiersze) macierzy A są równe to $det\, A=0$.
3. Do dowolnej kolumny (wiersza) macierzy A możemy dodać elementy innej kolumny (wiersza) tej macierzy, a wyznacznik $det\, A$ nie zmienia się.

Twierdzenie

Niech $A, B\in M_{n\times n}$. Wtedy:

- $det(AB)=det\, A\, det\, B$
- $det\, A=det\, A^T$

Macierz odwrotna

Definicja

Niech $A, B\in M_{n\times n}$. Jeżeli $AB=BA=I$ to macierz B nazywamy macierzą odwrotną do macierzy A i piszemy $B=A^{-1}$.

Twierdzenie

Macierz A posiada macierz odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy $det\, A\neq 0$.

Macierz dla której istnieje macierz odwrotna nazywamy macierzą nieosobliwą.

Twierdzenie

Niech $A=(a_{ij})\in M_{n\times n}$ i $det\, A\neq 0$. Wtedy macierz odwrotna do A , $A^{-1}=(b_{ij})$ $i, j=1,\ldots, n$ jest dana wzorem:

$$b_{ij}=\frac{A_{ji}}{detA} \qquad\qquad i, j=1,2, \ldots., n$$

Uwaga:

A_{ij} jest to dopełenienie algebraiczne elementu a_{ij} macierzy A .

Przykład

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\quad,\quad det\,A=2$$

$$A_{11}=1,\ A_{12}=-2,\ A_{13}=-3,\ A_{21}=0,\ A_{22}=2,\ A_{23}=2,\ A_{31}=1,\ A_{32}=-2,\ A_{33}=-1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & -2\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

Własności macierzy odwrotnej

1. $(A^{-1})^{-1}=A$, $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$, $det\,A^{-1}=\frac{1}{detA}$
2. Jeżeli $A_i\in M_{n\times n}$ i $det\,A_i\neq 0$, $i=1,2,\ldots,k$
   to $(A_1A_2\ldots.A_k)^{-1}=A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\ldots..A_1^{-1}$.

Badanie układu m równań liniowych o n niewiadomych zaczniemy od układu jednorodnego:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0$$

Niech $A=(a_{ij})$, $i=1,2,\ldots,m$, $i=1,2,\ldots,n$ oznacza macierz współczynników tego układu.

Załóżmy, że $rzA=r$, $r\leq min(m,n)$.

Bez zmniejszenia ogólności można założyć, że:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \end{vmatrix}$$

Zapisujemy nasz układ równań w postaci:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r=-a_{1r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n$$

$$\vdots \qquad (1)$$

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r=-a_{1r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n$$

Pozostałe równania odrzucamy, gdyż spełnione są one automatycznie przez rozwiązania układu (1).

Podstawiając w układzie (1) zamiast $x_{r+1},\ldots,x_n$ dowolne liczby dostajemy układ Cramera, którego rozwiązanie już znamy.

Przykład

$$2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$rz\, A = 2 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Wobec tego dostajemy układ równań:

$$2x_1 - x_2 = x_3 - 2x_4$$

$$-x_1 + 2x_2 = x_3 + x_4$$

Połóżmy np. $x_3 = x_4 = 1$

Stąd:

$$2x_1 - x_2 = -1$$

$$-x_1 + 2x_2 = 2$$

$$x_1 = \frac{0}{3} = 0,\ x_2 = \frac{3}{3} = 1$$

Wobec tego jednym z rozwiązań tego układu (układ jest nieoznaczomy) jest $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$.

Rozpatrzmy teraz układ m równań liniowych o n niewiadomych w najbardziej ogólnej postaci:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned} \qquad (2)$$

Niech $A=(a_{ij})$, $i=1,2,...,m$, $i=1,2,...,n$ oznacza macierz współczynników układu (1), przez *U* oznaczamy macierz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & b_m \end{pmatrix}$$

U nazywamy <u>macierzą rozszerzoną (uzupełnioną)</u> układu (1).

<u>Twierdzenie Kroneckera-Capellego</u>

Układ (2) ma co najmnej jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $rz\,A=rz\,U$.

Załóżmy, że $rz\,A=rz\,U=r$.

Jak uzyskujemy rozwiązanie układu (2) ?.

Bez utraty ogólności możemy założyć, że:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Przekształcamy układ (2) do postaci:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n$$

$$\vdots$$

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n$$

Pozostałe równania odrzucamy.

W miejsce $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ podstawiamy dowolne liczby ($x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ odgrywają rolę parametrów). Dostajemy w ten sposób układ Cramera, który (przy ustalonych $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

<u>Wniosek</u>

Niech $rz\,A = rz\,U$. Wtedy:

1. jeżeli $rz\,A = rz\,U = n$, n – liczba niewiadomych układu, wtedy układ równań posiada dokładnie jedno rozwiązanie
2. jeżeli $rz\,A = rz\,U = r < n$ to układ jest nieoznaczony i rozwiązanie zależy od n-r parametrów.

Wartości i wektory własne operatora liniowego

N- przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{C}$. $dimN < \infty$.

A- operator liniowy, $A: N \to N$

Definicja

Jeżeli równanie $Ax = ax$gdzie $a \in \mathbb{C}$ma niezerowe rozwiązanie $x \in N$, to liczbę zespoloną $a$nazywamy wartością własną operatora A, a wektor $x$nazywamy wektorem własnym tego operatora. Mówimy, że wektor własny $x$należy do wartości własnej a.

Przykład

$N = R^2$ $\qquad\qquad$ $A(x_1, x_2) = (2\mathrm{x}_1, x_1 + 2\mathrm{x}_2)$

Wtedy równanie $Ax = ax$ma postać:

$(2\mathrm{x}_1, x_1 + 2\mathrm{x}_2) = a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$
Stąd $2\mathrm{x}_1 = ax_1$i $x_1 + 2x_2 = ax_2$a więc $a = 2$i$x_1 = 0$, x_2- dowolna liczba.

Wektor własny operatora Ama postać $(0, x)$gdzie x- dowolna liczba rzeczywista różna od zera. Sprawdzamy czy $A(0, x) = 2(0, x)$.

$L = A(0, x) = (2 \cdot 0{,}0 + 2\mathrm{x}) = 2(0, x)$

$P = 2(0, x) = L$

Fakt

Jeżeli $x$jest wektorem własnym należącym do wartości własnej a, to bxgdzie $b \in \mathbb{C}$i$b \neq 0$też jest takim wektorem:

$Ax = ax$stąd $A(bx) = bA(x) = bax = a(bx)$

Podobnie jeżeli $Ax' = ax'$i $Ax'' = ax''$gdzie $x', x'' \neq 0$to $A(x' + x'') = a(x' + x'')$, $A(x' + x'') = Ax' + Ax'' = ax' + ax'' = a(x' + x'')$

Mamy więc twierdzenie:

Zbiór wektorów własnych operatora Anależących do danej wartości własnej a, uzupełniony wektorem zerowym jest podprzestrzenią liniową przestrzeni N. Oznaczmy tę podprzestrzeń symbolem A_a. Wymiar tej podprzestrzeni jest większy lub równy jeden i nazywamy go krotnością wartości własnej a.

W jaki sposób znajdujemy wektory i wartości własne operatora linowego A(rozwiązujemy zagadnienie własne tego operatora) ?.

Niech $dimN = n$. W przestrzeni Nwybieramy bazę i w tej wybranej bazie konstruujemy macierz $\tilde{A}$operatora A.

Wektorowy $x$odpowiada wektor kolumnowy X.

Równanie własne $Ax = ax$ma więc postać macierzowego $\tilde{A}X = aX$.

Stąd $(\tilde{A} - aI)X = 0$ (*)

Równanie macierzowe (*) można zapisać w postaci układu n równań jednorodnych, w których niewiadomymi są współrzędne wektora xw wybranej przez nas bazie.

Wiemy, że układ równań jednorodnych (*) posiada niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $det(\tilde{A} - aI) = 0$. Łatwo widać, że wyrażenie $det(\tilde{A} - aI)$jest wielomianem stopnia n, nazywamy go wielomianem charakterystycznym operatora *A* i oznaczamy *W(a)*.

Twierdzenie

Wielomian charakterystyczny operatora liniowego nie zależy od wyboru bazy.

Twierdzenie

($a \in \mathbb{C}$jest wartością własną operatora liniowego) $\Leftrightarrow$(*a* jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego).

Krotność a $(dimA_a)$ jest równa n - rz$((\tilde{A} - aI)$.

Wnioski

Odwzorowanie liniowe m wymiarowej przestrzeni liniowej w siebie ma co najwięcej n różnych wartości własnych.

Przykład

Znaleźć wartości i wektory własne odwzorowania liniowego $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, którego macierz ma postać:

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\tilde{A} - aI = \begin{pmatrix} -1-a & -3 \\ 0 & 2-a \end{pmatrix}$

$W(a) = det(\tilde{A} - aI) = (-1-a)(-2-a) = (1+a)(a-2) = a^2 - a - 2$

$W(a) = 0 \quad a^2 - a - 2 = 0$

pierwiastkami wielomianu charakterystycznego są liczby

$a_1 = -1$i $a_2 = 2$

Zapisujemy równanie własne dla wartości własnej $a_1 = -1$

$\tilde{A}X = a_1 X$

$(\tilde{A} - a_1 I)X = 0$

$\tilde{A} - a_1 I = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

stąd równanie $(\tilde{A} - a_1 I)X = 0$ma postać

$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a więc:

$\begin{pmatrix} -3x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Stąd $x_2 = 0$, x_1- dowolna liczba.

Podobnie:

$(\tilde{A} - a_2 I)X = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 - 3x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ a więc $\begin{pmatrix} -3x_1 - 3x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$i stąd:

$x_1 + x_2 = 0$

Wektor własny odpowiadający wartości własnej $a_1 = -1$ma postać $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$gdzie x – dowolna liczba różna od zera, natomiast wektor własny odpowiadający wartości własnej $a_2 = 2$ma postać $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$, gdzie x dowolna liczba różna od zera.

Sprawdzamy:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{x} \\ -2\mathrm{x} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

Przestrzeń euklidesowa

W przestrzeniach wektorowych nie można określić długości wektora, kąta między wektorami, a więc nie można „zajmować" się geometrią.

Będzie to możliwe po wprowadzeniu pojęcia iloczynu skalarnego.

Definicja

L – przestrzeń wektorowa nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Funkcję $(@@@): L \times L \to \mathbb{R}$, która każdej parze wektorów $x, y \in L$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $(x@y)$, nazywamy iloczynem skalarnym w przestrzeni L, jeżeli spełnione są aksjomaty:

1) $(x@y) = (y@x)$ dla każdych $x, y \in L$.
2) $(x@\alpha y) = \alpha(x@y)$ dla każdych $x, y \in L$ i $\alpha \in \mathbb{R}$
3) $(x + y@z) = (x@z) + (y@z)$ dla każdych $x, y, z \in L$
4) $(x@x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in L$ i $(x@x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Definicja

Skończenie wymiarowa przestrzeń wektorową L z iloczynem skalarnym nazywamy przestrzenią euklidesową.

Przykłady

a) $L = \mathbb{R}^n$. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$wybieramy dowolną bazę i niech wektory $x, y \in \mathbb{R}^n$mają w tej bazie postać odpowiednie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Wtedy funkcja: $(x@y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$ jest iloczynem skalarnym.

b) $L = C([a, b])$. Niech $f, g \in L$
Wtedy funkcja:
$(x@y) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ jest iloczynem skalarnym.

c) Niech $x, y \in \mathbb{R}^2$. $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Wtedy funkcja:
$$f(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 2x_2y_2$$
nie jest iloczynem skalarnym.
Policzmy $f(x_0, x_0)$ dla wektora $x_0 = (0,1)$, $f(x_0, x_0) = -2 < 0$. Nie jest spełniony aksjomat 4 iloczynu skalarnego.

Definicja

Długością (normą) wektora *x* w przestrzeni euklidesowej nazywamy liczbę:

$$\|x\| = \sqrt{(x@x)}$$

Twierdzenie (nierówność Schwarza)

Dla dowolnych wektorów *x,y* w przestrzeni euklidesowej spełniona jest nierówność:

$$|(x@y)| \leq \|x\|\|y\|$$

Dowód

Wiemy, że $(x - ty@x - ty) \geqslant 0$dla dowolnej liczby rzeczywistej *t*.
Stąd trójmian kwadratowy $t^2(y@y) - 2\mathrm{t}(x@y) + (x@x) \geq 0$dla każdego $t \in \mathbb{R}$.
a więc wyróżnik $\Delta = 4(x@y)^2 - 4(x@x)(y@y)$musi być mniejszy lub równy 0.

$$4(x@y)^2 - 4(x@x)(y@y) \leq 0$$

czyli $|(x@y)| \leq \|x\|\|y\|$.

Kąt pomiędzy wektorami

Definicja

Miarą kąta pomiędzy niezerowymi wektorami *x* i *y* przestrzeni euklidesowej *L* nazywamy liczbę $\varphi \in [0, \pi]$taką, że:

$$\cos\varphi = \frac{(x@y)}{\|x\|\|y\|}$$

Z nierówności Schwarza wiemy, że:

$$-1 \leqslant \frac{(x@y)}{\|x\|\|y\|} \leqslant 1$$

Definicja

Mówimy, że dwa wektory *x, y* przestrzeni z iloczynem skalarnym są ortogonalne (prostopadłe), jeżeli $(x@y) = 0$. Piszemy wtedy, że $x \perp y$.

Przykład

W przestrzeni $C([0,\pi])$ i iloczynem skalarnym określonym wzorem $(f@g) = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$, gdzie $f, g \in C([0,\pi])$funkcję $f(x) = \sin x$i $g(x) = \cos x$
są ortogonalne:

$$|(f@g)| = \int_0^\pi \sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x dx = -\cos 2x@_0^\pi = -(1-1) = 0$$

Twierdzenie (uogólnione twierdzenie Pitagorasa)

Niech *x, y* wektory przestrzeni euklidesowej i $x \perp y$.

Wtedy:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Dowód:

$\|x+y\|^2 = (x+y@x+y) = (x@x) + (x@y) + (y@x) + (y@y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$bo $(x@y) = (3@x) = 0$

Łatwo widać, że jeżeli wektory *x, y, z,...,w* są parami ortogonalne to:

$$\|x+y+z+\ldots+w\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \|w\|^2$$

Nierówność Schwarza.

L – przestrzeń euklidesowa. $x, y \in L$.

Wtedy:

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$$

Dowód: Dla $x=0$ lub $y=0$ nierówność jest oczywista. Załóżmy, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$.
Bierzemy wektor $x-ty$, gdzie t – dowolna liczba rzeczywista, $t \neq 0$.
Wiemy, że $(x-ty|x-ty) \geq 0$. Stąd trójmian kwadratowy:

$$t^2(y|y) - 2t(x|y) + (x|x) \geq 0$$

a więc jego wyróżnik musi być mniejszy lub równy zero.

$$\Delta = 4(x|y)^2 - 4(x|x)(y|y) \leq 0$$

Stąd $(x|y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$

a więc $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$

Definicja

Bazę $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ w przestrzeni euklidesowej nazywamy bazą ortogonalną jeżeli $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$ dla $i \neq j$, $i,j=1,2,\ldots,n$.

Jeżeli dodatkowo $(e_i|e_i) = 1$ dla $i=1,2,..,n$ to bazę nazywamy ortonormalną.

Twierdzenie

W n wymiarowej przestrzeni euklidesowej istnieją bazy ortonormalne.

Konstrukcję takiej bazy przedstawia (rekurencyjna) metoda ortonormalizacji Grama-Schmidta.

Niech $x_1, x_2, ..., x_n$ baza w przestrzeni euklidesowej L.

Wtedy układ wektorów $(e_1, e_2, ..., e_n)$, gdzie

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \quad , \quad e_2 = \frac{x_2 - (e_1|x_2)e_1}{\|x_2 - (e_1|x_2)e_1\|} \quad , \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad e_n = \frac{x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (e_i|x_n)e_i}{\|x_n - (e_i|x_n)e_i\|}$$

jest bazą ortonormalną w L.

Niech $(e_1, e_2, ..., e_n)$ baza ortonormalna w przestrzeni euklidesowej L. Wyrazimy iloczyn skalarny dwóch wektorów tej przestrzeni przez ich współrzędne w tej bazie.

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n \, , \, y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + ... + y_n e_n$$

$$(x|y) = (x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n | y_1 e_1 + y_2 e_2 + ... + y_n e_n) =$$
$$= (x_1 e_1 | y_1 e_1) + (x_1 e_1 | y_2 e_2) + ... + (x_n e_n | y_n e_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

bo $(e_i|e_k) = \delta_{ik}$ dla *i,k = 1,2,...,n.*

Znajdziemy teraz współrzędne wektora *x* w bazie ortonormalnej $(e_1, e_2, ..., e_n)$:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n \quad .$$

Mnożymy tę równość skalarnie z prawej strony kolejno przez wektory $e_1, e_2, ..., e_n$:

$$(x|e_1) = (x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n | e_1) = x_1$$
$$(x|e_2) = (x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n | e_2) = x_2$$

.
.
.

$$(x|e_n) = (x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n | e_n) = x_n$$

a więc:

$$x=\sum_{i=i}^{n}(x|e_i)e_i$$

Geometria analityczna

Prosta na płaszczyźnie

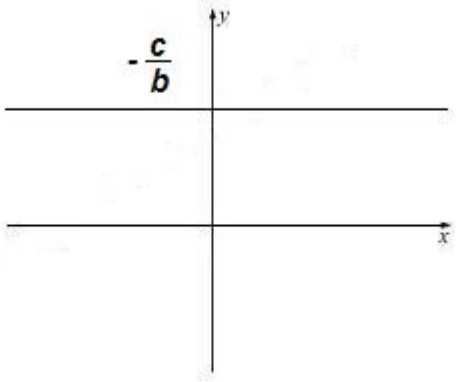
Równanie $ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq 0$ nazywamy równaniem prostej w postaci ogólnej.

Prosta na płaszczyźnie może też być określona równaniem $y=mx+n$ lub układem równań $x=kt+l$, $y=pt+r$ gdzie $t\in\mathbb{R}$ i $k^2+p^2\neq 0$.

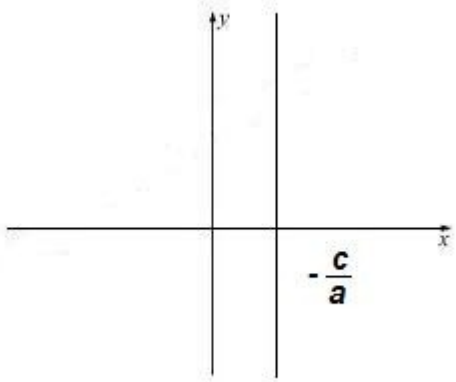
Położenie prostej w kartezjańskim układzie współrzędnych

Niech prosta będzie dana w postaci ogólnej równaniem $ax+by+c=0$.

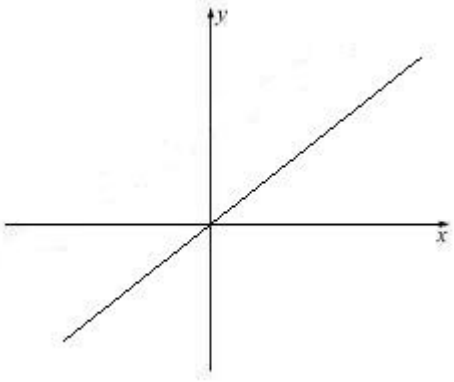
1. $a=0$, wtedy $y=-\frac{c}{b}$, jeżeli $c=0$ to prosta pokrywa się z osią O_X



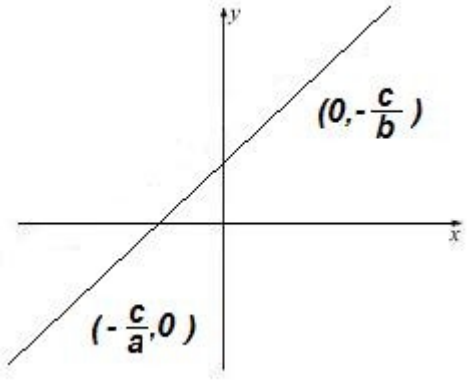
2. $b=0$, wtedy $x=-\frac{c}{a}$ jeżeli $c=0$, prosta pokrywa się z osią O_Y



3. $c=0$, $b\neq 0$ i $a\neq 0$



4. $a\cdot b\cdot c\neq 0$



Miara kąta pomiędzy prostymi

Niech dwie różne proste na płaszczyźnie będą zadane równaniami $a_1 x+b_1 y+c_1=0,\ a_2 x+b_2 y+c_2=0$.

Wtedy miarę kąta φ pomiędzy tymi prostymi oblicza się z równania:

$$\cos\varphi=\pm\frac{a_1 a_2+b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

Stąd proste są prostopadłe, jeżeli $a_1 a_2+b_1 b_2=0$ i równoległe jeżeli $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$.

Jeżeli proste zadane są w postaci kierunkowej:

$$y=k_1+l_1,\ y=k_2 x+l_2$$

wtedy miarę kąta φ pomiędzy nimi obliczmy z równania:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1 k_2}$$

i proste są równoległe jeżeli $k_1=k_2$, prostopadłe jeżeli $k_1\cdot k_2=-1$

Odległość punktu od prostej

Jeżeli prosta l dana jest równaniem $ax+by+c=0$ a punkt A ma współrzędne (x_0, y_0) to odległość punktu A od prostej l dana jest wzorem:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Odległość dwóch prostych równoległych:
$ax+by+c_1=0$, $ax+by+c_2=0$

Liczymy według wzoru:

$$d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Przykłady

1. Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt $A(x_1, y_1)$
   $ax+by+c=0$
   $ax_1+by_1+c=0$
   Stąd szukane równanie ma postać:
   $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

2. Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez dwa różne punkty $A(x_1, y_1)$ i $A(x_2, y_2)$.
   $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$
   $a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0$
   stąd $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}-\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=0$

3. Znaleźć równanie prostej równoległej do prostej $ax+by+c=0$ i przechodzącej przez punkt $A(x_1, y_1)$

   $ax+by+c=0$
   $ax_1+by_1+\lambda=0$

   Po odjęciu stronami tych równań dostajemy:

   $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

4. Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt $A(x_1, y_1)$ i prostopadłej do prostej $ax+by+c=0$
   Z warunku prostopadłości równanie szukanej prostej ma postać:
   $bx-ay+\lambda=0$
   Dodatkowo mamy: $bx_1-ay_1+\lambda=0$
   Stąd po odjęciu stronami dostajemy równania szukanej prostej:
   $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

Współrzędne punktu w dwóch różnych układach współrzędnych

Na płaszczyźnie mamy dwa układy współrzędnych kartezjańskich O_{xy} i $O_{x'y'}$.

Niech równania:

$$a_1 x+b_1 y+c_1=0$$
$$a_2 x+b_2 y+c_2=0$$

są równaniami osi $O_{x'}$ i $O_{y'}$ w układzie O_{xy} . Wtedy współrzędne x_0' , y_0' dowolnego punktu płaszczyzny względem układu $O_{x'y'}$ dane są przez współrzędne x_0 , y_0 tego punktu względem układu O_{xy} wzorami:

$$x_0'=a_1 x_0+b_1 y_0+c_1$$

$$y_0'=a_2 x_0+b_2 y_0+c_2$$

Formy dwuliniowe

Definicja

L – przestrzeń liniowa nad ciałem skalarów K ($K=\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$) $x, y\in L$
Wyrażenie $A(x, y)$ nazywamy formą dwuliniową wektorów x, y jeżeli:

1. $A(x, y)$ jest przy ustalonym y funkcjonałem liniowym od argumentu x.
2. $A(x, y)$ jest przy ustalonym x funkcjonałem liniowym od argumentu y.

Ad 1

$x, x_1, x_2, y\in L$, $\lambda\in K$

$$A(x_1+x_2, y)=A(x_1, y)+A(x_2+y)$$
$$A(\lambda x, y)=\lambda A(x, y)$$

Przykłady

1. L - przestrzeń euklidesowa, $x, y \in L$.
   $A(x, y) = (x|y)$ jest formą dwuliniową .

2. $K(s,t)$ funkcja ciągła zmiennych s i t $t, s \in [a, b]$
   $A(f, g) \in C([a, b])$
   $A(f, g) = \int_a^b \int_a^b k(s,t) f(s) g(t)\, ds dt$ jest formą dwuliniową.

Formę dwuliniową nazywamy symetryczną jeżeli:

$A(x, y) = A(y, x)$ dla wszystkich $x, y \in L$

Uwaga:

Iloczyn skalarny jest formą symetryczną.

Forma dwuliniowa zdefiniowana w drugim przykładzie jest symetryczna jeżeli $K(s,t) = K(t,s)$ dla wszystkich $s, t \in [a, b]$.

Niech L – n wymiarowa przestrzeń liniowa. $e_1, e_2, \ldots, e_n$ baza w przestrzeni L. Łatwo sprawdzić, że zachodzi:

Fakt

Przy ustalonej bazie $e_1, e_2, \ldots, e_n$ w przestrzeni liniowej L każdą formę dwuliniową można zapisać w postaci:

$$A(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (odp. $y_1, y_2, \ldots, y_n$) współrzędne wektora x (odp. y) w tej bazie, a $a_{ik} = A(e_i, e_k)$.

Macierz (a_{ik}) nazywa się macierzą formy dwuliniowej $A(x, y)$ w bazie $e_1, e_2, \ldots, e_n$.