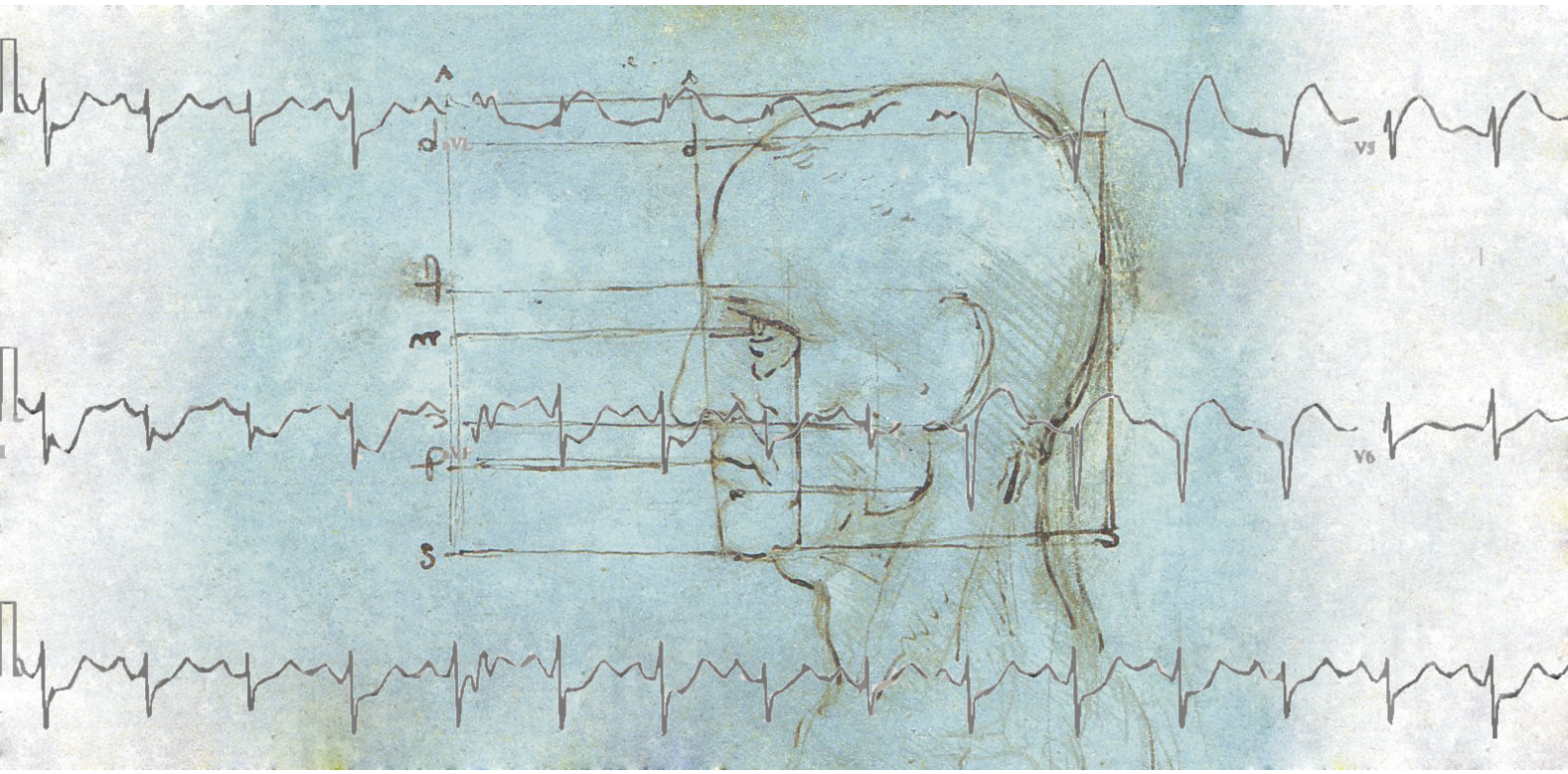


Podstawy fizyki dla fizyki medycznej III

ćwiczenia

Justyna Strankowska, Anna Synak

Gdańsk, 2012

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytetu Gdańskiego

Skrypt powstał w ramach projektu „Kształcimy profesjonalistów – kompleksowy program kształcenia skierowany do studentów, absolwentów oraz studentów niepełnosprawnych Uniwersytetu Gdańskiego” współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach środków Europejskiego Funduszu Społecznego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET GDAŃSKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

SEMESTR III

Literatura:

1. R. Splinter, “Physics in medicine and biology”, CRC Press, 2010.
2. P. Davidovits, „Physics in Biology and Medicine”, Academic Press, 2008.
3. A. McCormick, A. Elliot, “Health Physics”, Cambridge University Press, 2001.
4. M. Hollins, “Medical Physics”, 1990.
5. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, „Podstawy Fizyki”, Tom 3, PWN, 2003.
6. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, „Podstawy Fizyki – Zbiór zadań”, PWN, 2005.
7. D. Halliday, R. Resnick, ”Fizyki”, Tom 2, PWN, 1996.
8. J. Kalisz, M. Massalska, J. M. Massalski, „Zbiór zadań z fizyki z rozwiązaniami”, Część I, PWN, 1987.
9. B. Jaworski, A. Dietłaf, L. Miłkowska, G. Siergiejew, „Kurs Fizyki”, Tom II, PWN, 1974.
10. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, „Wstęp do fizyki”, Tom II, PWN, 1991.

Zadania w tym skrypcie pochodzą z źródeł wymienionych powyżej.

Rozdział I Elektrostatyka I

1. Ładunki elektryczne

Badaniem wzajemnego oddziaływania i właściwości ładunków elektrycznych nieruchomych w rozpatrywanym układzie współrzędnych zajmuje się **elektrostatyka**.

Rodzaje ładunków elektrycznych:

a) dodatnie (np. protony o masie $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g);

b) ujemne (np. elektrony o masie $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ g).

Ładunki różnoimienne przyciągają się, jednoimienne odpychają.

Prawo zachowania ładunków elektrycznych:
Ładunki elektryczne nie mogą ani powstawać, ani zanikać, mogą natomiast przechodzić z jednego ciała na inne lub przemieszczać się wewnątrz tego samego ciała.

Ładunek elektryczny jest wielkością skwantowaną, może przyjmować tylko wartości z dyskretnego zbioru liczb:

$$q = ne,$$

gdzie:

$n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$;
e – ładunek elementarny o wartości $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$C.

Przewodniki to ciała, w których ładunki mogą swobodnie poruszać się wewnątrz przewodnika, w całej jego objętości (np. metale, ciało ludzkie, ziemia). Nośnikami ładunku elektrycznego w metalach są elektrony swobodne, natomiast w elektrolitach zdolność przemieszczania się posiadają również ładunki dodatnie.

Izolatory (dielektryki) to ciała, w których ładunki elektryczne są nieruchome (np. szkło, tworzywa sztuczne).

Prawo Coulomba
Siła elektrostatycznego oddziaływania dwóch punktowych ładunków elektrycznych q_1 i q_2 jest wprost proporcjonalna do iloczynu tych ładunków i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu ich odległości r:

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}.$$

Współczynnikiem proporcjonalności w tym równaniu jest

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2},$$

gdzie:

ε_0 – przenikalność elektryczna próżni ($\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}$).

Jednostką ładunku elektrycznego q jest **kulomb** [C], który jest równy ładunkowi, jaki przepływa przez poprzeczny przekrój przewodnika w ciągu 1s jeżeli w przewodniku płynie prąd stały o natężeniu 1 ampera:

$$q = i \cdot t,$$

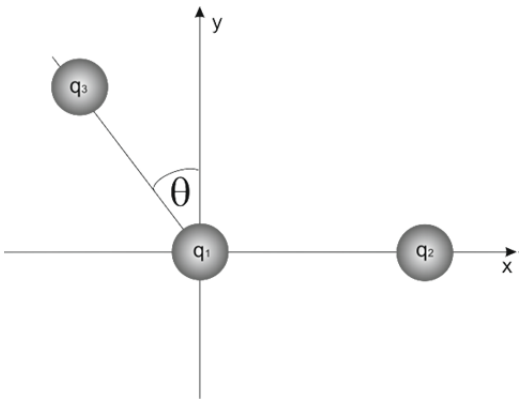
gdzie:
i – natężenie prądu;
t – czas przepływu ładunku.

ZADANIA

Zadanie 1[7]. Moneta miedziana ma masę 3,1 g. Jako elektrycznie obojętna zawiera równe ilości ładunku elektrycznego dodatniego i ujemnego. Jak wielkie są te ładunki? Wartości ładunku dodatniego i ujemnego atomu miedzi są takie same i wynoszą $4{,}6 \cdot 10^{-18}$ C każdy, masa cząsteczkowa miedzi wynosi 64 g/mol.

Zadanie 2 [7]. Całkowity dodatni ładunek i całkowity ujemny ładunek został rozsunięty w monecie miedzianej na taką odległość, że siła działająca między nimi wynosi 4,5 N. na jaką odległość musiały być rozsunięte te ładunki? Wartość ładunku q monety miedzianej to $1{,}3 \cdot 10^5$ C. Ładunki dodatni i ujemny atomu miedzi są sobie równe.

Zadanie 3 [7]. Na rysunku przedstawiono trzy ładunki q_1, q_2 i q_3. Obliczyć siły działające na ładunek q_1. Zakładamy, że q_1 = -1,0 10^{-6} C, q_2 = 3,0 10^{-6} C, q_3 = -2,0 10^{-6} C, r_{12} =15 cm, r_{13} =10 cm i θ= 30°.



Zadanie 4 [7]. W atomie wodoru odległość między elektronem, a protonem wynosi około $5{,}3\cdot10^{-11}$ m. Obliczyć:
a) siłę przyciągania elektrostatycznego;
b) siłę przyciągania grawitacyjnego miedzy tymi dwiema cząstkami.

Zadanie 5 [7]. Obliczyć odpychająca siłę Coulomba działającą między dwoma protonami znajdującymi się w jądrze żelaza. Odległość między protonami wynosi $4{,}0\cdot10^{-15}$ m.

Zadanie 6 [7]. Siła elektrostatyczna działająca między dwoma jednakowymi jonami oddalonymi o $5{,}0\cdot10^{-10}$ m wynosi $3{,}7\cdot10^{-9}$ N. Jaki jest ładunek każdego jonu? Ile elektronów brakuje każdemu z jonów?

Zadanie 7 [7]. Dwa umieszczone na stałe ładunki $+1{,}0\cdot10^{-6}$ C i $-3{,}0\cdot10^{-6}$ C oddalone są o 10 cm. Gdzie należy umieścić trzeci ładunek, aby nie działała na niego żadna siła? Zakładamy, że trzeci ładunek jest ładunkiem punktowym.

Zadanie 8 [7]. Dwie małe kulki są naładowane dodatnio. Ich sumaryczny ładunek wynosi $5{,}0\cdot10^{-5}$ C. W jaki sposób jest on podzielony między kulki, jeżeli wiadomo, że w odległości 2 m każda kulka jest odpychana od drugiej siłą 1 N?

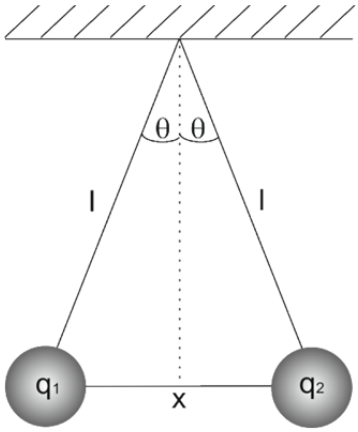
Zadanie 9 [7]. Chcemy podzielić ładunek Q na dwie części q oraz Q-q tak, żeby po umieszczeniu ich w dowolnej odległości od siebie otrzymać maksymalną kulombowską siłę odpychającą. Znaleźć zależność między Q a q.

Zadanie 10 [7]. O ile muszą być oddalone od siebie dwa protony żeby elektryczna siła odpychająca, działająca na każdy z protonów, była równa jego ciężarowi na Ziemi? Masa protonu wynosi $1{,}7\cdot10^{-27}$ kg.

Zadanie 11 [7]. Dwa jednakowe ładunki dodatnie Q umieszczone są w odległości $2a$. Siła działająca na mały, dodatni ładunek próbny umieszczony w połowie drogi między nimi wynosi zero. Znaleźć kierunek siły działającej na ładunek próbny, jeżeli przemieści się on trochę albo w stronę któregoś z ładunków lub pod kątem prostym do linii łączącej ładunki. W którym z podanych przypadków równowaga jest trwała, a w którym nietrwała?

Zadanie 12 [7]. Dwa swobodne ładunki punktowe $+q$ i $+4q$ znajdują się w odległości l. Trzeci ładunek umieszczony jest tak, że cały ładunek znajduje się w stanie równowagi. Znaleźć położenie, wartość i znak trzeciego ładunku. Czy równowaga jest trwała?

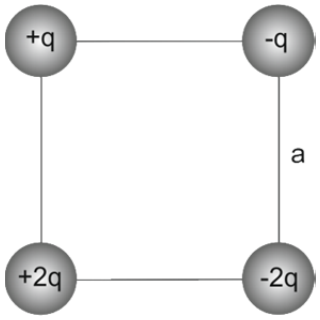
Zadanie 13 [7]. Dwie jednakowe, przewodzące kulki, każda o masie m i ładunku q, zawieszone są na jedwabnej nici o długości l. Zakładamy, że kąt θ jest tak mały, że można zastąpić $tg\,\theta$ prawie równym mu $sin\,\theta$. Przy tym założeniu wykazać, że odległość między kulkami wynosi $x = \left(\frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}$. Obliczyć q dla l = 120 cm, m = 10 g oraz x = 5 cm.



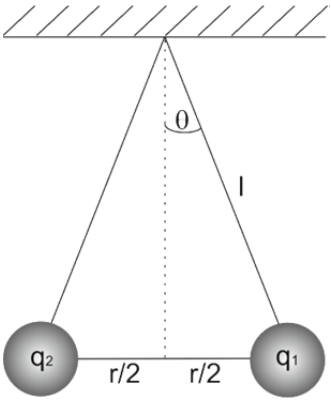
Zadanie 14 [7]. Trzy ładunki punktowe $+4{,}0\cdot10^{-6}$C są umieszczone w rogach równobocznego trójkąta o boku 10 cm. Jaka siła (wartość i kierunek) działa na każdy ładunek?

Zadanie 15 [7]. W dwóch przeciwległych rogach kwadratu znajdują się ładunki Q, w dwóch pozostałych ładunki q. Jaka jest zależność między Q i q, jeśli wypadkowa siła działająca na Q wynosi zero? Czy można tak dobrać q, żeby wypadkowa siła działająca na każdy ładunek była równa zeru?

Zadanie 16 [7]. Jaka wypadkowa siła działa na ładunek umieszczony w dolnym, lewym rogu kwadratu? Założyć, że $q = 1{,}0\cdot10^{-7}$ C oraz $a = 5$ cm. Ładunki nie zmieniają swojej pozycji.



Zadanie 17 [8]. Dwie kuleczki zawieszone obok siebie na izolowanych niciach mają jednakowe ładunki elektryczne. Masa kuleczek $m = m_1 = m_2 = 10^{-5}$ kg, długość nitek $l = 0{,}2$ m. Gdy nitki zaczepimy w tym samym punkcie, kuleczki na skutek odpychania się zostaną oddalone na odległość $r = 0{,}04$ m. Obliczyć elektryczny ładunek każdej z tych kulek.



Zadanie 18 [8]. W wierzchołkach kwadratu o bokach a = 0,1 m umieszczono kolejno zgodnie z ruchem wskazówek zegara 4 ładunki: $q_1 = q_2$ i jest równy $10/3 \cdot 10^{-9}$ C oraz $q_3 = q_4$ i jest równy $-100/3 \cdot 10^{-9}$C. Obliczyć wartość oraz kierunek natężenia pola elektrycznego tego układu w środku kwadratu.

Zadanie 19. W wierzchołkach kwadratu o bokach równych a znajdują się jednakowe ładunki jednoimienne q. Jaki ładunek q' przeciwnego znaku należy umieścić w środku kwadratu, aby siła działająca na każdy z ładunków była równa zero.

Zadanie 20 [8]. Dwa ładunki elektryczne $q_1 = 50/9 \cdot 10^{-9}$ C oraz $q_2 = 100/9 \cdot 10^{-9}$ C znajdują się w odległości r = 0,08 m w powietrzu, a następnie w oleju parafinowym o względnej przenikalności elektrycznej ε = 1,8. Obliczyć siłę wzajemnego przyciągania tych ładunków w powietrzu i w oleju parafinowym.

2. Pole elektryczne

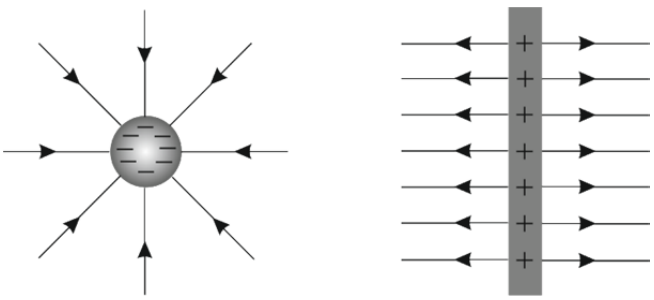
Ładunek elektryczny wytwarza pole elektryczne w przestrzeni, która go otacza. Na dowolny ładunek działa siła elektrostatyczna, która jest wywołana działaniem pola elektrycznego, wytworzonego przez ładunki znajdujące się w miejscu rozważanego ładunku.

Natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ w danym punkcie jest wielkością wektorową, jego wartość jest równa sile $\vec{F}$ z jaką to pole oddziałuje na jednostkowy ładunek dodatni q_0 (tzw. ładunek próbny) umieszczony w tym punkcie, a kierunek odpowiada kierunkowi działania siły.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}.$$

Jednostką natężenia pola elektrycznego jest *N*/*C*.

Linie pola elektrycznego – graficzny sposób przedstawienia pola elektrycznego za pomocą krzywych takich, że styczna do danej linii pola ma taki sam kierunek i zwrot jak wektor natężenia pola elektrycznego. Linie pola elektrycznego wychodzą od ładunku dodatniego i są skierowane ku ładunkowi ujemnemu. W przypadku, gdy źródłem pola jest ładunek punktowy, linie pola rozchodzą się promieniście od ładunku dodatniego lub do ładunku ujemnego. Pole takie nazywa się polem centralnym. Gęstość linii pola jest proporcjonalna do wartości natężenia pola elektrycznego w danym obszarze.



Pole ładunku punktowego:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}.$$

Dipol elektryczny – układ dwóch ładunków q o jednakowych wartościach ale przeciwnych znakach znajdujących się w odległości d od siebie. Elektryczny moment dipolowy $\vec{p}$ jest iloczynem wartości ładunku oraz odległości między ładunkami i jest skierowany od ładunku ujemnego do ładunku dodatniego:

$$\vec{p} = qd.$$

Wartość natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez dipol w dowolnym punkcie leżącym na osi dipola wynosi:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^3},$$

gdzie z jest odległością między punktem i środkiem dipola.

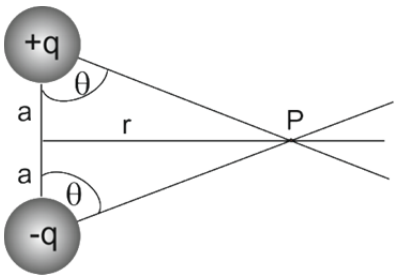
Zasada superpozycji pól

Pole elektryczne w danym punkcie, wynikające z oddzielnych rozkładów ładunku jest sumą wektorową pól pochodzących od poszczególnych rozkładów.

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \sum_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}} \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{i}}.$$

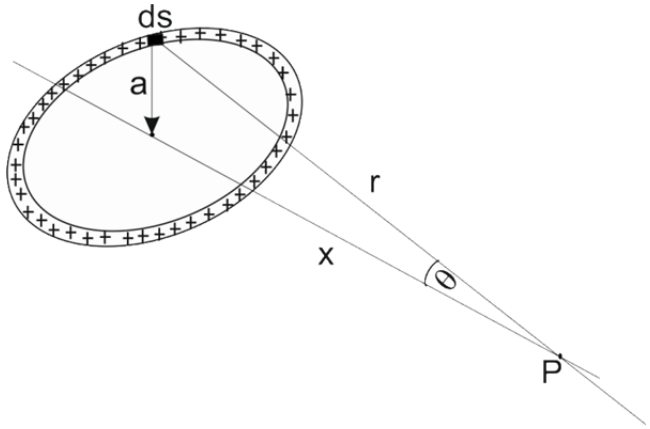
ZADANIA

Zadanie 21 [7]. Dwa ładunki, dodatni i ujemny, o takiej samej wartości q, oddalone są od siebie o $2a$. Jakie jest natężenie pola wytworzonego przez te ładunki w punkcie P leżącym na symetralnej odcinka łączącego obydwa ładunki w odległości, r od jego środka. Założenie: $r >> a$.

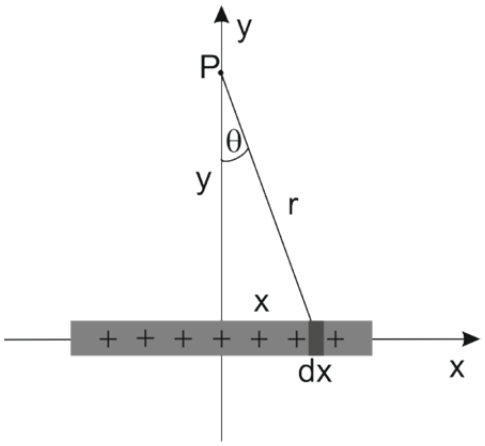


Zadanie 22 [7]. Ładunek $q_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$ C umieszczony jest w odległości 10 cm od ładunku $q_2 = 2{,}0 \cdot 10^{-6}$ C. W którym punkcie linii łączącej obydwa ładunki natężenie pola elektrycznego równa się zeru?

Zadanie 23 [7]. Obliczyć natężenie pola elektrycznego dla punktów leżących na osi naładowanego pierścienia o ładunku q i promieniu a, leżących w odległości x od jego środka.



Zadanie 24 [7]. Obliczyć natężenie pola elektrycznego w odległości y od nieskończenie długiego naładowanego pręta, dla którego gęstość liniowa ładunku (ładunek przypadający na jednostkę długości – [C/m]) ma stałą wartość λ.



Zadanie 25 [8]. Na okręgu koła o promieniu $r = 0{,}05$ m w równoległych odstępach znajdują się trzy ładunki elektryczne $q_1 = q_2 = 1/3 \cdot 10^{-8}$ C oraz $q_3 = -1/3 \cdot 10^{-8}$ C. Obliczyć wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego w środku tego okręgu.

3. Prawo Gaussa

Prawo Gaussa określa związek między strumieniem pola elektrycznego Φ w punktach znajdujących się na zamkniętej, hipotetycznej powierzchni *S*, zwanej powierzchnią Gaussa, a całkowitym ładunkiem q zamkniętym w tej powierzchni:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q.$$

Strumień pola elektrycznego przepływający przez powierzchnię Gaussa:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \circ d\vec{S},$$

gdzie, $\vec{E}$ jest wektorem natężenia pola elektrycznego, a $d\vec{S}$ jest elementem powierzchni, przedstawionym w postaci wektora, którego długość jest równa wielkości powierzchni, a kierunek jest kierunkiem normalnej zewnętrznej (prostopadły do powierzchni Gaussa i skierowany na zewnątrz tej powierzchni).

Jednostką strumienia pola elektrycznego jest [N·m^2/C].

Strumień pola elektrycznego jest proporcjonalny do całkowitej liczby linii pola elektrycznego, które przechodzą przez powierzchnię Gaussa.

Przy wykonywaniu obliczeń natężenia pola elektrycznego należy pamiętać o:

1. Całkowanie odbywa się po powierzchni zamkniętej.
2. Ładunek MUSI być zawarty wewnątrz powierzchni Gaussa.
3. Ładunek jest sumą algebraiczną wszystkich dodatnich i ujemnych ładunków zawartych wewnątrz powierzchni Gaussa.
4. Wektor powierzchni:
   - jest wektorem normalnym, prostopadłym do powierzchni Gaussa,
   - jest zaczepiony na powierzchni Gaussa;
   - jego zwrot jest na zewnątrz powierzchni Gaussa;
   - jego długość to pole powierzchni Gaussa.
5. Wybór powierzchni Gaussa:
   - umieszczamy zamkniętą, powierzchnię Gaussa wokół ładunku q, tak by przechodziła przez punkt, w którym mamy obliczyć natężenie pola elektrycznego;
   - wybieramy najprostszą z możliwych powierzchnię Gaussa (na przykład sferyczną), tak by uprościć obliczenia całki zamkniętej po tej powierzchni.

ZADANIA

Zadanie 26 [7]. Hipotetyczna powierzchnia walca o promieniu R umieszczona jest w jednorodnym polu elektrycznym (tj. zamknięta powierzchnia cylindryczna). Oś walca jest równoległa do linii pola. Ile wynosi strumień pola elektrycznego dla tej powierzchni.

Zadanie 27. Udowodnić, że Prawo Coulomba wynika z Prawa Gaussa.

Zadanie 28. Obliczyć natężenie pola elektrycznego w odległości r od środka sfery o promieniu R, naładowanej ze stałą gęstością powierzchniową ładunku σ.

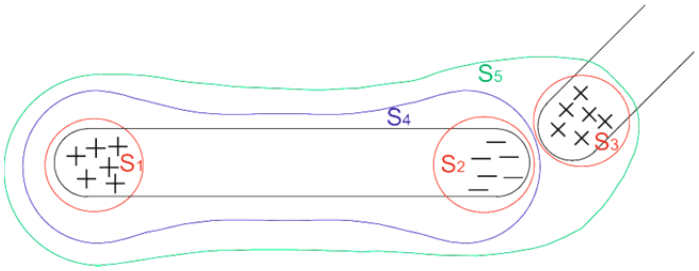
Zadanie 29. Obliczyć natężenie pola elektrycznego w odległości r od środka kuli o promieniu R, naładowanej ze stałą gęstością objętościową ładunku ρ.

Zadanie 30. Obliczyć natężenie pola elektrycznego w odległości r od nieskończenie długiego naładowanego pręta o liniowej gęstości ładunku λ.

Zadanie 31. Obliczyć natężenie pola elektrycznego w odległości r od nieskończonej, naładowanej płaszczyzny ze stałą gęstością powierzchniową ładunku σ.

Zadanie 32. Obliczyć natężenie pola elektrycznego w odległości r od dwóch nieskończonych, naładowanych płaszczyzn ze stałą gęstością powierzchniową ładunku σ.

Zadanie 33 [7]. Ładunek początkowo obojętnego, izolowanego przewodnika został rozdzielony przez zbliżenie dodatnio naładowanego pręta. Co można wnioskować z Prawa Gaussa o strumieniu przechodzącym przez pięć powierzchni Gaussa przedstawionych na rysunku. Ujemny ładunek indukowany w przewodniku jest równy dodatniemu ładunkowi pręta.



Zadanie 34 [7]. Ładunek jest rozłożony równomiernie na nieskończonym długim walcu o promieniu R. Pokazać, że natężenie pola elektrycznego w odległości r od osi walca ($r < R$) jest dane wzorem $E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$, gdzie ρ jest gęstością objętościową ładunku. Jakiego wyniku należy oczekiwać dla $r > R$?

Zadanie 35 [7]. Punktowy ładunek $q = 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ C umieszczono w środku kulistej wnęki o promieniu 3 cm, znajdującej się w kawałku metalu. Korzystając z Prawa Gaussa obliczyć natężenie pola elektrycznego w punkcie a, leżącym w połowie odległości od środka wnęki do jej powierzchni oraz w punkcie b leżącym poza wnęką (w metalu).

Zadanie 36 [7]. Nieprzewodząca kula o promieniu a jest umieszczona w środku kulistej, przewodzącej powłoki o wewnętrznym promieniu c. Ładunek $+Q$ rozmieszczony jest jednorodnie wewnątrz kuli (gęstość ładunku ρ). Zewnętrzna powłoka ma ładunek $-Q$. Znaleźć $E(r)$:

a) w kuli ($r < a$);
b) między kulą a powłoką ($a < r < b$);
c) wewnątrz powłoki ($b < r < c$);
d) na zewnątrz powłoki ($r < c$).

Jakie ładunki znajdują się na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni powłoki?

Zadanie 37 [7]. Długi nieprzewodzący walec, na którym umieszczono ładunek $+q$, otoczony jest przez przewodzącą, cylindryczną powłokę o ładunku $-2q$. Stosując Prawo Gaussa znaleźć:

a) natężenie pola elektrycznego w punktach na zewnątrz powłoki;
b) rozkład ładunku na powłoce;
c) Natężenie pola elektrycznego w obszarze między walcem a powłoką.

Zadanie 38 [8]. Z pewnego ładunku elektrycznego wychodzi $N = 500$ linii sił pola. Obliczyć wartość tego ładunku.

Zadanie 39 [6]. Wyznacz wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego w obszarze między długim przewodem o promieniu $r_p = 0{,}1$ mm i liniowej gęstości ładunku $\alpha_p = 5$ μC/m umieszczonym współosiowo w długim, plastikowym cylindrze o promieniu $r_c = 5$ mm i liniowej gęstości ładunku $\alpha_c = -7$ μC/m oraz na zewnątrz plastikowego cylindra.

Zadanie 40 [6]. Jądro atomu złota ma promień $r = 6{,}2 \cdot 10^{-15}$ m i ładunek dodatni $q = Ze$ ($Z = 79$). Sporządź wykres zależności wartości natężenia pola elektrycznego wytwarzanego przez jądro od odległości od środka jądra zmieniającej się od zera do około dwóch promieni jądra. Założenie: jądro ma kształt kuli, w której ładunek jest rozłożony równomiernie, ładunek elektronu $e = 1{,}6. \cdot 10^{-19}$ C).

Rozdział II Elektrostatyka II

4. Potencjał elektryczny

Potencjał elektryczny V jest właściwością pola elektrycznego, jest on elektryczną energią potencjalną E_p przypadającą na jednostkowy ładunek q w wybranym punkcie pola elektrycznego:

$$V = \frac{E_p}{q}.$$

Elektryczna energia potencjalna jest energią naładowanego ciała w zewnętrznym polu elektrycznym.

Potencjał elektryczny jest wielkością skalarną.

Różnica potencjałów ΔV między punktami A i B znajdującymi się w polu elektrycznym jest równa różnicy energii potencjalnej na jednostkowy ładunek między tymi dwoma punktami:

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{E_{p\,B}}{q} - \frac{E_{p\,A}}{q} = \frac{\Delta E_p}{q} = -\frac{W_{AB}}{q}.$$

Różnica potencjałów jest równa pracy W wykonanej przez siłę elektrostatyczną, przy przesunięciu jednostkowego ładunku z jednego punktu do drugiego.

W dowolnym punkcie pola elektrycznego potencjał elektryczny wynosi:

$$V = -\frac{W_\infty}{q},$$

gdzie W_∞ jest pracą wykonaną przez pole elektryczne nad cząstką naładowaną, gdy cząstka przesuwa się z nieskończoności do punktu końcowego.

Praca dW wykona nad cząstką przez siłę $\vec{F}$ przy przesunięciu o $d\vec{l}$ wynosi:

$$dW = \vec{F} \circ d\vec{l} = q\vec{E} \circ d\vec{l}.$$

Całkowita praca W zatem wynosi:

$$W = q\int_A^B \vec{E} \circ d\vec{l}.$$

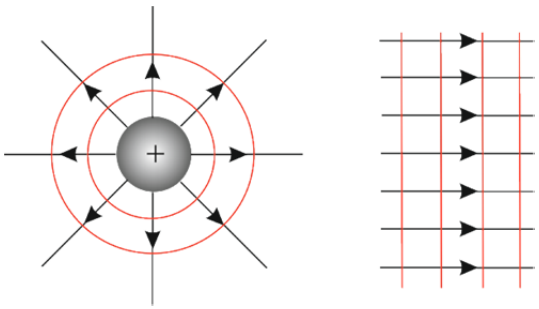
Różnicę potencjałów między punktami A i B (**napięcie elektryczne**) można wyznaczyć zatem z następującej zależności:

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E} \circ d\vec{l}.$$

Jednostką potencjału elektrycznego jest [J/C] czyli wolt [V], w związku z tym jednostką energii jest elektronowolt [eV]:

$$1\ \text{eV} = \text{e}(1\ \text{V}) = (1{,}60 \cdot 10^{-19}\text{C})(1\ \text{J/C}) = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\text{J}.$$

Zbiór punktów, w których potencjał jest jednakowy nazywamy **powierzchnią ekwipotencjalną**. Powierzchnie ekwipotencjalne są prostopadłe do linii sił pola, czyli do $\vec{E}$.



Potencjał pola ładunku punktowego, w odległości *r* od tego ładunku:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

Potencjał pola zbioru ładunków punktowych:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}.$$

Potencjał pola dla ciągłego rozkładu ładunku:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}.$$

Potencjał pola dipola elektrycznego o momencie dipolowym $p = qd$:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2},$$

dla $r >> d$.

Potencjalna energia elektryczna układu ładunków punktowych jest definiowana jako praca potrzebna do utworzenia tego układu z ładunków znajdujących się w nieskończenie dużej odległości:

$$E_p = W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}.$$

Natężenie pola elektrycznego zależy od właściwości środowiska, jest inna dla pojedynczego ładunku, dipola, naładowanej płaszczyzny, czy płytki. Liczbowo, natężenie pola elektrycznego jest odwrotnie proporcjonalne do bezwzględnej przenikalności elektrycznej środowiska ε':

$$\varepsilon' E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = D,$$

gdzie D jest **indukcją elektryczną**.

5. Analiza pola elektrycznego

Gradient pola elektrycznego – maksymalna wartość dV/dl w danym punkcie:

$$E = -\left(\frac{dV}{dl}\right)_{max} = -grad\, V,$$

gdzie

$$grad\, V = \nabla V = \vec{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Związek między zapisem wektorowym a skalarnym pola elektrycznego można zatem zapisać jako:

$$\vec{E} = -grad\, V(\vec{r}) = -\left(\vec{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right),$$

gdzie jest potencjałem skalarnym pola. Z warunku tego wynika znikanie rotacji pola elektrycznego:

$$rot\vec{E} = 0.$$

Dywergencja pola elektrycznego jest równa gęstości ładunku (prawo Gaussa w postaci różniczkowej):

$$\varepsilon_0 div\vec{E} = \rho,$$

gdzie

$$div\ \vec{E} = \nabla\ \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Równanie Poissona:

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Rotacja pola elektrycznego jest równa szybkości zmian pola magnetycznego:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

gdzie

$$rot\ \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \vec{\jmath}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right).$$

6. Przewodniki w polu elektrycznym

W przewodnikach, ładunki elektryczne pod wpływem działania pola elektrycznego mogą się swobodnie poruszać. Siła działająca na elektrony swobodne w przewodniku (metalu) umieszczonym w polu elektrycznym jest proporcjonalna do natężenia tego pola. Zatem:

a) we wszystkich punktach wewnątrz przewodnika $\vec{E} = 0$ (klatka Faradaya);

b) we wszystkich punktach na powierzchni przewodnika $\vec{E} = \vec{E}_n$ (wektor natężenia pola jest skierowany wzdłuż normalnej do powierzchni przewodnika);

c) powierzchnia przewodnika jest ekwipotencjalna $\frac{dV}{dl} = 0$;

d) całkowity ładunek q znajdujący się wewnątrz przewodnika w polu elektrycznym wynosi: $q = 0$;

e) natężenie pola elektrycznego w sąsiedztwie powierzchni naładowanego przewodnika jest wprost proporcjonalne do gęstości powierzchniowej znajdujących się w nim ładunków: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$;

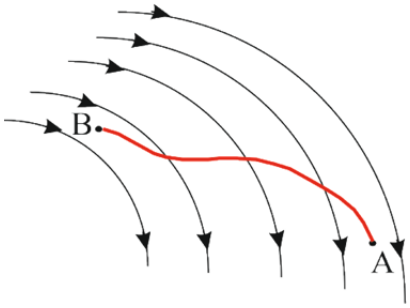
f) w pobliżu ostrza przewodnika powierzchnie ekwipotencjalne są najbardziej zakrzywione i zagęszczone, gęstość powierzchniowa ładunków w tym miejscu jest większa niż w innych częściach przewodnika, a więc pole elektryczne ($\vec{E} = -grad\ V$) jest największe;

g) duża wartość natężenia pola elektrycznego w pobliżu ostrza jest przyczyną występowania „wiatru elektrycznego”.

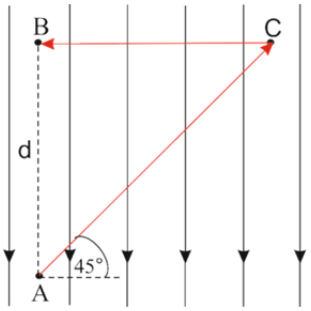
ZADANIA

Zadanie 41[7]. Wyznaczyć zależność różnicy potencjałów od natężenia pola elektrycznego dla dwóch punktów znajdujących się w jednorodnym polu elektrycznym, wytworzonym przez układ ładunków. Punkt A znajduje się w odległości d od punktu B. Prosta łącząca te punkty jest równoległa do linii pola elektrycznego.

Zadanie 42 [7]. Jaki jest związek między potencjałem elektrycznym a natężeniem pola elektrycznego, gdy pole jest niejednorodne i gdy ładunek próbny porusza się po zakrzywionej drodze? Obliczyć wartość $V_B - V_A$.



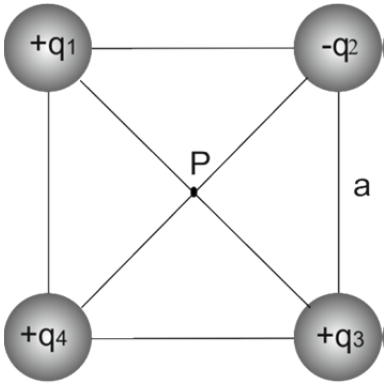
Zadanie 43 [7]. Ładunek punktowy q_0 porusza się ruchem jednostajnym z punktu A do punktu B wzdłuż drogi pokazanej na rysunku. Obliczyć różnicę potencjałów między punktami A i B.



Zadanie 44. Obliczyć potencjał elektryczny pochodzący od ładunku punktowego.

Zadanie 45. Obliczyć potencjał elektryczny dla układu ładunków punktowych.

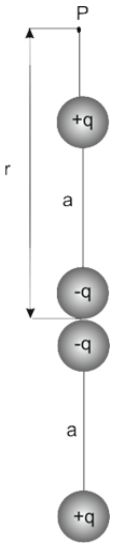
Zadanie 46 [7]. Ile wynosi potencjał elektryczny w środku kwadratu pokazanego na rysunku. Przyjąć, że $q_1 = +1{,}0 \cdot 10^{-8}$ C, $q_2 = -2{,}0 \cdot 10^{-8}$ C, $q_3 = +3{,}0 \cdot 10^{-8}$ C, $q_4 = +2{,}0 \cdot 10^{-8}$ C, $a = 1{,}0$ m.



Zadanie 47 [7]. Znaleźć potencjał elektryczny dla punktów znajdujących się na osi tarczy naładowanej równomiernie ze stałą wartością gęstości powierzchniowej σ.

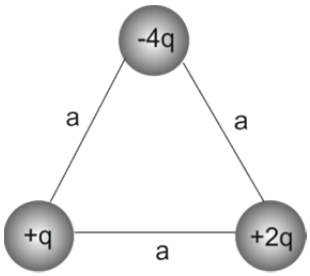
Zadanie 48 [7]. Wyprowadzić wyrażenie na potencjał elektryczny dla punktów przestrzeni oddalonych od dipola tak, że $r >> a$.

Zadanie 49 [7]. Kwadrupol elektryczny składa się z dwóch dipoli elektrycznych umieszczonych tak, że neutralizują one prawie całkowicie efekty elektryczne w oddalonych punktach. Obliczyć potencjał pola elektrycznego dla punktów znajdujących się na osi kwadrupola.

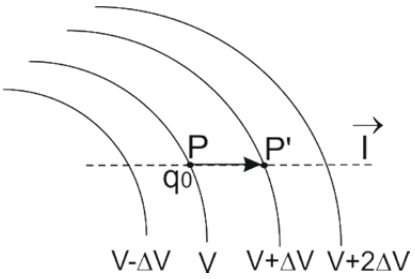


Zadanie 50 [7]. Obliczyć energię potencjalną dla układu ładunków q_1 i q_2, oddalonych od siebie o r podczas przesuwania ładunku q_2 z nieskończoności w stanie spoczynku do położenia początkowego.

Zadanie 51 [7]. Trzy ładunki zostały sztywno zamocowane przy pomocy sił zewnętrznych, tworząc układ przedstawiony na rysunku. Jaka jest ich wzajemna potencjalna energia elektryczna? $q = 1{,}0 \cdot 10^{-7}$ C, $a = 10$ cm.

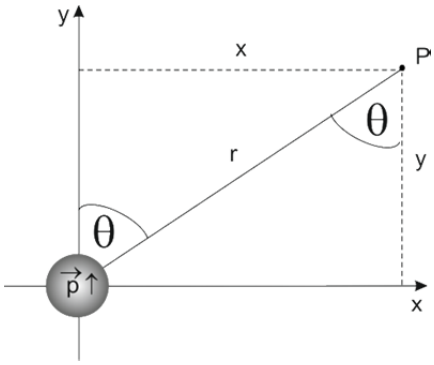


Zadanie 52 [7]. Wyznaczyć natężenie pola elektrycznego w punkcie *P*'. Ładunek próbny q_0 jest przesuwany z jednej powierzchni ekwipotencjalnej na drugą wzdłuż dowolnego kierunku *l*.



Zadanie 53 [7]. Obliczyć $E(r)$ dla ładunku punktowego q posługując się równaniem $E = -\left(\frac{dV}{dl}\right)_{max}$ i zakładając, że $V(r)$ dane jest jako $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$.

Zadanie 54 [7]. Obliczyć natężenie pola elektrycznego jako funkcję położenia punktu *P* dla dipola umieszczonego w początku układu współrzędnych *xy*. *V* jest dane równaniem $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$.



Zadanie 55. Obliczyć wartość potencjału na powierzchni kuli o promieniu r naładowanej ze stałą gęstością powierzchniową ładunku σ.

Zadanie 56 [8]. Obliczyć wartość i kierunek wektora indukcji elektrycznej na osi prostopadłej do dipola (symetralnej) w punkcie odległym od $d = 2a$ o $r = 10^{-1}$ m ($d = 10^{-3}$ m, $q = \pm 2 \cdot 10^{6}$ C).

Zadanie 57 [8]. Obliczyć wartość i kierunek wektora indukcji elektrycznej na symetrycznej osi przechodzącej przez centrum i leżącej w płaszczyźnie kwadrupola o rozmiarach $d = 2a = 10^{-3}$ m i ładunkach $q = \pm 2 \cdot 10^{6}$ C w punkcie odległym od centrum kwadrupola o $r = 1{,}5d$.

Zadanie 58 [7]. Obliczyć $E(r)$ (korzystając z zależności $E = -\left(\frac{dV}{dl}\right)_{max} = -grad\, V$) dla ładunku punktowego q zakładając, że $V(r)$ dane jest równaniem:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

Zadanie 59 [9]. Bardzo cienki pierścień o promieniu $r = 0{,}1$ m, naładowany dodatnio, leży w płaszczyźnie xz. Obliczyć natężenie pola elektrycznego i indukcję elektryczną w punkcie znajdującym się na osi pierścienia w odległości $d = 0{,}15$ m od jego środka. Ładunek pierścienia wynosi $q = 5 \cdot 10^{-9}$ C i jest równomiernie rozłożony wzdłuż jego obwodu.

Zadanie 60 [8]. Wykazać związek między potencjałem elektrycznym, a ładunkiem elektrycznym wytwarzającym ten potencjał.

Zadanie 61 [8]. W odległości $a = 10^{-1}$ m od nieskończenie rozległej płyty metalicznej znajduje się ładunek $q = 2 \cdot 10^{6}$ C. Znaleźć:

a) wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego wchodzącego w odległości a do tej płaszczyzny;
b) wartość potencjału pochodzącego od tego ładunku w dowolnym punkcie przestrzeni.

Zadanie 62. Wykazać, że dla każdej funkcji skalarnej $rot(\vec{E}) = 0$.

Zadanie 63. Wykazać, że $div(\vec{E}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Rozdział III Kondensatory i dielektryki

7. Pojemność elektryczna

Pojemnością elektryczną przewodnika nazywa się stosunek ładunku zgromadzonego na przewodniku do jego potencjału. Jest to wielkość stała dla danego przewodnika:

$$C=\frac{Q}{V}.$$

Jednostką pojemności w układzie SI jest **farad [F]**.

Farad jest to pojemność przewodnika, którego potencjał wynosi 1V, gdy zgromadzony jest na nim ładunek 1C.

$$1F=\frac{1C}{1V}.$$

Wzór *C=Q/V* nie ma sensu fizycznego. Pojemność przewodnika nie zależy ani od zgromadzonego na przewodniku ładunku ani od potencjału przewodnika. Zależy od rozmiarów przewodnika, obecności innych przewodników uziemionych i od rodzaju otaczającego przewodnik środowiska.

Pojemności kulek są tym większe, im większy jest promień kulki.

Im mniejsza jest odległość miedzy przewodnikiem a przewodnikiem uziemionym tym większa jest jego pojemność.

Napięcie między dwoma przeciwnie naładowanymi przewodnikami rośnie wraz z odległością tych przewodników.

8. Kondensatory

Dwa izolowane przewodniki o równych lecz różnoimiennych ładunkach tworzą **kondensator**.

Kondensator kulisty:

$$C=4\pi\varepsilon_0 R.$$

Kondensator płaski:

$$C=\varepsilon_0\frac{S}{d},$$

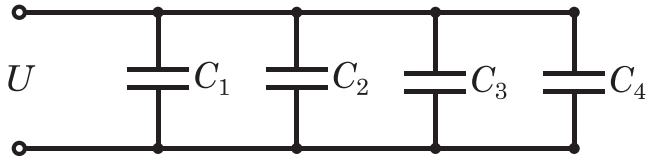
gdzie:
d – odległość między okładkami kondensatora;
S – pole powierzchni płytki.

Kondensator cylindryczny:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Łączenie kondensatorów:

a) **równoległe** łączenie



W równoległym łączeniu kondensatorów różnica potencjałów między okładkami każdego z kondensatorów jest taka sama U = const.

Natomiast ładunki zgromadzone na każdym z kondensatorów mogą być różne. Całkowity ładunek wprowadzony na baterię kondensatorów:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n.$$

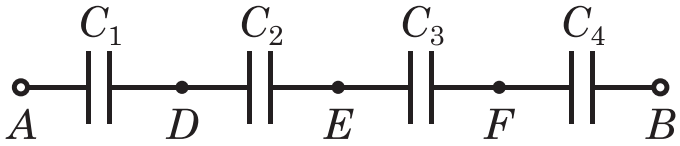
W związku z tym:

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n.$$

b) **szeregowe** łączenie

W przypadku połączenia szeregowego kondensatorów pojemność baterii równa jest stosunkowi ładunku zgromadzonego na pierwszej lub ostatniej okładce kondensatora do napięcia przyłożonego między końcami A i B.

$$Q = const.$$



Całkowity ładunek

$$Q = CU_{AB},$$

gdzie:

C – całkowita pojemność baterii.

$$U_{AB} = U_{AD} + U_{DE} + U_{EF} + U_{FB}$$

Otrzymujemy:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

Pojemność baterii kondensatorów połączonych szeregowo jest zawsze mniejsza od najmniejszej pojemności składowej.

9. Energia naładowanego kondensatora

Energią naładowanego kondensatora nazywamy pracę, jaką należałoby wykonać, aby przenieść ładunek zgromadzony na jednej z okładek kondensatora z tej okładki do ziemi.

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot U$$

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 V$$

Energia pola elektrycznego zawartego w objętości V jest proporcjonalna do tej objętości i do kwadratu natężenia pola między okładkami kondensatora.

10. Pole elektrostatyczne w dielektrykach

Zazwyczaj przestrzeń miedzy okładkami kondensatora wypełniona jest jakimś stałym izolatorem, czyli **dielektrykiem**. Dielektryk ma charakterystyczną dla siebie **przenikalność elektryczną $\boldsymbol{\varepsilon}$**:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}.$$

Jednostką ε jest $\frac{C^2}{Nm_2}$.

Stała dielektryczna $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ informuje nas o tym ile razy pojemność kondensatora z dielektrykiem jest większa od pojemności kondensatora próżniowego.

Pojemność kondensatora płaskiego wypełnionego dielektrykiem wyraża się wzorem:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}.$$

Pojemność kondensatora kulistego otoczonego dielektrykiem:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r R.$$

11.Polaryzacja dielektryków

Dielektryk nie zawiera ładunków swobodnych. Elektrony w atomach dielektryka są ściśle związane z atomami. Gdy umieścimy dielektryk w polu elektrycznych, siły pola wywołują pewne zmiany w rozmieszczeniu elektronów wewnątrz atomów, ograniczone do najbliższego sąsiedztwa jąder. Pole elektryczne powoduje przemieszczenie elektronów w jedną stronę atomu, wskutek czego każdy atom staje się małym dipolem elektrycznym. Osie tak wytworzonych dipoli ustawiają się równolegle do kierunku pola. Mówimy, że dielektryk jest spolaryzowany.

Obecność dielektryka miedzy okładkami kondensatora zmniejsza natężenie pola elektrycznego między okładkami, jeżeli kondensator jest odłączony od źródła.

Po wstawieniu dielektryka ilość ładunku na okładkach kondensatora nie ulega zmianie. Pole wzbudzone w dielektryku ma kierunek przeciwny do pola między okładkami kondensatora. Zatem natężenie pola między okładkami maleje.

$$E_{wypadkowe} = E_{zewnętrze} - E_{dielekrtyka}$$

Natężenie pola między okładkami kondensatora:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}.$$

Napięcie między okładkami kondensatora odłączonego od źródła po wstawieniu dielektryka między okładki maleje:

$$U = \frac{Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}.$$

Energia kondensatora, czyli praca jaką należy wykonać, aby przenieść ładunek zgromadzony na jednej z okładek, z tej okładki do ziemi, maleje:

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}.$$

Kondensator dołączony do źródła napięcia

Jeżeli kondensator jest dołączony do źródła napięcia, napięcie pozostaje stałe. Wstawienie dielektryka powoduje, że pojemność kondensatora rośnie. Ładunek rośnie ε_r razy.

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$$

$$Q = UC = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{SU}{d}$$

Energia kondensatora po wstawieniu dielektryka do kondensatora dołączonego do źródła rośnie. Praca jaką musimy wykonać, aby znieść ładunek z okładki do ziemi jest większa po wstawieniu dielektryka, ponieważ ładunek wzrasta ε_r.

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{SU^2}{d}$$

Kondensator dołączony do źródła napięcia

U=const

$$C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d}$$

$$Q = U \cdot C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{SU}{d}$$

$$E = \frac{U}{d}$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{SU^2}{d}$$

Kondensator odłączony od źródła napięcia

Q=const

$$C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d}$$

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}d = \frac{Qd}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

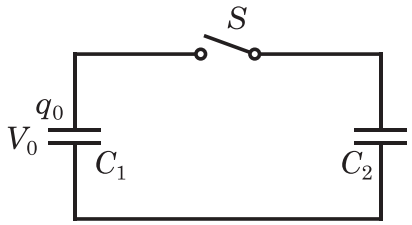
$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0\varepsilon S}$$

ZADANIA

Zadanie 64 [7]. Obliczyć pojemność kondensatora płaskiego posługując się prawem Gaussa.

Zadanie 65 [7]. Jaka jest pojemność kondensatora cylindrycznego? Zakładamy, że kondensator jest bardzo długi, tak że rozproszenie linii na końcach może być pominięte.

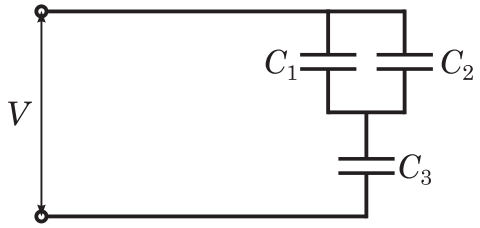
Zadanie 66 [7]. Kondensator C_1 ładujemy do różnicy potencjałów V_0. Następnie bateria ładująca zostaje odłączona, a kondensator połączony z nienaładowanym kondensatorem C_2. Jaka różnica potencjałów V ustali się w tym układzie? Jaka jest energia układu przed i po zamknięciu przełącznika S?

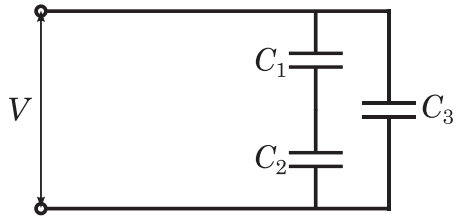


Zadanie 67 [7]. Kondensator płaski ma okładki o powierzchni A odległe od siebie o d. Bateria ładuje okładki do różnicy potencjałów V_0. Następnie baterię odłączmy i między okładki wprowadzamy płytkę dielektryczną o grubości d. Obliczyć energię zawartą w kondensatorze przed i po wprowadzeniu płytki.

Zadanie 68 [7]. Kondensator o pojemności 6 μF jest połączony szeregowo z kondensatorem o pojemności 4μF. Tworzy się między nimi różnica potencjałów 200 V. Jaki jest ładunek każdego kondensatora?

Zadanie 69 [7]. Znaleźć zastępczą pojemność dla połączenia (C_1 = 10 μF, C_2 = 5 μF, C_3 = 4 μF).





Zadanie 70 [7]. Płaski kondensator jest wypełniony dwoma dielektrykami. Wykazać, że jego pojemność dana jest wzorem:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2}\right).$$



Zadanie 71 [7]. Kondensator płaski jest wypełniony dwoma dielektrykami. Wykazać, że jego pojemność dana jest wzorem:

$$C = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}\right).$$



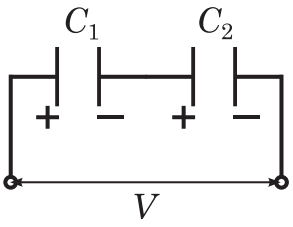
Zadanie 72 [7]. Dwie równoległe płytki o powierzchni 100 cm^2 mają równe lecz różnoimienne ładunki 8,9·10^{-7} C. Gdy przestrzeń między płytkami wypełnia materiał dielektryczny, natężenie pola elektrycznego wynosi 1,4·10^6 V/m. Znaleźć stałą dielektryczną tego materiału. Wyznaczyć wielkość ładunku indukowanego na każdej powierzchni dielektryka.

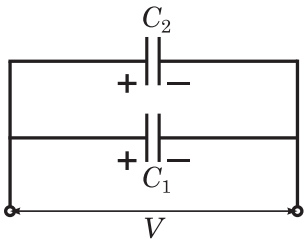
Zadanie 73 [7]. Kondensator o pojemności 100 pF naładowano do różnicy potencjałów 50 V i odłączono baterię. Następnie kondensator połączona równolegle z drugim kondensatorem początkowo nienaładowanym. Jaka jest pojemność drugiego kondensatora, jeżeli mierzona różnica potencjałów zmalała do 35 V.

Zadanie 74 [7]. Różnicę potencjałów 300 V przyłożono do połączonych szeregowo kondensatorów: 2 μF i 8 μF.

a) Jaki jest ładunek i różnica potencjałów na każdym z kondensatorów?
b) Naładowane kondensatory rozłączono i połączono ich dodatnie okładki oraz ujemnie razem, nie przykładając żadnego napięcia zewnętrznego. Jaki jest ładunek oraz różnica potencjałów na każdym z kondensatorów?

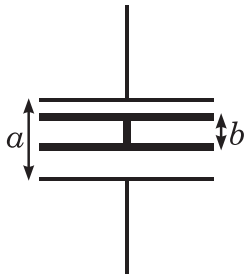
c) Naładowane kondensatory z punktu a) rozłączono i połączono ze sobą okładki o przeciwnych znakach. Jaki jest ładunek i różnica potencjałów na każdym z kondensatorów?





Zadanie 75 [7]. Jednostką ε_0 w układzie SI jest F/m. Pokazać, że jednostka ta jest równoważna $C^2/N \cdot m^2$.

Zadanie 76 [7]. Dwa kondensatory połączono szeregowo. Sztywna część środkowa o długości b może być przemieszczona w kierunku pionowym. Wykazać, że równoważna pojemność połączenia szeregowego nie zależy od położenia części środkowej i jest dana przez: $C = \frac{\varepsilon_0 A}{a-b}$.

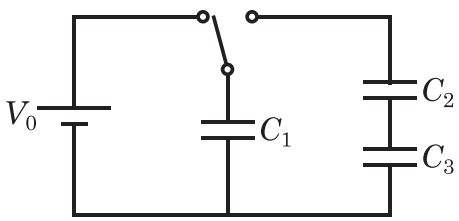


Zadanie 77 [7]. Kondensator o pojemności 6,0 μF jest połączony szeregowo z kondensatorem o pojemności 4,0 μF. Do układu przyłożono różnicę potencjałów 200 V. Jaki jest ładunek każdego kondensatora. Jaka jest różnica potencjałów na każdym kondensatorze?

Zadanie 78 [7]. Rozwiązać poprzednie zadanie dla połączenia równoległego.

Zadanie 79 [7]. Ile kondensatorów o pojemności 1 μF należałoby połączyć równolegle, aby zmagazynować ładunek 1 C na kondensatorach przy napięciu 300 V.

Zadanie 80 [7]. Gdy przełącznik S jest przerzucony na lewo, okładki kondensatora C_1 zyskują różnicę potencjałów V_0. Kondensatory C_2 i C_3 są początkowo nienaładowane. Przełącznik przerzucamy na prawo. Jakie będą ostatecznie ładunki q_1, q_2, q_3 na odpowiadających im kondensatorach?

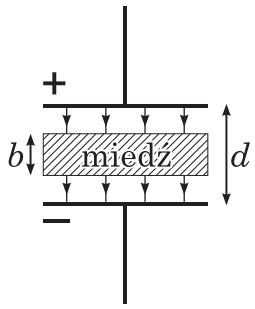


Zadanie 81 [7]. Pewna substancja ma stała dielektryczną 2,8 i wytrzymałość na przebicie $18 \cdot 10^6$ V/m. Jaką minimalną powierzchnię muszą mieć okładki kondensatora płaskiego, w którym jako dielektryka użyto tej substancji, aby pojemność była równa $7 \cdot 10^{-2}$ μF i aby kondensator wytrzymywał bez przebicia różnicę potencjałów 4000 V ?

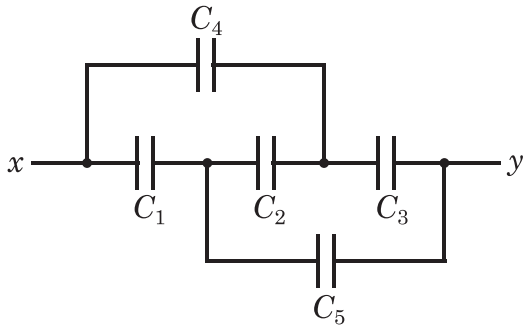
Zadanie 82 [7]. Płytkę dielektryczną o grubości b umieszczono między okładkami płaskiego kondensatora odległymi o d. Wykazać, że pojemność kondensatora wynosi:

$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{\varepsilon_r d - b(\varepsilon_r - 1)}.$$

Zadanie 83 [7]. Płytka miedziana o grubości b jest umieszczona dokładnie w połowie odległości między okładkami płaskiego kondensatora. Jaka jest pojemność przed i po umieszczeniu płytki?



Zadanie 84 [7]. Znaleźć zastępczą pojemność między punktami x i y. Założyć, że $C_2 = 10\ \mu$F, a wszystkie pozostałe pojemności są równe 4 μF.



Rozdział IV Prąd elektryczny i obwody z prądem

12.Prąd elektryczny stały

Ruch ładunków elektrycznych w przewodniku dzięki różnicy potencjałów nazywamy **prądem elektrycznym**. Prąd elektryczny może płynąć w gazach, cieczach i ciałach stałych. Elektrony płyną od potencjału niższego do potencjału wyższego.

Kierunek prądu elektrycznego określamy jako kierunek ruchu ładunków elektrycznych dodatnich.

$$+ \longrightarrow -$$

Warunkiem przepływu prądu elektrycznego w ciele jest istnienie wewnątrz pola elektrycznego i obecność w nim naładowanych cząstek, które mogą się swobodnie przemieszczać w granicach całego ciała. Cząstki te nazywamy nośnikami prądu.

Natężenie prądu stałego jest to stosunek ilości ładunku przeniesionego w pewnym czasie przez poprzeczny przekrój przewodnika do tego czasu:

$$I = \frac{Q}{t}$$

Jednostką natężenia jest Amper [A].

Przez każdy dowolny przekrój obwodu elektrycznego zamkniętego płynie prąd o tym samym natężeniu.

Gęstość prądu: wielkość wektorowa, której kierunek jest kierunkiem przepływu prądu a wartość jest równa stosunkowi natężenia prądu przepływającego przez nieskończenie małą powierzchnię prostopadłą do kierunku przepływu prądu.

$$|\vec{j}| = \frac{dI}{dS_{\perp}}$$

W związku z tym:

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

W przypadku gdy *j* = *const*, natężenie prądu wyraża się wzorem:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{nqSvdt}{dt} = \int_S nq\vec{v}d\vec{S},$$

gdzie $\vec{v}$ jest wektorem prędkości uporządkowanego ruchu nośników prądu.

Równanie ciągłości prądu:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dQ_V}{dt}.$$

Z zasady zachowania ładunku wewnątrz powierzchni *S* wynika, że ładunek *dQ*, który wypłynął z wnętrza tej powierzchni musi być zrównoważony ładunkiem $dQ_V = -dQ$ wytworzonym wewnątrz tej powierzchni.

Równanie ciągłości dla prądu stałego:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0$$

Równanie ciągłości w postaci różniczkowej:

$$div\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Prawo Ohma

Natężenie prądu płynącego przez przewodnik jest wprost proporcjonalne do napięcia przyłożonego do końców przewodnika a odwrotnie proporcjonalne do oporu R przewodnika:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Opór przewodnika mierzymy w omach [Ω].

Prawo Ohma zapisane: $R = \frac{U}{I}$ nie ma sensu fizycznego. Opór nie zależy ani od napięcia przyłożonego do końców przewodnika ani od natężenia prądu płynącego przez przewodnik.

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

$$R = R_0(1 + \alpha \Delta t)$$

ρ – opór właściwy przewodnika
l – długość przewodnika
S – pole przekroju poprzecznego przewodnika
R_0 – opór przewodnika w 0°C
α – współczynnik temperaturowy oporu. Wyraża względny przyrost oporu przypadający na jednostkowy przyrost temperatury.

Metal	Opór właściwy (20°C) ρ [10^{-8} Ω·m]	Temperaturowy współczynnik oporu właściwego α [1/°C × 10^{-5}]
srebro	1,6	380,0
miedź	1,7	390,0
glin	2,8	390,0
wolfram	5,6	450,0
nikiel	6,8	600,0
żelazo	10,0	500,0
stal	18,0	300,0
mangan	44,0	1,0

Prawa Kirchhoffa

Bardzo często spotykamy się ze skomplikowanymi układami przewodników i źródeł prądu, które tworzą sieć elektryczną. W sieci wyróżniamy węzły i oczka. **Węzłem** nazywamy punkt, w którym spotykają się co najmniej trzy przewody. **Oczkiem** nazywamy część sieci stanowiącą pojedynczy obwód zamknięty.

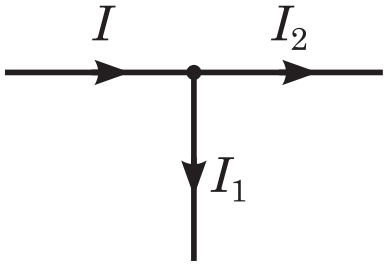
Pierwsze prawo Kirchhoffa

Suma natężeń prądów wchodzących do węzła sieci jest równa sumie natężeń prądów wychodzących z węzła sieci.

$$\sum_{i=1}^{n1} I_i = \sum_{k=1}^{n2} I_k$$

W postaci różniczkowej:

$$div\vec{j} = 0.$$

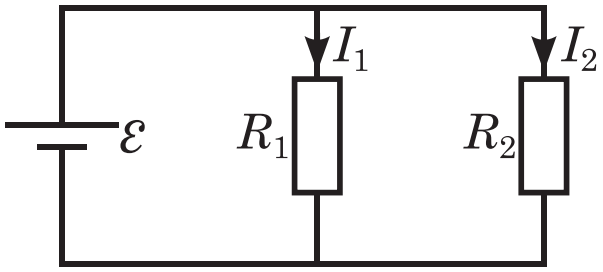


$I=I_1+I_2$

Drugie prawo Kirchhoffa

Stosunek natężeń prądów płynących przez poszczególne rozgałęzienia sieci jest równy odwrotnemu stosunkowi oporów tych gałęzi.

$$I_1 : I_2 = R_2 : R_1$$



Dotyczy oczek sieci:

W dowolnym obwodzie zamkniętym suma spadków napięć równa się sumie algebraicznej działających w nim sił elektromotorycznych:

$$\sum_{i=1}^{n1} U_i = \sum_{k=1}^{n2} \varepsilon_k$$

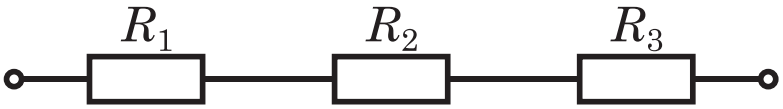
Przy rozwiązywaniu zadań należy:

1. Wybrać i zaznaczyć kierunki prądów we wszystkich odcinkach sieci.
2. Określić liczbę węzłów w sieci (m) i napisać I prawo Kirchhoffa dla każdego z $m-1$ węzłów.
3. Wydzielić obwody zamknięte w sieci, przyjąć umownie kierunek ich obiegu i zapisać dla nich II prawo Kirchhoffa. Dla sieci złożonej z m węzłów i n gałęzi liczba niezależnych równań dla II prawa Kirchhoffa wynosi $n-m+1$.

Łączenie oporów

Opór zastępczy jest to taki opór, który włączony do obwodu zamiast układu oporów nie zmienia napięcia panującego na jego końcach, ani natężenia płynącego przezeń prądu.

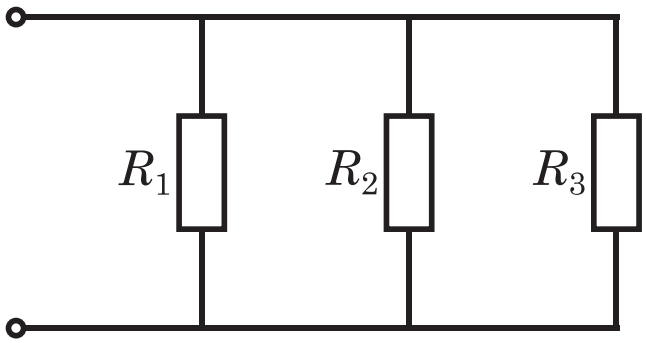
Łączenie **szeregowe** oporów:



$$R_{zastępczy} = R_1 + R_2 + R_3$$

Opór zastępczy układu oporów połączonych szeregowo równy jest sumie oporów składowych.

Połączenie **równolegle** oporów:



$$\frac{1}{R_{zastępczy}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Odwrotność oporu zastępczego dla układu oporów połączonych równolegle jest równa sumie odwrotności oporów składowych.
Równoległe dołączenie opornika powoduje zawsze zmniejszenie oporu całkowitego.
Układ potencjometryczny służy do otrzymywania żądanego napięcia.

Praca i moc prądu elektrycznego.

$$W = U \cdot I \cdot t$$
$$Q = I^2 R \cdot t$$

Prąd elektryczny przepływając przez przewody powoduje wydzielanie się ciepła. Ciepło wydzielające się w przewodniku jest proporcjonalne do drugiej potęgi natężenia prądu, do wartości oporu *R* i do czasu. Prawo wyrażone tym wzorem nosi nazwę **prawa Joule'a-Lentza.**

Moc prądu:

$$P = I^2 R$$

Prawo Ohma w postaci różniczkowej:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \sigma\vec{E},$$

gdzie:
ρ – opór właściwy przewodnika;
σ – elektryczne przewodnictwo właściwe przewodnika.

Przewodnictwo właściwe:

$$\sigma = q \cdot n \cdot \mu,$$

gdzie:

q – ładunek jednego nośnika,

$n = N/V$ – koncentracja nośników prądu,

$\mu = v/E$ – ruchliwość nośnika prądu.

Siła elektromotoryczna (SEM)

Aby podtrzymywać przepływ prądu przez dłuższy czas należy z końca przewodnika o niższym potencjale w sposób ciągły odprowadzać ładunki dodatnie i doprowadzać je do końca o wyższym potencjale, Do tego potrzebne są siły zewnętrzne uwarunkowane np.: procesami chemicznymi czy polami elektrycznymi (prądnica). Pracę tych sił zewnętrznych wykonywaną nad jednostkowym ładunkiem dodatnim określa się jako **siłę elektromotoryczną**:

$$\varepsilon = \frac{W}{q} = \int_1^2 \vec{E}_z d\vec{l},$$

gdzie:

$\vec{E}_z$ – wektor natężenia pola sił zewnętrznych $\vec{E}_z = \frac{\vec{F}_z}{q}$.

Prąd może płynąć przez przewodnik tylko wtedy, gdy istnieją czynniki zewnętrzne podtrzymujące przepływ ładunków (wyjątek – nadprzewodniki).

Ogniwa

Ogniwa nazywamy źródłami napięcia, które powoduje ruch nośników prądu istniejących w przewodniku.

Siła elektromotoryczna ogniwa jest to ilość energii zamieniona w ogniwie z formy chemicznej na elektryczną, przypadającą na jednostkę ładunku przepływającego przez obwód.

$$SEM = \frac{W}{Q}.$$

Łączenie ogniw

Ogniwa łączymy w baterie ogniw.

Łączenie **szeregowe**:

$$I = \frac{n\varepsilon}{nR_w + R_z},$$

gdzie:
R_w – opór wewnętrzny pojedynczego ogniwa,
R_z – opór zewnętrzny na obwodzie.

Wypadkowa siła elektromotoryczna SEM baterii jest równa sumie sił elektromotorycznych poszczególnych ogniw:

$$\varepsilon_{wyp} = n \cdot \varepsilon$$

oraz

$$R_{w\,wyp} = n \cdot R_w.$$

Łączenie **równoległe**:

$$R_{w\,wyp} = \frac{R_w}{n}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{\frac{R_w}{n} + R_z}$$

Jeżeli przy pomocy n ogniw chcemy z baterii czerpać prąd na razy większy niż z jednego ogniwa to gdy:

1. opór wewnętrzny baterii jest bardzo mały w porównaniu z oporem zewnętrznym stosujemy szeregowe połączenie ogniw;
2. opór wewnętrzny baterii jest dużo większy w porównaniu z oporem zewnętrznym stosujemy równoległe połączenie ogniw.

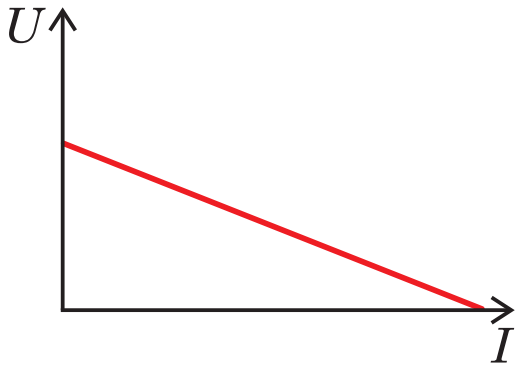
Prawo Ohma dla obwodu zamkniętego.

Napięcie panujące na biegunach ogniwa otwartego spada, gdy ogniwo włączymy w obwód zamknięty. Siła elektromotoryczna ogniwa jest równa sumie napięć na oporach zewnętrznym i wewnętrznym.

$$\varepsilon = IR_z + IR_w$$

$$U = \varepsilon - IR_w$$

Napięcie na biegunach ogniwa zamkniętego jest równe sile SEM pomniejszonej o spadek potencjału na oporze wewnętrznym.



Bilans energii w obwodzie zamkniętym prądu stałego.

Całkowita moc wydzielana w obwodzie:

$$P_c = \frac{\varepsilon^2}{R_z + R_w}.$$

Moc wydzielająca się na zewnętrznej części obwodu tzw. moc użyteczna:

$$P_u = I^2 R_z = \frac{\varepsilon^2}{(R_z + R_w)^2} \cdot R_z.$$

Moc wydzielająca się na źródle:

$$P_w = I^2 R_w = \frac{\varepsilon^2 R_w}{(R_w + R_z)^2}.$$

Moc całkowita jest sumą obu mocy. Gdy $R_w = R_z$ moc wydzielana na oporze zewnętrznym P_u jest równa mocy wydzielonej w źródle P_w.

13. Termoelektryczność

Układ złożony z dwóch różnych spojonych ze sobą przewodników może stać się, na skutek wytworzenia pomiędzy spojeniami różnicy temperatur, źródłem prądu.
Zjawisko to nazywamy **zjawiskiem termoelektrycznym**, a spojone przewodniki termoogniwem lub termoelementem. Termoelement przetwarza ciepło dostarczone jednemu ze spojeń na energię prądu elektrycznego.

14. Elektrochemia

Elektrolitem nazywa się ciecz, która przewodzi prąd elektryczny. To przede wszystkim roztwory soli, zasad i kwasów. Elektrolizą nazywamy rozkład elektrolitu pod wpływem przepływającego prądu stałego.

Dysocjacja elektrolityczna jest to rozpad elektrolitu na jony pod wpływem cząsteczek wody. Jony dodatnie podczas elektrolizy dążą do ujemnej katody i nazywamy je kationami. Jony ujemne dążą do dodatniej anody i nazywamy je anionami.
Przewodnictwo elektrolitów rośnie wraz ze wzrostem temperatury.

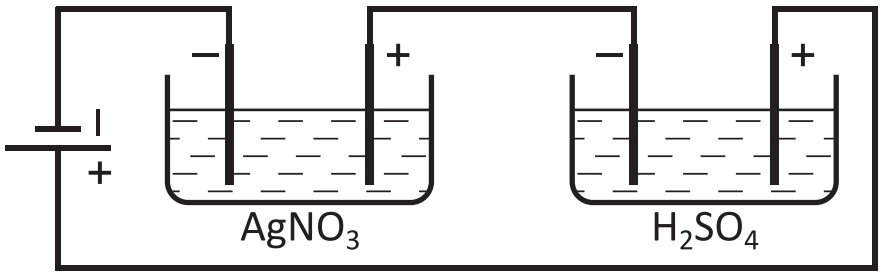
Pierwsze prawo elektrolizy
Masa jonów wydzielonych na elektrodzie podczas elektrolizy jest wprost proporcjonalna do natężenia prądu i czasu trwania jego przepływu czyli do ładunku przeniesionego w tym czasie przez elektrolit:

$$M = k \cdot I \cdot t = k \cdot Q,$$

gdzie *k* nosi nazwę elektrochemicznego równoważnika danej substancji i jest liczbowo równy masie jonów wydzielonych na elektrodzie przy przepływie przez elektrolit jednostkowego ładunku:

$$k = \frac{M}{Q}\,[\frac{mg}{C}].$$

Drugie prawo elektrolizy



Masy różnych jonów przeniesionych podczas elektrolizy przez ten sam ładunek są proporcjonalne do gramorównoważników chemicznych wydzielonych substancji.

$$M_1 : M_2 = R_1 : R_2$$

Korzystając z pierwszego prawa elektrolizy otrzymujemy:

$$k_1 : k_2 = R_1 : R_2$$

Elektrochemiczne równoważniki różnych substancji są wprost proporcjonalne do ich gramorównoważników chemicznych. Stosunek R/k jest dla wszystkich substancji taki sam. Nazywamy go **stałą Faradaya** i oznaczamy F.

Wiedząc, że $R = \frac{M}{w}$, gdzie M to masa molowa, a w – wartościowość otrzymujemy:

$$M = \frac{1}{F}\frac{M}{w}Q.$$

Stała Faradaya jest to ładunek, który przepływając przez elektrolit wydziela jeden gramorównoważnik chemiczny dowolnej substancji (F = 96500 C).

Stałą Faradaya można wyrazić w postaci $F = N_A \cdot e$.

Przewodnictwo właściwe elektrolitów:

$$\sigma = q_+ n_+ (\mu_+ + \mu_-) = Z_+ e \alpha n (\mu_+ + \mu_-),$$

$$\mu_+ = \frac{V_+}{E}.$$

gdzie:
q_+ – ładunek kationu;
n_+ – liczba kationów w jednostce objętości elektrolitu;
μ – ruchliwość kationu;
Z_+ – wartościowość kationu;
α – stała dysocjacji;
n – liczba cząsteczek substancji w jednostce objętości roztworu.

15. Mikroskopowa teoria przewodnictwa

Prędkość unoszenia elektronów

Pole elektryczne w metalu powoduje, że elektrony oprócz prędkości ruchu termicznego uzyskują dodatkową prędkość w kierunku przeciwnym do kierunku natężenia pola elektrycznego. Prędkość unoszenia elektronów jest to średnia prędkość uzyskiwana przez elektrony pod wpływem pola elektrycznego:

$$v_u = \frac{eE\lambda}{2m_e\overline{v}},$$

gdzie:
λ – średnia droga swobodna,
$\overline{v}$ – średnia prędkość związana z ruchem termicznym elektronów w temperaturze T:

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}}.$$

Prawo Ohma:

$$j = env_u = \frac{e^2 n\lambda}{2m_e\overline{v}}E.$$

Prawo Joule'a-Lenza:

Strata energii wszystkich elektronów w przewodniku w pewnym czasie jest to energia oddana sieci krystalicznej tzw. **ciepło Joule'a-Lenza**:

$$\Delta E = \frac{Nte^2E^2}{2m_e\overline{v}}.$$

Prawo Wiedemana-Franza:

Stosunek przewodnictwa cieplnego gazu elektronów do jego przewodnictwa elektrycznego jest proporcjonalny do temperatury w skali bezwzględnej:

$$\frac{\chi}{\sigma} = \frac{8}{\pi}\left(\frac{k}{e}\right)^2 T.$$

ZADANIA

Zadanie 85 [7]. Prąd o natężeniu 5 A płynie w przewodniku o oporze 10 Ω przez 4 min. Ile kulombów oraz ile elektronów przechodzi w tym czasie przez poprzeczny przekrój przewodnika.

Zadanie 86 [7]. Jeżeli do dwóch elektrod w rurze do wyładowań jest przyłożona dostatecznie duża różnica potencjałów, w gazie ustala się przepływ prądu. Gaz jonizuje się, elektrony poruszają się w kierunku dodatniej, a jony w kierunku ujemnej elektrody. Jaka jest wielkość i kierunek prądu w rurze do wyładowań napełnionej wodorem, w której przez poprzeczny przekrój przechodzi w ciągu sekundy $3{,}1\cdot10^{18}$ elektronów i $1{,}1\cdot10^{18}$ protonów?

Zadanie 87 [7]. Równomierna wiązka cząstek α ($q = +2e$, $m = 6{,}65\cdot10^{-27}$ kg) o stałej energii kinetycznej 20 MeV przenosi prąd o natężeniu $0{,}25\cdot10^{-6}$A.

a) Jeżeli wiązka zostanie skierowana prostopadle do płaskiej powierzchni, to ile cząstek α zderzy się z tą powierzchnią w ciągu 3 sek?
b) W dowolnej chwili, ile cząstek α znajduje się w danym odcinku wiązki o długości 20 cm? Jaka różnica potencjałów może przyspieszyć każdą cząstkę α do zera nadając jej energię 20 MeV?

Zadanie 88 [7]. Mamy $2\cdot10^8$ podwójnie naładowanych dodatnich jonów na cm^3, poruszających się na północ z prędkością $1\cdot10^7$ cm/s.

a) Jaka jest gęstość prądu $\vec{j}$, jego wartość i kierunek?
b) Czy można obliczyć całkowite natężenie w tej wiązce jonów? Jeśli nie to dlaczego?

Zadanie 89 [7]. Mały, lecz mierzalny prąd o natężeniu 10^{-10} A płynie w przewodniku miedzianym o średnicy 2,54 mm (gęstość miedzi wynosi 9 g/cm^3, $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ atomów/mol). Obliczyć prędkość unoszenia elektronów.

Zadanie 90 [7]. Pas generatora elektrostatycznego ma szerokość 50 cm i porusza się z prędkością 30 m/s. Pas przenosi ładunek do wnętrza kuli z szybkością odpowiadającą 10^{-4} A. Obliczyć powierzchniową gęstość ładunku na pasie.

Zadanie 91 [7]. Dana jest przewodząca kula o promieniu 10 cm. Jeden przewód wprowadza do niej prąd o natężeniu 1,0000020 A, a inny przewód odprowadza prąd o natężeniu 1,0000000 A. Ile czasu potrzeba, aby potencjał kuli wzrósł o 1000 V?

Zadanie 92 [7]. Stalowe przewody elektrycznego wagonu mają powierzchnię przekroju poprzecznego 45,81 cm^2. Jaki jest opór 16 km pojedynczego przewodu? Opór właściwy stali wynosi $6{,}0 \cdot 10^{-7}$ Ω·m.

Zadanie 93 [7]. Kwadratowy pręt aluminiowy ma długość 1 m i krawędź 5 mm.

a) Jaki jest opór między jego końcami?
b) Jaką średnicę musiałby mieć kołowy pręt miedziany o długości 1 m, aby miał taki sam opór?

Zadanie 94 [7]. Do drutów miedzianego i żelaznego o tej samej długości przykłada się tę samą różnicę potencjałów.

a) Jaki musi być stosunek ich promieni, aby natężenia prądu było to samo?
b) Czy przez odpowiedni dobór promieni można zrównać gęstości?

Zadanie 95 [7]. Drut o oporze 6 Ω został rozciągnięty tak, że jego nowa długość jest trzy razy większa od początkowej. Znaleźć opór dłuższego drutu zakładając, że opór właściwy i gęstość materiału nie zmieniły się podczas rozciągania.

Zadanie 96 [7]. Drut z chromonikieliny (niklowo-aluminiowy stop często używany w elementach grzejnych) o długości 1 m i o powierzchni przekroju poprzecznego 1 mm^2 przenosi prąd o natężeniu 4 A, jeżeli na jego końcach przyłożona jest różnica potencjałów 2 V. Jakie jest przewodnictwo właściwe chromonikieliny?

Zadanie 97 [7]. Pręt z pewnego metalu ma długość 1m i średnicę 0,55 cm. Opór między jego końcami (20°C) wynosi $2{,}87 \cdot 10^{-3}$ Ω·m. Z tego samego metalu utworzono okrągły dysk o średnicy 2 cm i grubości 1 mm.

a) Jaki jest opór między przeciwległymi ekwipotencjalnymi powierzchniami kołowymi dysku?
b) Jaki to metal?

Zadanie 98 [7]. Dwa przewodniki wykonane są z tego samego materiału i mają tą samą długość. Przewodnik A jest drutem o średnicy 2 mm i wewnętrznej średnicy 1 mm. Jaki jest stosunek oporów R_A/R_B mierzonych między ich końcami?

Zadanie 99 [7]. Druty miedziany i żelazny o równej długości l i średnicy d połączono ze sobą i do końców tak złączonego drutu przyłożono różnicę potencjałów V. Obliczyć

a) różnicę potencjałów w każdym drucie (przyjąć, że l = 10 m, d = 2 mm, V = 100 V);
b) obliczyć gęstość prądu w każdym drucie;
c) pole elektryczne w każdym drucie.

Zadanie 100 [7]. Opór drutu żelaznego, jest 5,9 razy większy od oporu drutu miedzianego o tych samych wymiarach. Jak musi być średnica drutu żelaznego, jeżeli ma on mieć taki sam opór jak drut miedziany o średnicy 0,12 cm, przy czym oba druty mają taką samą długość?

Zadanie 101 [7]. Okrągłe, cylindryczne pręty aluminiowy i miedziany mają taką samą długość i powinny mieć taki sam opór. Opór właściwy miedzi jest 0,61 razy większy od oporu właściwego aluminium, ale jego gęstość jest 3,3 razy większa od aluminium. Jaki jest stosunek masy pręta aluminiowego do masy pręta miedzianego?

Zadanie 102 [7]. Podczas przepływu prądu o natężeniu 3A w oporniku wydziela się energia cieplna z szybkością 100 W. Jaki jest jego opór w Ω?

Zadanie 103 [7]. Lampa rentgenowska pobiera prąd o natężeniu 7 mA i pracuje przy różnicy potencjałów 80 kV. Ile mocy w watach ulega rozproszeniu?

Zadanie 104 [7]. Do miedzianego drutu o długości 30,48m i średnicy 1 mm przyłożono różnicę potencjałów 1V. Obliczyć:

a) natężenie prądu;
b) gęstość prądu;
c) natężenie pola elektrycznego;
d) szybkość wytwarzania w drucie energii cieplnej.

Zadanie 105 [7]. Ze względów bezpieczeństwa maksymalne natężenie prądu w drucie miedzianym o średnicy 2,54 mm izolowanym za pomocą gumy zostało ustalone na 25 A. Przy tym natężeniu prądu znaleźć:

a) gęstość prądu;
b) natężenie pola elektrycznego;
c) różnicę potencjałów na odcinku 300 m drutu;
d) moc z jaką jest wytwarzana energia cieplna na odcinku 300m drutu.

Zadanie 106 [7]. 500 W grzejnik ma pracować w sieci o napięciu 115V.

a) O ile procent zmniejszy się ilość wydzielonego ciepła, jeśli napięcie w sieci spadnie do 110 V? Założyć, że opór nie zmienia się?
b) Czy jeżeli uwzględnimy zależność oporu od temperatury, zmiana wydzielanego ciepła będzie większa, czy mniejsza od wyliczonej w punkcie a)?

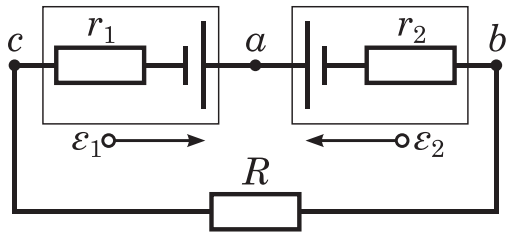
Zadanie 107 [7]. Liniowy akcelerator elektronowy wytwarza wiązkę elektronów. Natężenie impulsu równe jest 0,5 A, a czas jego trwania 0,1 μs.

a) Ile elektronów zostaje przyspieszonych w czasie jednego impulsu?
b) Jakie jest średnio natężenie prądu dla urządzenia pracującego przy 500 impulsach na sekundę?
c) Jeżeli przyspieszone elektrony uzyskują energię 50 MeV, to ile wynoszą moce wyjściowe z akceleratora: przeciętna i szczytowa?

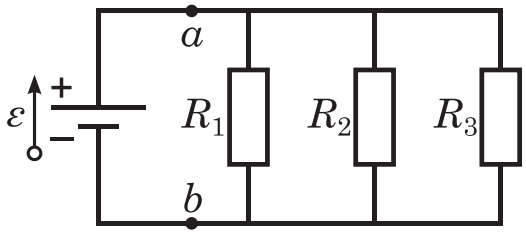
Zadanie 108 [7]. W jakiej temperaturze opór przewodnika miedzianego będzie dwa razy większy od oporu w temperaturze 0°C. Czy dla wszystkich przewodników miedzianych, bez względu na ich kształt i wielkość temperatura będzie taka sama?

Zadanie 109 [7]. Miedziane uzwojenia silnika mają w temperaturze 20°C, kiedy silnik jest wyłączony, opór 58 Ω. Jaka jest temperatura uzwojeń?

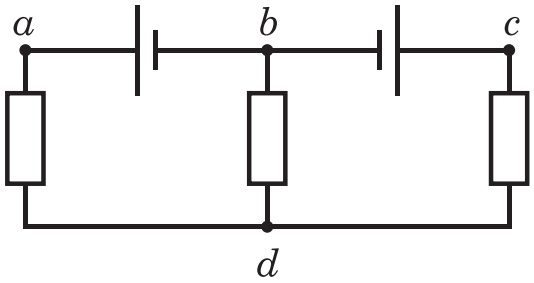
Zadanie 110 [7]. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ wynoszą odpowiednio 2,0 V i 4,0 V, niech opory r_1 i r_2 i R będą odpowiednio równe 1 Ω, 2 Ω i 5 Ω. Ile wynosi natężenie prądu? Jaka jest różnica potencjałów:
a) pomiędzy punktami b i a;
b) pomiędzy punktami a i c?



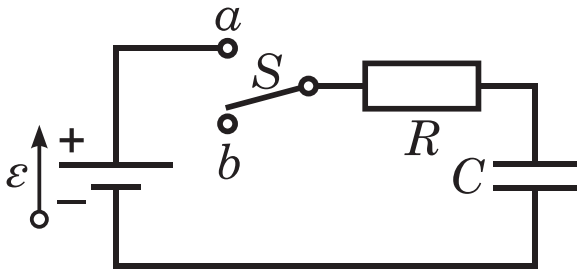
Zad 111 [7]. Jaki jest opór zastępczy połączenia?



Zadanie 112 [7]. W obwodzie tym są dwa węzły (b i d) i trzy gałęzie (bad, bcd, bd) Jakie są natężenia prądów w tych gałęziach, gdy siły elektromotoryczne są znane.



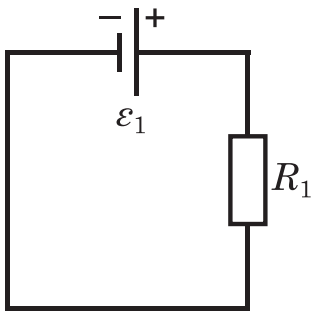
Zadanie 113 [7]. Jaki prąd ustali się w tak utworzonym obwodzie składającym się z jednego oczka, dla przełącznika ustawionego w pozycji a.

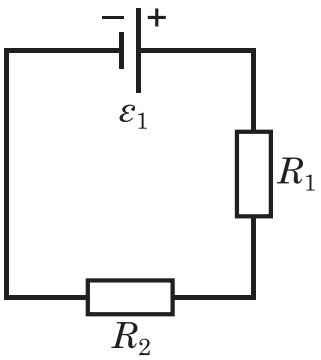


Zadanie 114 [7]. W obwodzie zewnętrznym płynie prąd o natężeniu 5 A pod napięciem 6 V wytwarzany przez baterię akumulatorów. O ile zmniejszy się energia chemiczna baterii po upływie 6 min?

Zadanie 115 [7]. Pewien akumulator samochodowy (12 V) gromadzi ładunek początkowy Q (120 A·h). Przyjmując, że napięcie między zaciskami pozostaje stałe, dopóki akumulator nie zostanie całkowicie rozładowany, przez ile czasu będzie on dostarczał moc *P* (100W)?

Zadanie 116 [7]. Natężenie prądu w obwodzie złożonym z oporu i źródła prądu wynosi 5 A. Kiedy wprowadzono dodatkowy opór równy 2 Ω, natężenie prądu spadło do 4 A. Jaki był opór w obwodzie pierwotnym?



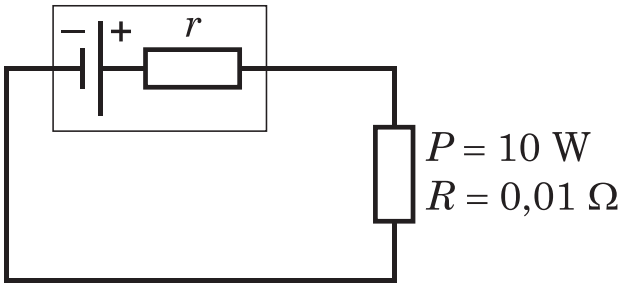


Zadanie 117 [7]. Bateria o SEM ε = 2 V i oporze wewnętrznym r = 1 Ω napędza silnik. Silnik podnosi ciężar W (2 N) ze stałą prędkością v = 0,5 m/s. Przyjmując, że nie ma strat mocy znaleźć:

a) natężenie prądu I w obwodzie;
b) różnicę potencjałów V między zaciskami silnika.

Zadanie 118 [7]. Na oporze o wartości 0,1 Ω jest wytworzona energia cieplna o mocy 10 W. Opór jest połączony z baterią której SEM wynosi 1,5 V.

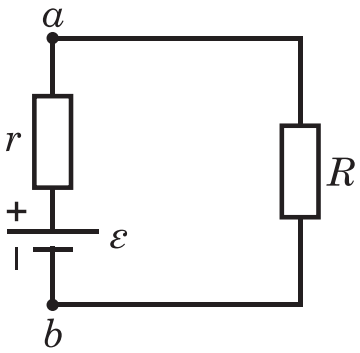
a) Jaki jest opór wewnętrzny baterii?
b) Jaka jest różnica potencjałów na oporze?



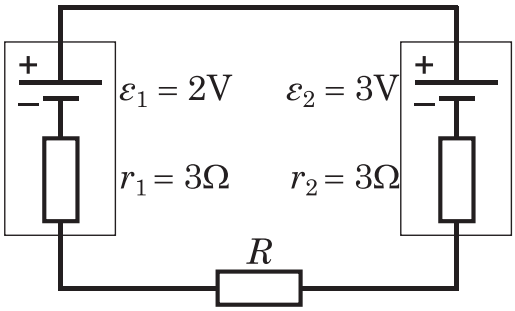
Zadanie 119 [7]. Przewodnik o oporze 5 Ω połączona z baterią SEM wynoszącej 2 V i oporze wewnętrznym 1 Ω.

a) Ile energii chemicznej przekształci się w energię elektryczną?
b) Ile energii pojawi się w tym przewodniku jako energia cieplna w czasie 2 minut?
c) Obliczyć różnicę między energią elektryczną a cieplną.

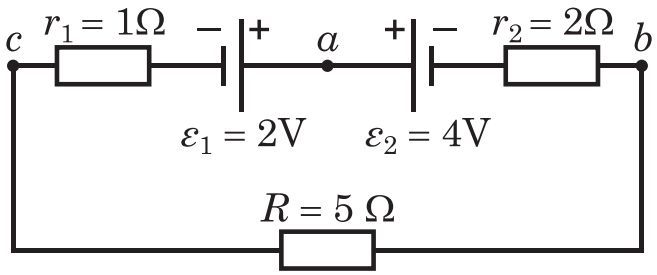
Zadanie 120 [7]. Pokazać, że moc dla obwodu związana z energią cieplną wydzielaną na oporze R osiąga wartość maksymalną, gdy R jest równe oporowi wewnętrznemu baterii r. Pokazać, że ta maksymalna moc wynosi $P = \varepsilon^2/4r$.



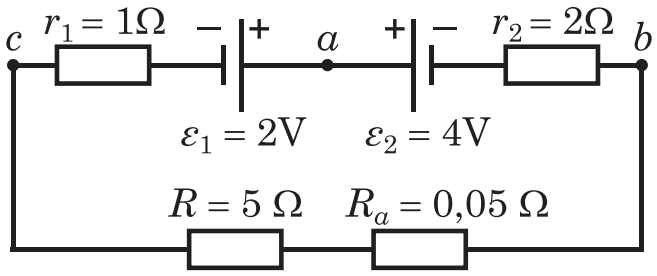
Zadanie 121 [7]. Jaką wartość musi mieć R, jeżeli natężenie prądu w obwodzie wynosi 0,001 A? Przyjąć, że $\varepsilon_1 = 2\,V, \varepsilon_2 = 3\,V$, $r_1 = r_2 = 3\ \Omega$. Jaka jest szybkość wytwarzania energii cieplnej na oporze R?



Zadanie 122 [7]. Obliczyć różnicę potencjałów między punktami a i c idąc po drodze zawierającej R i ε_2.

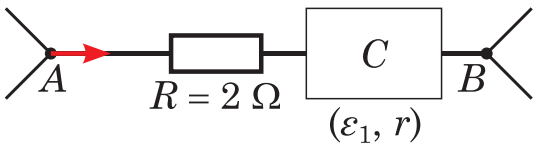


Zadanie 123 [7]. Jaka jest procentowa zmiana natężenia prądu w obwodzie spowodowana włączeniem do obwodu amperomierza o oporze 0,05 Ω.

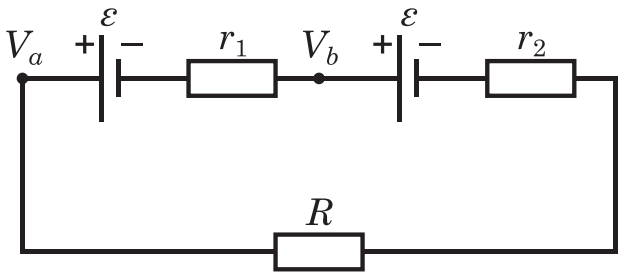


Zadanie 124 [7]. Odcinek obwodu AB pobiera moc P = 50 W. Przepływa przezeń prąd o natężeniu I = 1,0 A we wskazanym kierunku.

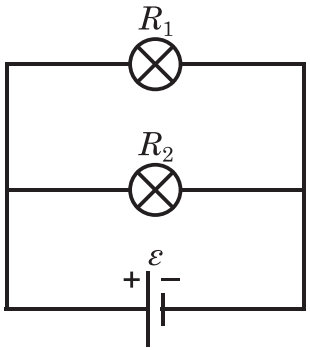
a) Jaka jest różnica potencjałów między A i B ?
b) Jeżeli element C nie ma oporu wewnętrznego jaka jest jego SEM?
c) Jaki jest znak SEM?

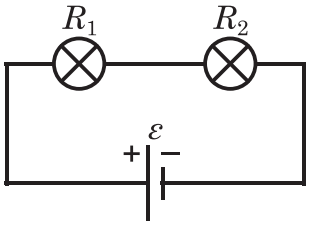


Zadanie 125 [7]. Dwie baterie o jednakowej SEM równej ε, ale różnych wewnętrznych oporach r_1 i r_2 podłączono szeregowo do zewnętrznego oporu R. Znaleźć wartość oporu R, dla której różnica potencjałów między zaciskami pierwszej baterii jest równa zero.



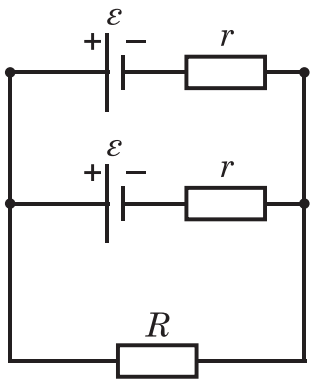
Zadanie 126 [7]. Dwie żarówki, jedna o oporze R_1, druga o oporze $R_2 < R_1$ połączono: a) równolegle, b) szeregowo. Która żarówka jest jaśniejsza?



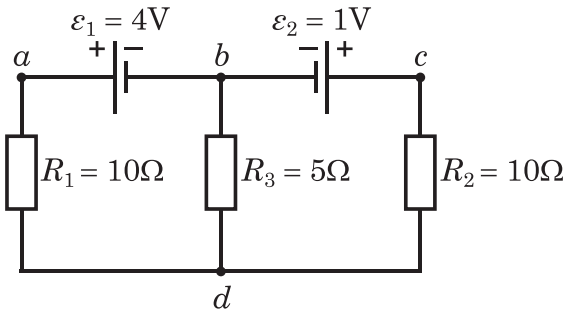


Zadanie 127 [7]. Dwie baterie o SEM równej ε i oporze wewnętrznym r połączono równolegle z oporem R.

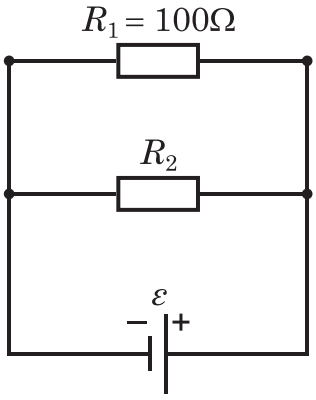
a) Dla jakiej wartości R energia cieplna wydzielana na oporze jest maksymalna?
b) Ile wynosi maksymalne rozproszenie energii?

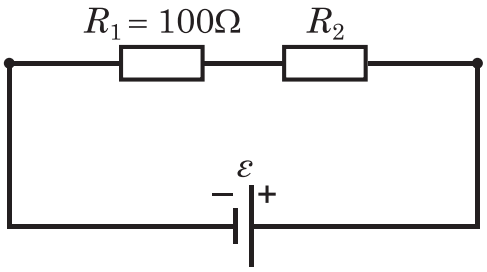


Zadanie 128 [7]. Obliczyć różnicę potencjałów pomiędzy punktami c i d, idąc po wszystkich możliwych drogach. Założyć, że $\varepsilon_1 = 4$ V, $\varepsilon_2 = 1$ V, $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$.

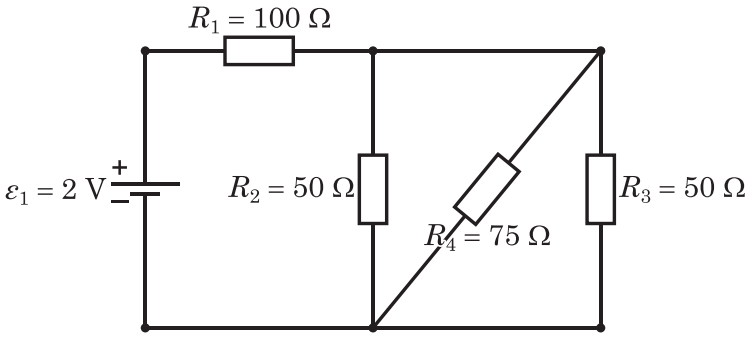


Zadanie 129 [7]. Dwa opory R_1 i R_2 mogą być połączone szeregowo albo równolegle i dołączone do baterii (nie mającej oporu wewnętrznego) o SEM równej ε. Żądamy, aby energia cieplna dla połączenia równoległego była pięciokrotnie większa niż dla połączenia szeregowego? Ile wynosi R_2, jeżeli opór R_1, jest równy 100 Ω.





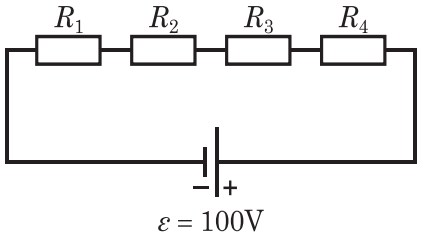
Zadanie 130 [7]. Jaki jest opór zastępczy dla sieci, jakie prądy płyną przez każdy z oporów? Przyjąć $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 50\ \Omega$, $R_4 = 75\ \Omega$ i $\varepsilon = 6$ V.

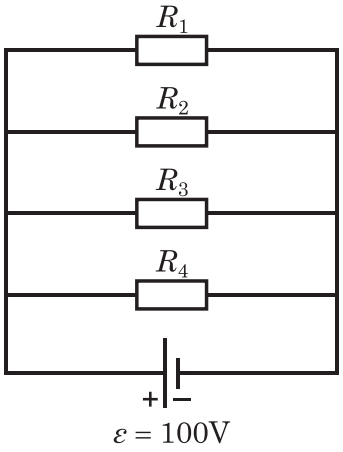


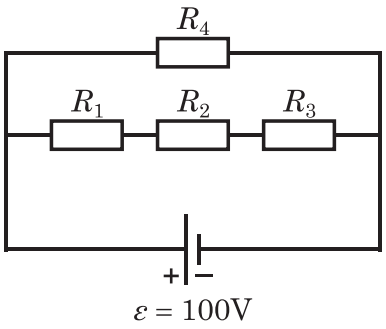
Zadanie 131 [7]. Drut miedziany o promieniu a (0,25 mm) osłonięty jest z zewnątrz aluminium o zewnętrznym promieniu b (0,38 mm). Jeżeli całkowite natężenie prądu w drucie wynosi $I = 2$ A, znaleźć natężenie prądu w obu materiałach. Jaka jest długość drutu jeżeli istnieje różnica potencjałów $V = 12$ V.

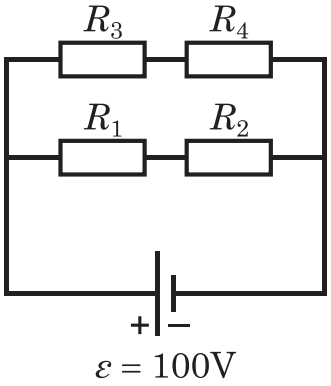
Zadanie 132 [7]. Używając tylko dwu opornic: pojedynczo, połączonych szeregowo oraz równolegle możemy otrzymać opory 3, 4, 12, 16 Ω. Jakie są opory tych opornic?

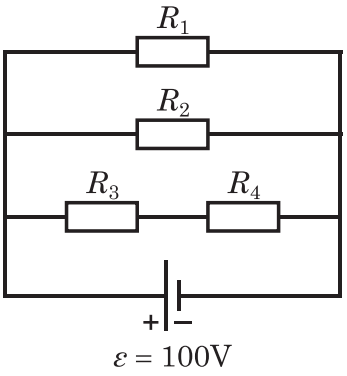
Zadanie 133 [7]. Cztery spirale grzejne, każda o mocy 100 W, łączone są na wszystkie możliwe sposoby (szeregowo, równolegle) i dołączane do sieci o napięciu 100 V. Jakie szybkości ciepła Joule'a można uzyskać w ten sposób?

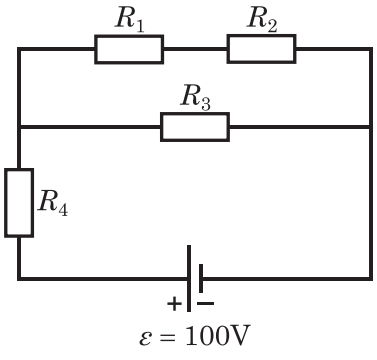


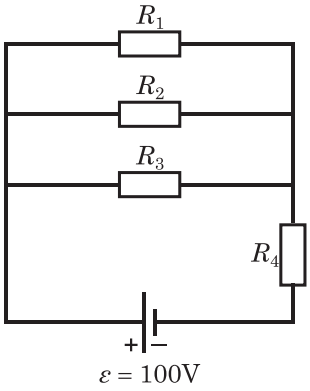


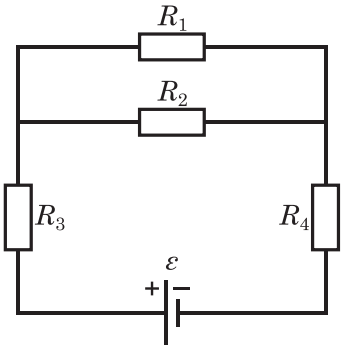




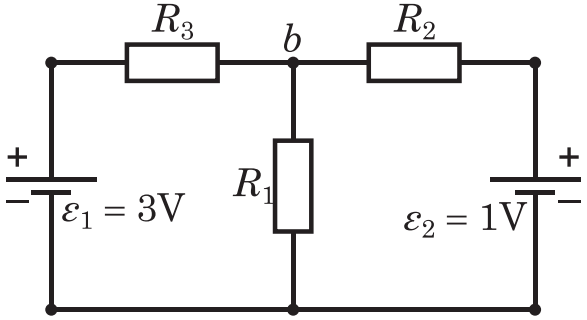






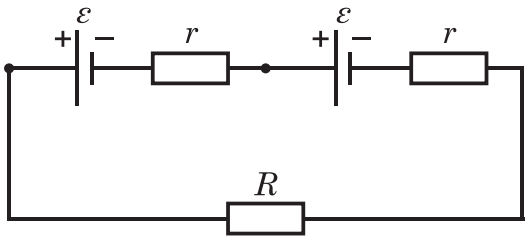


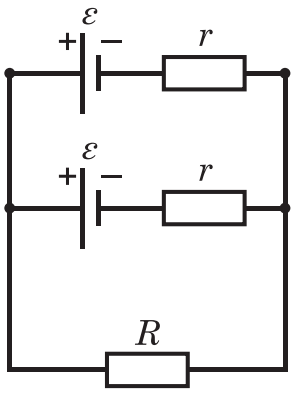
Zadanie 134 [7]. Z jaką szybkością jest wydzielana energia cieplna na oporze R_1 i na oporze R_2 i na oporze R_3? Jaka moc jest dostarczona przez ε_1 oraz ε_2. Przyjmując, że $\varepsilon_1 = 3$ V, ε_2=1 V, $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$.



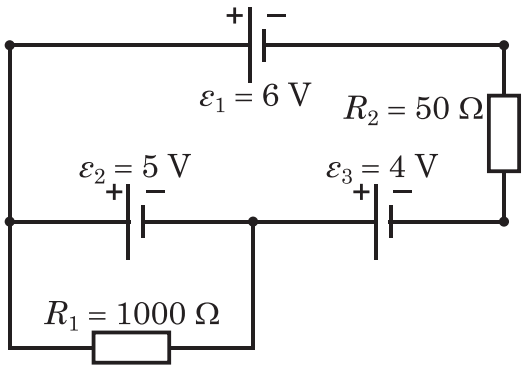
Zadanie 135 [7]. Mamy dwie baterie, każda o SEM ε i oporze wewnętrznym r. Mogą być one połączone ze sobą szeregowo albo równolegle i użyte do wytwarzania prądu o oporze R.

a) Znaleźć wyrażenia na natężenie prądu dla obu tych połączeń.
b) Które z nich daje większe natężenie prądu, gdy $R > r$ i gdy $R < r$?



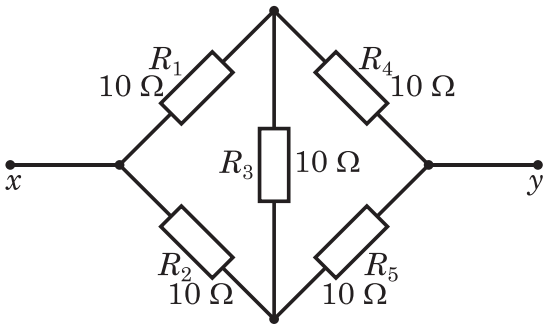


Zadanie 136 [7]. Znaleźć natężenie prądów w każdym z oporów i różnicę potencjałów między punktami a i b. Przyjąć ε_1 = 6 V, ε_2 = 5 V, ε_3 = 4 V oraz $R_1 = 1000\ \Omega, R_2 = 50\ \Omega$.

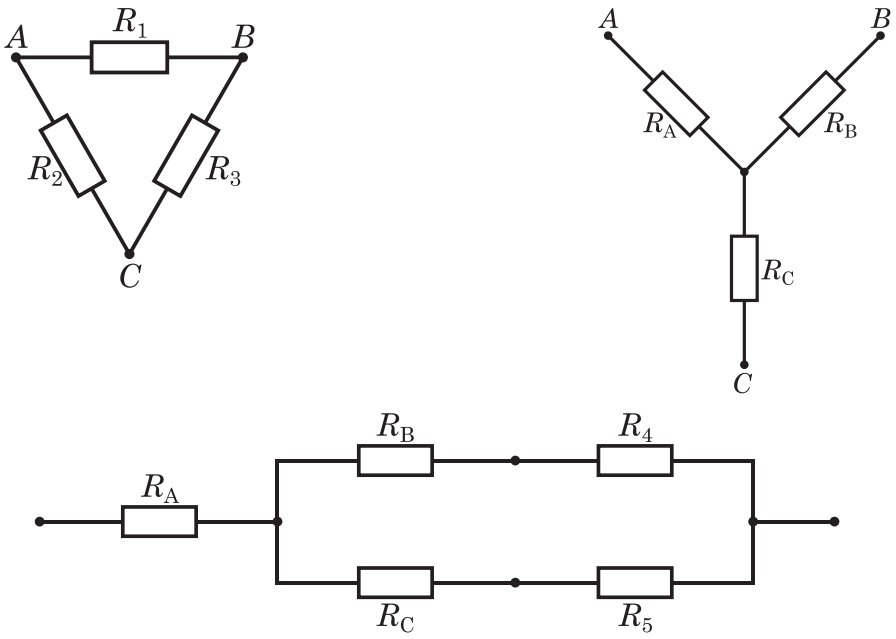


Zadanie 137 [7]. Jaki jest opór zastępczy, który należy włączyć, między zaciski x i y? Przyjąć, że wartość każdego z oporów wynosi 10 Ω.

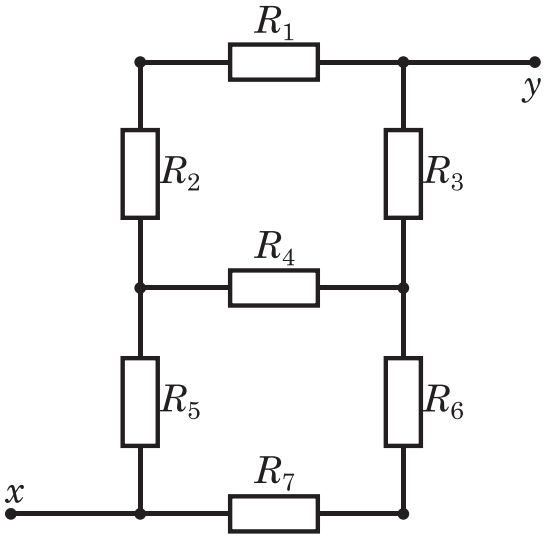
a)



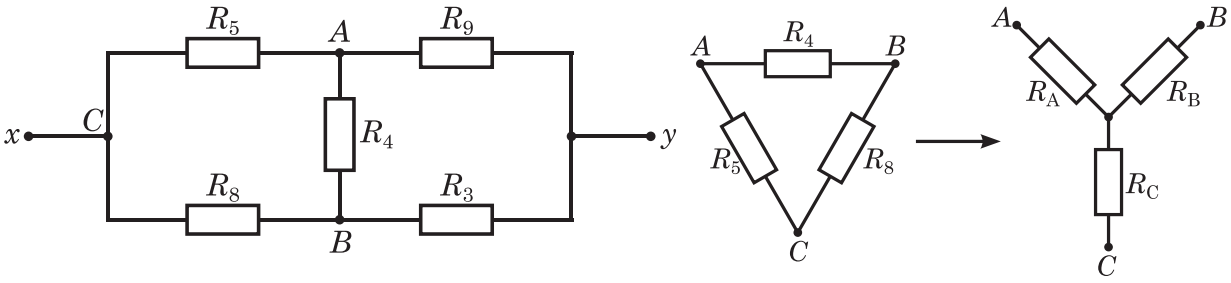
Rys. pomocnicze do a)

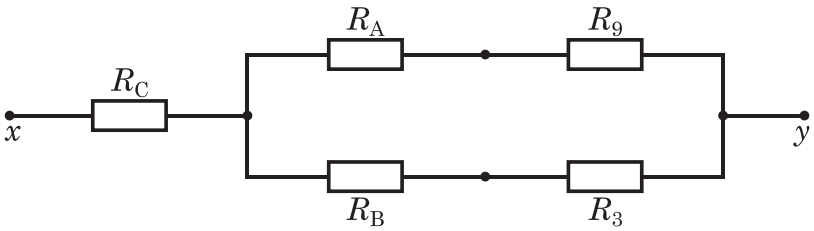


b)

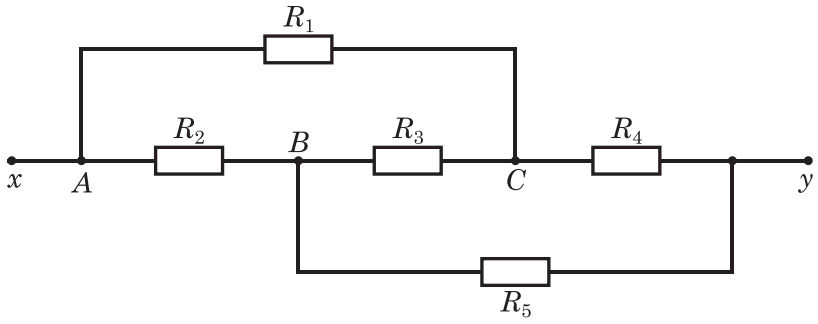


Rys. pomocnicze do b)

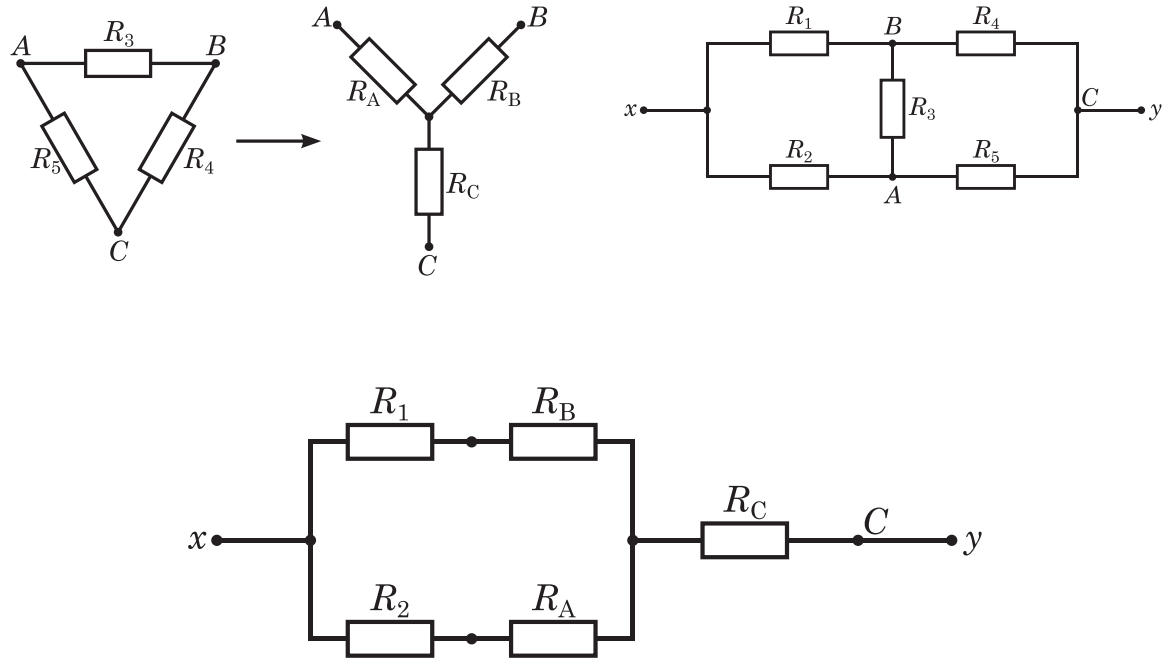




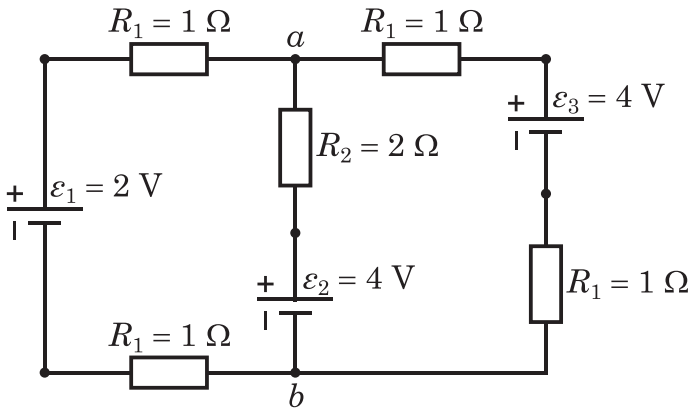
c)



Rys. pomocnicze do c)

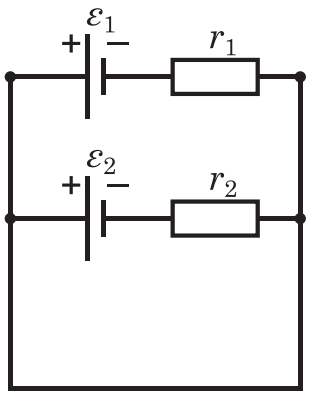


Zadanie 138 [7]. a) Znaleźć trzy natężenia prądów. b) Znaleźć V_{ab}. Przyjąć $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $\varepsilon_1 = 2$ V, $\varepsilon_2 = 3$ V, $\varepsilon_3 = 3$ V.



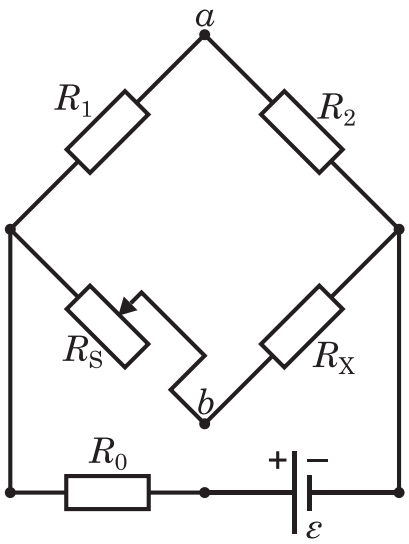
Zadanie 139 [7]. Dwie baterie o SEM i oporze wewnętrznym ε_1 i r_1 oraz ε_2 i r_2 są połączone równolegle. Wykazać, że efektywna SEM tego równoległego układu wynosi:

$$\varepsilon = r\left(\frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2}\right), \text{gdzie } \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$



Zadanie 140 [7]. Mostek Wheatstone'a. Wartość oporu R_s jest dobierana tak długo, dopóki punkty a i b nie osiągną jednakowego potencjału. Pokazać, że gdy to jest spełnione, zachodzi następujący związek:

$$R_x = R_S \frac{R_2}{R_1}$$



Zadanie 141. Ile wynosi prędkość chaotycznego ruchu nośników (np.: elektronów)?

Zadanie 142. Znając stałą Faraday'a obliczyć równoważnik elektrochemiczny trójwartościowego glinu o masie atomowej 27.

Zadanie 143. Ile gramów miedzi wydzieli się na katodzie platynowej podczas elektrolizy wodnego roztworu $Cu(NO_3)_2$ prądem o natężeniu 2 A w czasie 9650 s? M_{Cu} = 63,5 g/mol.

Zadanie 144. Elektrolizę wodnego roztworu $CuSO_4$ prowadzono przez 1 godzinę prądem o natężeniu 3 A. Jaka jest wartość ładunku, który przepłynął przez roztwór?

Zadanie 145. Roztwór wodny zawierający 1 mol $Cu(NO)_3$ i 1 mol $AgNO_3$ poddano elektrolizie na elektrodach platynowych przepuszczając ładunek równy 1,5 F. Ile gramów substancji wydzieliło się na katodzie? M_{Ag} = 108 g/mol, M_{Cu} = 63,5 g/mol.

Zadanie 146. Podczas elektrolizy wodnego roztworu $AgNO_3$ wydzieliło się 21,6 g srebra (M_{Ag} = 108 g/mol). Ile gramów miedzi (M_{Cu} = 63,5 g/mol) wydzieliłby ten sam ładunek elektryczny przepływający przez roztwór zawierający jony Cu^{2+}?

Zadanie 147. Jeżeli w warunkach normalnych na anodzie wydzieliło się w czasie elektrolizy stopionego KOH 11,2 dm^3 tlenu, to jaka jest ilość wydzielonego na katodzie potasu? M_K = 39,1 g/mol.

Rozdział V Magnetyzm

16. Pole magnetyczne

Przestrzeń otaczająca magnes lub przewodnik z prądem nazywamy **polem magnetycznym**. Wektor opisujący to pole nazywany jest **indukcją magnetyczną** $\vec{B}$. Wielkość ta jest reprezentowana przez **linie indukcji pola magnetycznego**. Styczna do linii indukcji pokazuje kierunek wektora $\vec{B}$ w dowolnym punkcie. Linie indukcji rysuje się tak, by ich liczba na jednostkę powierzchni przekroju poprzecznego była proporcjonalna do wartości bezwzględnej $\vec{B}$.
W związku z tym, że monopole magnetyczne (analogi ładunków elektrycznych wytwarzających pole elektryczne) nie zostały dotychczas odkryte, indukcję magnetyczną określa się w zależności od siły $\vec{F}$ działającej na poruszającą się naładowaną cząstkę próbną.

Jeżeli dodatni ładunek próbny q_0 porusza się w stronę punktu P z prędkością $\vec{v}$ i jeżeli na ten ładunek działa siła $\vec{F} = q_0\vec{v} \times \vec{B}$, to w punkcie P istnieje pole magnetyczne o indukcji $\vec{B}$.

Wartość bezwzględna indukcji magnetycznej wynosi:

$$B = \frac{F}{|q_0|v}.$$

Jednostką indukcji magnetycznej $\vec{B}$ jest **tesla [T] – 1T= 10^4 Gs (gausów)**.

Strumień indukcji pola magnetycznego:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \circ d\vec{s},$$

gdzie:
$d\vec{s} -$ wektor powierzchni.

Jednostką strumienia indukcji pola magnetycznego jest **weber** [Wb].

Jeżeli naładowana cząstka porusza się w obszarze, w którym istnieje pole magnetyczne $\vec{B}$ i pole elektryczne $\vec{E}$, to wypadkowa siła działająca na nią wyrażana jest **wzorem Lorentza** postaci:

$$\vec{F} = q_0\vec{E} + q_0\vec{v} \times \vec{B}.$$

Działanie pola magnetycznego na przewodnik z prądem

Prąd *I* w przewodniku jest przenoszony przez poruszające się z prędkością unoszenia $\vec{v}_u$ elektrony. Obecność pola magnetycznego powoduje odchylanie poruszających się ładunków elektrycznych. Wartość średniej siły działającej na pojedynczy elektron jest dana równaniem:

$$F' = q_0 vBsin\theta = ev_u B,$$

dla $\theta = 90°$.

Dla przewodnika o długości *l*, zawierającego *nAl* swobodnych elektronów, całkowita siła działająca na swobodne elektrony wynosi:

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B},$$

gdzie $\vec{l}$ jest wektorem o wartości równej długości przewodnika z prądem, kierunku wyznaczonym przez ten przewodnik i zwrocie określonym przez kierunek prądu.

Siła działająca na dowolny element przewodnika $d\vec{l}$ wynosi:

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B},$$

natomiast siła działająca na dowolny przewodnik krzywoliniowy:

$$\int d\vec{F} = \int Id\vec{l} \times \vec{B}.$$

Moment siły działający na zamknięty obwód z prądem (wypadkowy moment skręcający)

Jeżeli w polu magnetyczny o indukcji $\vec{B}$ umieszczona zostanie prostokątna ramka z prądem o wymiarach *a* i *b*, to siły $\vec{F}$ i $-\vec{F}$ ($\perp$ do $\vec{B}$) działające na tę ramkę wytworzą moment siły $\vec{M}$, który będzie powodował obrót ramki wokół osi:

$$M = IabBsin\theta,$$

gdzie θ jest kątem między wektorem normalnym prostopadłym do powierzchni ramki, a kierunkiem pola magnetycznego.

Dla solenoidu całkowity moment sił ma wartość:

$$M_s = NM = NIabBsin\theta = NIABsin\theta,$$

gdzie *A* jest polem powierzchni objętej przez cewkę o *N* zwojach.

Dipol elektryczny w polu magnetycznym

Dipol elektryczny o magnetycznym momencie dipolowym $\vec{\mu}$, umieszczony w zewnętrznym polu magnetycznym $\vec{B}$, obraca się na skutek działania momentu siły:

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B},$$

gdzie

$$\mu = NIA.$$

Dipol magnetyczny umieszczony w zewnętrznym polu magnetycznym posiada **energię potencjalną** związaną z jego orientacją w zewnętrznym polu magnetycznym. Jest ona równa pracy, jaką muszą wykonać siły zewnętrzne, aby obrócić dipol z położenia równowagi ($\theta = 90°$) do położenia opisanego przez kąt θ:

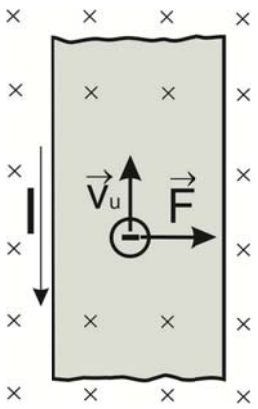
$$U = \int_{90°}^{\theta} Md\theta = -\mu Bcos\theta,$$

$$U = -\vec{\mu} \circ \vec{B}.$$

Zjawisko Halla (pola skrzyżowane)

Zjawisko to, pozwala określić rodzaj ładunków płynących w przewodniku oraz ich koncentrację, czyli liczbę nośników prądu przypadających na jednostkę objętości przewodnika.

Przewodnik wykonany z miedzi, o szerokości *d*, w którym płynie prąd o natężeniu *I* umieszczono w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$, tak aby linie natężenia pola magnetycznego były prostopadłe do płaszczyzny przewodnika.



Pole magnetyczne działa na poruszające się z prędkością unoszenie v_u elektrony z siłą $\vec{F} = q\vec{v}_u \times \vec{B}$, która będzie odchylała je w kierunku prawego brzegu przewodnika. Skutkiem tego będzie gromadzenie się elektronów przy prawym brzegu przewodnika, czyli nastąpi rozdzielenie ładunków elektrycznych ujemnych i dodatnich w obrębie przewodnika. Powstanie wówczas wewnątrz przewodnika poprzeczne pole elektryczne Halla $\vec{E}_H$, które będzie działało na elektron siłą $\vec{F}_H = q\vec{E}_H$, dążąc przemieszczenia go w lewo. Pole to powstanie wskutek wytworzonej różnicy potencjałów Halla $V = E_H d$. Ostatecznie osiągnięty zostanie stan równowagi, w którym siły magnetyczne równoważą siły elektryczne:

$$q\vec{E}_H + q\vec{v}_u \times \vec{B} = 0,$$

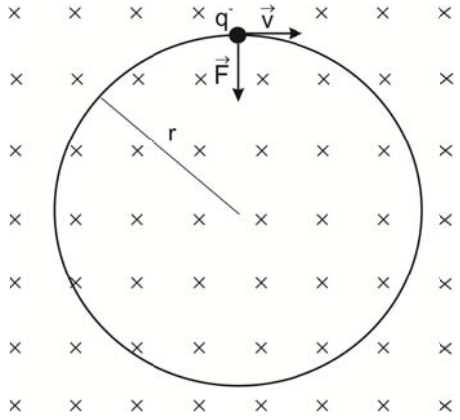
stąd

$$\vec{E}_H = -\vec{v}_u \times \vec{B}.$$

Ładunki krążące po okręgu w polu magnetycznym

Na ujemnie naładowaną cząstkę, poruszającą się z prędkością $\vec{v}$ w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ tak, że $\vec{v} \perp \vec{B}$, działa siła odchylająca $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Cząstka ta będzie poruszała się ze stałą prędkością $\vec{v}$ po torze kołowym o promieniu *r*, będzie na nią zatem działała siła $F = \frac{mv^2}{r}$, co oznacza, że

$$qvB = \frac{mv^2}{r}.$$



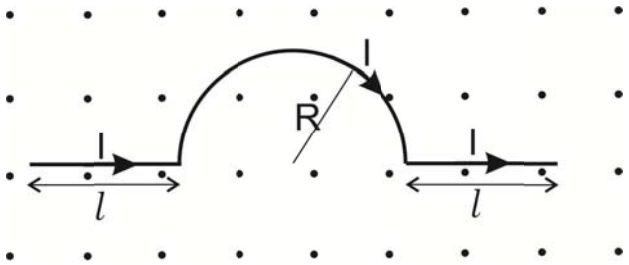
Z tej zależności wynikają następujące wielkości fizyczne:

- $r = \frac{mv}{qB}$ (promień toru cząstki);
- $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v}\frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB}$ (okres);
- $f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$ (częstotliwość, częstość cyklotronowa);
- $\omega = 2\pi f = \frac{qB}{m}$ (częstość kołowa, prędkość kątowa).

ZADANIA

Zadanie 148. Jednorodne pole magnetyczne o indukcji magnetycznej $\vec{B}$ skierowane jest poziomo z południa na północ, wartość B wynosi 1,5 T. Jaka siła będzie działała na proton o energii 5 MeV poruszający się pionowo w dół w tym polu?

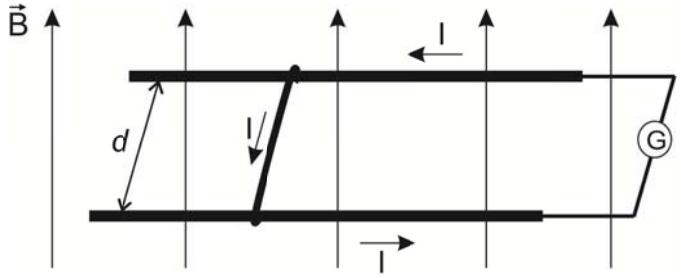
Zadanie 149. Wygięty przewód, który przewodzi prąd I jest umieszczony w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$, skierowanym przed płaszczyznę rysunku. Obliczyć siłę działającą na przewód.



Zadanie 150. Elektrony płynące w lampie telewizyjnej mają energię 12keV. Lampa jest tak zorientowana, że elektrony poruszają się poziomo z południa na północ. Ziemskie pole magnetyczne skierowane jest do dołu i ma indukcję $\vec{B}$ równą $5{,}5\cdot10^{-5}$ T. W jakim kierunku będzie odchylany strumień elektronów? Jakie jest przyspieszenie elektronów? O ile odchyli się strumień elektronów po przebyciu 20 cm drogi w lampie?

Zadanie 151. Przewód metalowy o masie m ślizga się bez tarcia po dwóch poziomych szynach odległych od siebie o d. Całość umieszczona jest w pionowym, jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$. Stały prąd I płynie od generatora G przez jedną szynę, następnie przez przewód i wraca przez drugą szynę. Znaleźć zależność prędkości

(wartość i kierunek), z jaką porusza się przewód, od czasu, zakładając, że w chwili $t = 0$ był on w spoczynku.



Zadanie 152. Przewód o długości 1 m, w którym płynie prąd o natężeniu 10 A tworzy kąt 30° z jednorodnym polem magnetycznym o indukcji B = 1,5 T. Znaleźć wartość i kierunek siły działającej na przewód.

Zadanie 153. Przewód o długości 50 cm leżący na osi x przenosi prąd o natężeniu 0,5 A w dodatnim kierunku osi x. Obecne jest pole magnetyczne o indukcji (w teslach) $B = 0{,}0030j + 0{,}010k$. Znaleźć składowe siły działającej na przewód.

Zadanie 154. Elektron znajdujący się w jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B}$ ma prędkość:

$$\vec{v} = 4{,}0 \cdot 10^5\vec{\imath} + 7{,}1 \cdot 10^5\vec{\jmath}\ \left[\frac{m}{s}\right].$$

Działa na niego siła:

$$\vec{F} = -2{,}7 \cdot 10^{-13}\vec{\imath} + 1{,}5 \cdot 10^{-13}\vec{\jmath}\ [N].$$

Jeżeli $B_x = 0$, znaleźć wartość pola magnetycznego.

Zadanie 155. Przewód o długości l przewodzi prąd o natężeniu I. Pokazać, że jeżeli ten przewód zwiniemy spiralnie, to maksymalny moment sił będzie działał na spiralę danym polu magnetycznym wtedy, gdy będzie ona składała się tylko z jednego zwoju i wartość tego momentu wyniesie $M = \frac{1}{4\pi} l^2 IB$.

Zadanie 156. Jakie pole magnetyczne (podać najmniejszą wartość i kierunek wektora indukcji magnetycznej) trzeba przyłożyć na równiku (r = 6,378·10^6 m), aby protony (m_p = 1,67·10^{-27} kg) o prędkości 1,0·10^7 m/s krążyły wokół Ziemi?

Zadanie 157. Pokazać, że promień krzywizny toru cząstki naładowanej, poruszającej się prostopadle do pola magnetycznego jest proporcjonalny do jej pędu.

Zadanie 158. Deuteron, o ładunku takim samym jak proton i masie równej sumie mas protonu i neutronu, porusza się w ogromnym cyklotronie w polu magnetycznym o indukcji B = 1,5 T po orbicie o promieniu 2 m. Po zderzeniu z tarczą, deuteron rozpada się na proton i neutron, nie tracąc prawie energii kinetycznej. Opisać ruch obu powstałych cząstek. Założenie: energia deuteronu dzieli się równo pomiędzy proton i neutron.

17. Prawo Ampére'a

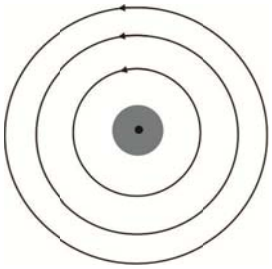
Prawo Ampére'a określa ilościową zależność między natężeniem prądu I, a polem magnetycznym $\vec{B}$:

$$\oint \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 I,$$

gdzie $d\vec{l}$ jest wektorem, którego kierunek jest zgodny z kierunkiem przepływu prądu *I*, a μ_0 **jest przenikalnością magnetyczną próżni**:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\mathrm{T} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{A}}\right] \approx 1{,}26 \cdot 10^{-6} \left[\mathrm{T} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{A}}\right].$$

Kiedy przez przewodnik płynie silny prąd, linie pola magnetycznego wytworzonego przez ten prąd są kołami zamkniętymi.



Reguła prawej ręki

Jeżeli uchwycimy przewodnik z prądem prawą ręką tak, aby kciuk wskazywał kierunek prądu, to palce otaczające przewodnik wskażą kierunek wektora indukcji magnetycznej $\vec{B}$.

Warunki stosowania Prawa Ampére'a:

1. Konstruujemy w polu magnetycznym zamkniętą drogę, która otacza przewodnik przez który płynie prąd.
2. Dzielimy drogę na elementy długości *dl*.
3. Dla każdego elementu *dl* obliczamy wartość $\vec{B} \circ d\vec{l} = Bdlcos\theta$, gdzie θ jest kątem między wektorami $\vec{B}$ i $d\vec{l}$.
4. Całkujemy po wszystkich elementach zamkniętej drogi.

Pole magnetyczne w odległości *R* od **długiego prostoliniowego przewodu**, w którym płynie prąd *I*:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Pole magnetyczne w środku **przewodu w kształcie łuku okręgu** o promieniu *R* i kącie środkowym φ:

$$B = \frac{\mu_0 I \varphi}{4\pi R}.$$

Siła działająca między równoległymi przewodami o długości *L*, w których płyną prądy jest wyrażona następującym wzorem:

$$F_{ba} = I_b L B_a sin90° = \frac{\mu_0 L I_a I_b}{2\pi d},$$

gdzie *d* jest odległością przewodów, a I_a i I_b oznaczają natężenia prądów w przewodach, $B_a = \frac{\mu_0 I_a}{2\pi d}$. Przewody, w których płyną prądy w tym samym kierunku przyciągają się, natomiast gdy prądy płyną w przeciwnych kierunkach, to przewody odpychają się.

Pole magnetyczne solenoidu

Solenoidem nazywamy długi przewód zwinięty w spiralę o przylegających zwojach i przewodzący prąd *I*. Spirala jest bardzo długa w porównaniu ze swoją średnicą.

Pole solenoidu jest sumą wektorową pól wytwarzanych przez wszystkie zwoje tworzące solenoid. Wewnątrz solenoidu wektor indukcji magnetycznej $\vec{B}$ jest równoległy do osi solenoidu, pola między zwojami wzajemnie się kompensują. **Wartość indukcji magnetycznej** w punktach oddalonych od końców solenoidu jest równa:

$$B = \mu_0 I n,$$

gdzie *n* jest liczba zwojów na jednostkę długości.

18. Prawo Biota-Savarta

Prawo Ampére'a można stosować do wyznaczania pola magnetycznego dla symetrycznych rozkładów prądów. Chcąc obliczyć w dowolnym punkcie indukcję magnetyczną pola wytworzonego przez dowolny rozkład prądów stosuje się prawo Biota-Savarta. W tym celu dzielimy każdy z prądów na nieskończenie małe elementy i obliczamy wkłady $d\vec{B}$ w tym punkcie przez każdy z tych elementów:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

gdzie r jest odległością punktu, w którym obliczamy pole magnetyczne od przewodnika z prądem.

Wypadkowy wektor $\vec{B}$ otrzymujemy całkując te wkłady po całym rozkładzie prądów:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

ZADANIA

Zadanie 159. Znaleźć wyrażenie na $\vec{B}$ w odległości r od środka długiego cylindrycznego przewodu o promieniu R dla warunku $r < R$. Przewód przewodzi prąd I_0 rozmieszczony równomiernie w całym przekroju przewodu.

Zadanie 160. Płaski pasek miedziany o szerokości a i o zaniedbywalnej grubości przewodzi prąd o natężeniu I. Znaleźć pole magnetyczne $\vec{B}$ w punkcie P, w odległości R od środka paska, w kierunku prostopadłym do niego.

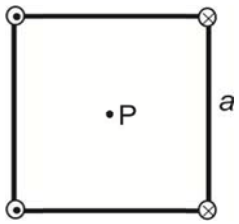
Zadanie 161. Dwa równoległe przewody, odległe od siebie o d, przewodzą prądy przeciwnie skierowane, lecz o równych natężeniach I. Znaleźć indukcję magnetyczną dla punktów leżących między przewodami w odległości x od jednego z nich.

Zadanie 162. Obliczyć wartość pola magnetycznego $\vec{B}$ wytworzonego przez długi, prostoliniowy przewodnik, w którym płynie prądu I.

Zadanie 163. W przewodniku w kształcie okręgu o promieniu R płynie prąd o natężeniu I. Obliczyć $\vec{B}$ dla punktów lżących na osi tego okręgu.

Zadanie 164. Nieizolowany przewód miedziany o średnicy 0,25 mm może bez przegrzania przewodzić prąd o natężeniu 50 A. Jaka jest dla takiego prądu wartość indukcji magnetycznej $\vec{B}$ przy powierzchni przewodnika?

Zadanie 165. Cztery długie przewody miedziane są umieszczone równolegle tak, że przekrój utworzonego układu jest kwadratem o boku a = 20 cm. W każdym z przewodów płynie prąd o natężeniu I = 20 A. Jaka jest wartość i kierunek wektora $\vec{B}$ w środku kwadratu?

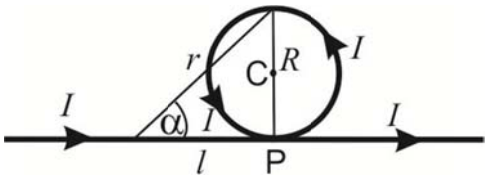


Zadanie 166. Długi przewodnik z prądem o natężeniu 100 A umieszczono w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji 50 Gs. Przewodnik tworzy kąt prosty z liniami sił tego pola. Wyznaczyć punkty, w których wypadkowe pole magnetyczne jest równe zeru.

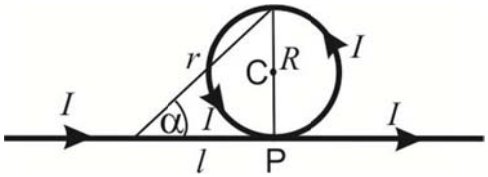
Zadanie 167. Solenoid o 200 zwojach, długości 25 cm i średnicy 10 cm przewodzi prąd 0,30 A. Jaka jest wartość pola magnetycznego $\vec{B}$ w pobliżu środka solenoidu? Jaki strumień magnetyczny przechodzi przez pierścień o zewnętrznej średnicy 8 cm, jeśli płaszczyzna pierścienia jest prostopadła do osi solenoidu?

Zadanie 168. Prosty przewodnik z prądem o natężeniu *I* przechodzi w dwa identyczne półkoliste rozwidlenia. Jakie jest pole magnetyczne w środku tak uformowanego kołowego obwodu?

Zadanie 169. Długi przewód zgięto tak, aby nie stykał się w punkcie przecięcia P. Promień odcinka kołowego wynosi *R*. Ustalić wartość i kierunek pola $\vec{B}$ w środku C części kołowej przewodu, gdy prąd *I* płynie tak, jak zaznaczono na rysunku.



Zadanie 170. Kołowa część przewodu jest obracana, bez jej zniekształcania, wokół oznaczonej średnicy, prostopadłej do prostej części przewodu. Moment magnetyczny związany z obwodem kołowym ma kierunek taki sam, jak prąd w prostej części przewodu. Ustalić jakie jest pole $\vec{B}$ w punkcie C.



Zadanie 171. W prostoliniowym przewodniku o długości *l* płynie prąd o natężeniu *I*. Wykazać, że wartość indukcji pola magnetycznego $\vec{B}$ wytworzonego przez ten prąd dla punktów leżących na symetralnej tego przewodnika w odległości *R* od niego wynosi:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{l}{(l^2 + 4R^2)^{1/2}}.$$

Czy dla $l \to \infty$ wyrażenie to daje wynik jakiego należałoby się spodziewać?

Zadanie 172. W kwadratowym obwodzie o boku *a* płynie prąd o natężeniu *I*. Wykazać, że wartość indukcji pola magnetycznego *B* w środku kwadratu wyraża się wzorem:

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}.$$

Zadanie 173. Wykazać, że indukcja magnetyczna $\vec{B}$ w środku prostokąta o bokach równych odpowiednio *l* i *d* przewodzącego prąd o natężeniu *I* jest dana wyrażeniem:

$$B = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{(l^2 + d^2)^{1/2}}{ld}.$$

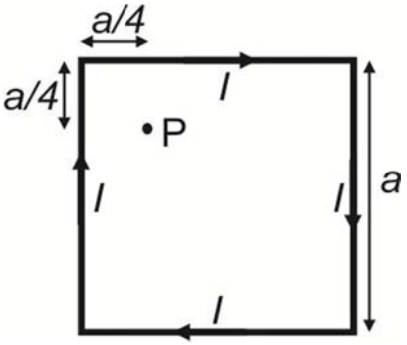
Czy dla $l \gg d$ wyrażenie to daje wynik jakiego należałoby się spodziewać?

Zadanie 174. Obwód ma kształt regularnego wielokąta o *n* bokach, wpisanego w okrąg o promieniu *a*. Wykazać, że jeśli w obwodzie tym płynie prąd *I*, to indukcja magnetyczna w środku okręgu jest dana wyrażeniem:

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi a} tg \frac{\pi}{n}.$$

Wykazać, że dla $n \to \infty$ wyrażenie to dąży do odpowiedniego wyrażenia dla obwodu kołowego.

Zadanie 175. Obliczyć indukcję magnetyczną $\vec{B}$ w punkcie P. Przyjąć, że I = 10 A, a a = 8 cm.



Zadanie 176. Dany jest przewód o długości l, w którym może płynąć prąd o natężeniu I. Z przewodu można utworzyć okrąg lub kwadrat. W którym z tych przypadków wartość $\vec{B}$ w punkcie środkowym będzie większa?

19.Indukcja i indukcyjność

Doświadczenie Faraday'a

Gdy do przewodzącego zwoju podłączonego do galwanometru zbliżymy magnes sztabkowy wskazówka galwanometru wychyli się pokazując, że w obwodzie płynie prąd. Prąd ten nazywa się **prądem indukowanymi** i jest wywołany **indukowaną siłą elektromotoryczną (SEM)**. Zjawisko wytwarzania prądu indukowanego i SEM nazywamy **zjawiskiem indukcji elektromagnetycznej**.

Prawo indukcji Faraday'a

Indukowana w obwodzie siła elektromotoryczna SEM (ε) równa się szybkości, z jaką zmienia się strumień Φ_B przechodzący przez ten obwód:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Dla zwojnicy o *N* zwojach SEM pojawi się dla każdego zwoju. Siły elektromotoryczne pochodzące od każdego ze zwojów dodają się:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt},$$

gdzie $N\Phi_B$ jest całkowitym strumieniem przechodzącym przez zwojnicę.

Reguła Lenza

Prąd indukowany ma taki kierunek, że pole magnetyczne wytworzone przez ten prąd przeciwstawia się zmianie strumienia pola magnetycznego, która go wywołała (stąd znak „ – ” w prawie Faraday'a).

Indukowane pola magnetyczne

Jeśli w przewodniku w kształcie pierścienia płynie prąd, to wzdłuż tego pierścienia musi istnieć pole elektryczne, które wykonuje pracę przy przemieszczaniu elektronów przewodnictwa. Źródłem tego pola jest zmienny strumień magnetyczny. To indukowane pole elektryczne działa na cząstkę o ładunku q_0 siłą $q_0\vec{E}$.

Zmienne pole magnetyczne wytwarza pole elektryczne:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Prawo Faraday'a zapisane w powyższej postaci, może być stosowane do dowolnego zamkniętego konturu, który można narysować w zmiennym polu magnetycznym.

Indukcyjność

Jeżeli dwie cewki znajdują się blisko siebie, to prąd *I* płynący w jednej z nich wytwarza strumień Φ_B przechodzący przez drugą cewkę. Jeżeli strumień ten zmienia się, wraz ze zmiana prądu, w drugiej cewce powstanie **indukowana SEM** – zgodnie z prawem Faraday'a.

Indukowana SEM pojawia się w pojedynczej cewce wtedy, gdy w niej samej zmienia się prąd – **zjawisko samoindukcji**.

Cewka jest elementem obwodu, za pomocą którego można w pewnym obszarze wytworzyć pole magnetyczne o znanej indukcji magnetycznej. Jeżeli w każdym zwoju cewki płynie prąd o natężeniu *I*, to strumień magnetyczny Φ_B wytworzony w każdym ze zwojów przez prąd *I* jest jednakowy, wtedy Prawo Faraday'a dla takich cewek postaci $\varepsilon = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt}$, pokazuje, że wypadkowy strumień przechodzący przez wszystkie zwoje $(N\Phi_B)$ jest wielkością charakterystyczną dla indukcji i jest proporcjonalny do wartości prądu *I* płynącego w cewce:

$$N\Phi_B = LI,$$

gdzie *L* jest indukcyjnością cewki.

Indukcyjność cewek o dowolnych kształtach i wymiarach (*L* zależy od geometrii uzwojenia) jest zdefiniowana jako:

$$L = -\frac{\varepsilon}{di/dt}.$$

Jednostką indukcyjności jest **henr** $[\mathbf{1\ H}] = \left[\mathbf{1V} \cdot \frac{\mathbf{1s}}{\mathbf{1A}}\right]$.

SEM samoindukcji:

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}.$$

Indukcja wzajemna

Dwie cewki umieszczone blisko siebie mogą na siebie wzajemnie oddziaływać. Stały prąd *I* płynący w jednej z cewek wytworzy strumień pola magnetycznegoΦ_B, który będzie przecinał drugą cewkę. Jeśli prąd *I* będzie się zmieniał w czasie *t*, to w drugiej cewce pojawi się siła elektromotoryczna SEM zgodnie z prawem Faraday'a. Indukcja wzajemna M_{12} cewki drugiej względem cewki pierwszej wyniesie wówczas

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}.$$

Po zróżniczkowaniu tego równania względem czasu otrzymujemy wzór na siłę elektromotoryczną SEM pojawiająca się w cewce drugiej dzięki zmianom prądu w cewce pierwszej:

$$\varepsilon_2 = -M_{12} \frac{dI_1}{dt}.$$

SEM w jednej z cewek jest proporcjonalna do szybkości zmiany prądu w drugiej z cewek.

Energia magnetyczna

Jeżeli w cewce o indukcyjności *L* płynie prąd o natężeniu *I*, to w polu magnetycznym zmagazynowana jest energia magnetyczna:

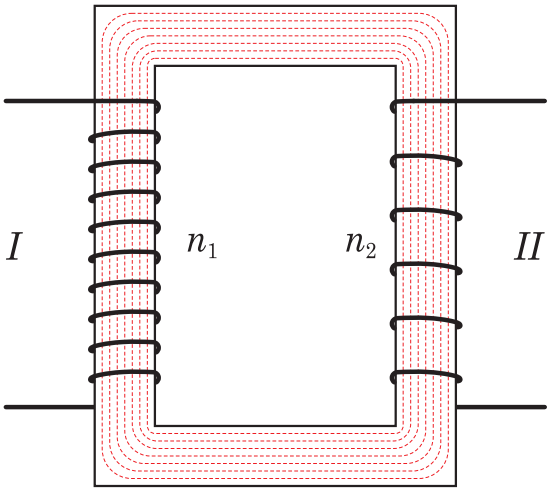
$$E_B = \frac{1}{2} L I^2.$$

Gęstość zmagazynowanej energii magnetycznej jest równa:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Transformator

Transformator, to urządzenie służące do podwyższania lub obniżania napięcia zmiennego w obwodzie, utrzymujące stałą wartość mocy. Zbudowany jest z dwóch cewek nawiniętych na rdzeń wykonany z miękkiego żelaza. Uzwojenie pierwotne cewki o n_1 zwojach połączone jest ze źródłem prądu zmiennego, którego SEM wynosi:



$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_{max} sin\omega t.$$

Uzwojenie wtórne o n_2 zwojach jest obwodem otwartym dopóki nie zostanie zamknięty klucz S, zatem w uzwojeniu wtórnym nie płynie prąd. Uzwojenie pierwotne jest czystą indukcyjnością, co oznacza, że bardzo mały prąd płynący w tym uzwojeniu, nazywany prądem magnesującym, jest opóźniony w fazie w stosunku do pierwotnej różnicy potencjałów o 90°. Prąd ten indukuje w zmienny strumień magnetyczny Φ_B w rdzeniu z żelaza. Zakładając, że cały ten strumień przenika przez uzwojenie wtórne, na podstawie prawa Faraday'a można stwierdzić, że przypadająca na jeden zwój SEM ε_T jest taka sama jak w uzwojeniu pierwotnym:

$$(\varepsilon_T)_{sk} = -\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{sk} = \frac{U_{1sk}}{n_1} = \frac{U_{2sk}}{n_2},$$

stąd transformacja napięcia:

$$U_{2sk} = U_{1sk}\frac{n_2}{n_1}.$$

Stosunek $\frac{n_2}{n_1}$ nazywa się przekładnią transformatora. Dla $n_2 > n_1$transformator podwyższa napięcie, dla $n_2 < n_1$ transformator obniża napięcie.

Jeżeli zamkniemy klucz S, to wówczas uzwojenie wtórne jest połączone z oporem *R*. W obwodzie wtórnym pojawi się prąd $I_2(t)$, czemu towarzyszy wydzielanie mocy ($P = I_{sk}^2 R = \frac{U_{sk}^2}{R}$) na oporniku *R*. Energia jest więc pobierana ze źródła. Prąd ten indukuje zmienny

strumień magnetyczny w rdzeniu z żelaza, a ten strumień indukuje w obwodzie pierwotnym SEM skierowaną przeciwnie do SEM źródła. Oba uzwojenia stanowią zatem wzajemnie sprzężone indukcyjności. Napięcie $U_1(t)$ nie może ulec zmianie pomimo pojawienia się przeciwnie skierowanej SEM ponieważ musi ona równać się wartości $\varepsilon(t)$ źródła. Wobec tego w uzwojeniu pierwotnym pojawia się nowy wypadkowy prąd zmienny $I_1(t)$ o wartości I i fazie dokładnie takiej, aby zrównoważyć SEM wytworzoną w uzwojeniu pierwotnym przez prąd $I_2(t)$. Moc przekazywana przez źródło do obwodu pierwotnego jest równa $I_1U_1 = I_2U_2$, a $I_2 = I_1\frac{n_1}{n_2}$. Prąd I_1 zaczyna płynąć w obwodzie pierwotnym na skutek istnienia oporu R w obwodzie wtórnym:

$$I_1 = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 U_1 = \frac{1}{R_{rw}}U_1,$$

gdzie R_{rw} jest tak zwanym oporem równoważnym widzianym przez źródło, które wytwarza napięcie U_1 i prąd o natężeniu I_1, tak jak gdyby było podłączone bezpośrednio do oporu R_{rw}.

Silnik

W silniku elektrycznym prądu stałego przekształcana jest energia elektryczna w mechaniczną. Do tego celu wykorzystywane jest zjawisko działania siły Lorentza na przewodnik z prądem umieszczony w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$:

$$\vec{F} = I\vec{B} \times \vec{l}.$$

Elementy konstrukcyjne silnika prądu stałego to:

a) wirnik, który tworzy twornik (rdzeń na którym nawinięte jest obracające się miedziane uzwojenie o małym oporze elektrycznym R_t) wraz z osią i kolektorem (wycinki pierścienia odizolowane elektrycznie i połączone z końcówkami uzwojeń twornika);
b) stojan składający się z elektromagnesów, obudowy i podstawy;
c) szczotki, które doprowadzają prąd.

Działająca siła wprawia w ruch obrotowy wirnik silnika, wówczas w uzwojeniach twornika wytwarza się siła elektromotoryczna ε:

$$\varepsilon = U - R_tI_t$$

Prądnica

Prądnica wytwarza prąd elektryczny kosztem pracy mechanicznej. Praca mechaniczna jest potrzeba do podtrzymywania ruchu obrotowego. Prądnica zbudowana jest z:

a) części obracającej się – twornik, którym jest jeden zwój przewodu;
b) części nieruchomej – stojan (magnes stały).

W czasie obrotu twornika zmienia się strumień indukcji magnetycznej przechodzącej przez uzwojenie twornika. Zgodnie z prawem indukcji Faraday'a w uzwojeniach twornika indukuje się wówczas siła elektromotoryczna. Prąd wytworzony w tworniku wyprowadza się za pomocą kolektora i szczotek.

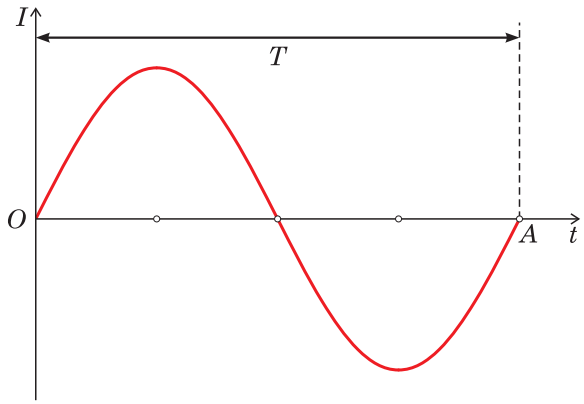
Natężenie i napięcie skuteczne prądu zmiennego.

Siła elektromotoryczna indukowana w prądnicy prądu zmiennego, zmienia się według zależności:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 sin\omega t$$

Natężenie indukowanego prądu zmienia się:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon_0}{R} sin\omega t = I_0 sin\omega t$$



Wartość natężenia prądu zmienia się w ułamku sekundy. Dlatego dla scharakteryzowania wartości prądu zmiennego wprowadza się tzw. wartość skuteczną prądu zmiennego.

Wartością skuteczną natężenia prądu zmiennego nazywamy taką wartość natężenia prądu stałego, który w danym obwodzie w ciągu danego czasu wykona taką samą pracę lub wydzieli tyle samo ciepła jak rozważany prąd zmienny.

$$I_{sk} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$U_{sk} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Moc prądu zmiennego: $P = \frac{1}{2} I_0^2 R$

ZADANIA

Zadanie 177. W długim solenoidzie zawierającym 200 zwojów na cm o średnicy 3 cm płynie prąd o natężeniu 1,5 A. Wewnątrz umieszczamy ściśle nawinięta cewkę o 100 zwojach i średnicy 2 cm. Cewka jest tak ustawiona, że linie indukcji magnetycznej w środku solenoidu SA równoległe do jej osi. Prąd płynący w zwojnicy w ciągu 0,05 s najpierw w sposób jednostajny spada do zera, a następnie płynie w przeciwnym kierunku i osiąga natężenie 1,5 A. Jak duża SEM indukuje się w cewce w czasie zmian prądu?

Zadanie 178. Pręt miedziany o długości *L* wiruje z prędkością kątową ω w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$. Wyznaczyć SEM pojawiającą się między końcami pręta.

Zadanie 179. Załóżmy, że indukcja $\vec{B}$ wzrasta z szybkością $\frac{dB}{dt}$, a *R* jest promieniem cylindrycznego obszaru, w który istnieje pole. Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ w dowolnej odległości $r < R$, $r > R$ od osi cylindra? Przyjąć, że $\frac{dB}{dt} = 0{,}1\ T/s$ i $R = 10$ cm.

Zadanie 180. Mały obwód o powierzchni *A* znajduje się wewnątrz długiego solenoidu o *n* zwojach na jednostkę długości i natężeniu *I*, a oś obwodu ma taki sam kierunek co oś solenoidu. Znaleźć SEM w obwodzie, jeżeli $I = I_0 sin\omega t$.

Zadanie 181. Obliczyć indukcyjność dla wewnętrznej części długiego solenoidu znajdującego się pobliżu jego środka. Długość tej części jest równa *l*.

Zadanie 182. Długi koncentryczny przewód składa się z dwóch współosiowych cylindrów o promieniach *a* i *b*. W cylindrze wewnętrznym płynie prąd *I*, który wraca przez cylinder zewnętrzny. Obliczy c energię zawartą w polu magnetycznym przewodu na odcinku o długości *l*. Ile wynosi indukcyjność przewodu koncentrycznego o długości *l*?

Zadanie 183. 400 ściśle nawiniętych zwojów tworzy cewkę o indukcyjności 8 mH. Jaki strumień magnetyczny przechodzi przez cewkę, kiedy płynie przez nią prąd o natężeniu $5 \cdot 10^{-3}$ A?

Zadanie 184. Jednowarstwowy solenoid wykonano z drutu miedzianego o średnicy 0,25 cm. Długość solenoidu wynosi 2 m, a średnica 4 cm. Jaka jest indukcyjność

przypadająca na jednostkę długości w pobliżu środka solenoidu? Założyć, że sąsiednie zwoje stykają się ze sobą oraz, że grubość izolacji można pominąć.

Zadanie 185. Dwie cewki o indukcyjności L_1 i L_2 połączone są szeregowo i odsunięte od siebie na dużą odległość. Wykazać, że indukcyjność wypadkowa obwodu wynosi $L = L_1 + L_2$.

Zadanie 186. Dwie cewki L_1 i L_2 połączone są równolegle i znajdują się w dużej odległości od siebie. Wykazać, że indukcyjność układu jest dana równaniem: $\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$.

Zadanie 187. Dwa długie równoległe przewody, których środki znajdują się w odległości d, przewodzą jednakowe prądy o przeciwnych kierunkach. Wykazać, pomijając strumień przechodzący przez przewody, że indukcyjność takiej pary przewodów dla odcinka o długości l wyraża się wzorem:

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} ln \frac{d-a}{a},$$

gdzie a oznacza promień przewodu.

Zadanie 188. W kołowej pętli o średnicy 5 cm płynie prąd 100 A. Jaka jest gęstość energii w środku pętli?

Zadanie 189. Jaka musi być wielkość jednorodnego pola elektrycznego, aby miało taka samą gęstość energii jak pole magnetyczne o indukcji 0,5 T.

Zadanie 190. Dwie krótkie cewki cylindryczne połączono w szereg. Cewki te są umieszczone blisko siebie wzdłuż tej samej osi. Wykazać, że wypadkowa indukcyjność takiego układu wynosi:

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M.$$

20. Obwody RC, LR, LC i RLC

Obwód RC

W obwodzie szeregowym RC, składającym się z kondensatora o pojemności C, opornika o oporze R i źródła ε płyną prądy zmienne, czyli takie których natężenia zmieniają się w czasie. W czasie t przez obwód przepływa ładunek między okładką kondensatora a biegunem baterii po każdej stronie kondensatora. Ten prąd zwiększa ładunek q na okładkach i różnicę potencjałów $U_C = \frac{q}{C}$ na kondensatorze do czasu, gdy $U_C = \varepsilon$, wówczas natężenie prądu równa się zero. Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa:

$$\varepsilon - IR - \frac{q}{C} = 0.$$

Wiedząc, że $I = \frac{dq}{dt}$, równanie powyższe można zapisać w postaci opisującej proces ładowania kondensatora:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon.$$

Rozwiązaniem tego równania jest:

$$q = C\varepsilon\left(1 - e^{-t/(RC)}\right).$$

Pochodna funkcji $q(t)$ względem czasu jest równa natężeniu prądu ładującego kondensator, zatem:

$$I = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)e^{-t/(RC)}.$$

Różnica potencjałów na kondensatorze podczas procesu ładowania wyraża się następującym wzorem:

$$U_C = \frac{q}{C} = \varepsilon\left(1 - e^{-t/(RC)}\right).$$

Iloczyn *RC* jest nazywany **pojemnościową stałą czasową obwodu** τ:

$$\tau = RC.$$

Naładowany kondensator do różnicy potencjałów $U_0 = \varepsilon$ można rozładować przez opornik *R*. Z drugiego prawa Kirchhoffa wynika, że

$$-IR - \frac{q}{C} = 0.$$

Równanie różniczkowe opisujące zależność *q*(*t*) dla procesu rozładowania kondensatora jest postaci:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest:

$$q = C\varepsilon\left(e^{-t/(RC)}\right) = CU_0\left(e^{-t/(RC)}\right) = q_0\left(e^{-t/(RC)}\right),$$

gdzie q_0 jest początkowym ładunkiem zgromadzonym na kondensatorze.

Pochodna funkcji $q(t)$ względem czasu jest równa natężeniu prądu:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right) e^{-t/(RC)}.$$

Podczas procesu rozładowania kondensatora wartość ładunku zgromadzonego na jego okładkach oraz natężenie prądu maleje wykładniczo w czasie z szybkością określoną przez stałą czasową τ.

Obwód LR

W obwodzie zamkniętym złożonym z oporu R i cewki indukcyjnej L przy włączaniu i wyłączaniu źródła SEM występuje opóźnienie w narastaniu lub znikaniu prądu. Obecność cewki powoduje pojawienie się w obwodzie SEM samoindukcji, która przeciwstawia się wzrostowi natężenia prądu. Zatem w oporniku prąd płynie pod wpływem różnicy potencjału dwóch SEM tak długo, jak istnieje SEM samoindukcji – natężenie prądu zmierza asymptotycznie do wartości $\frac{\varepsilon}{R}$.

Z drugiego prawa Kirchhoffa wynika, że

$$-IR - L\frac{dI}{dt} + \varepsilon = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right),$$

gdzie τ_L jest stałą czasową, która oznacza czas, w którym prąd płynący w obwodzie osiąga 1/e (37%) swojej końcowej wartości stacjonarnej.

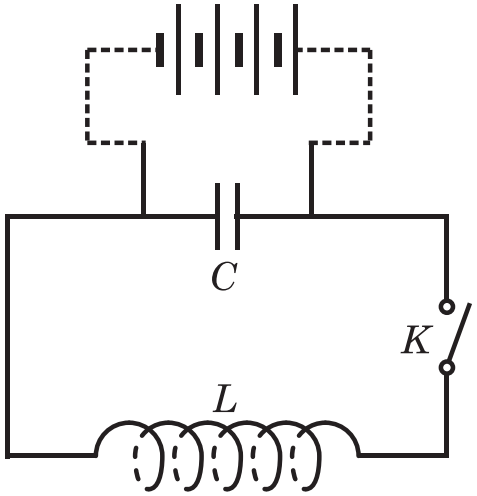
Przy braku źródła, natężenie prądu płynącego przez opornik będzie się zmniejszało. Wówczas z drugiego prawa Kirchhoffa:

$$-IR - L\frac{dI}{dt} = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(e^{-\frac{Rt}{L}}\right) = \frac{\varepsilon}{R}\left(e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right).$$

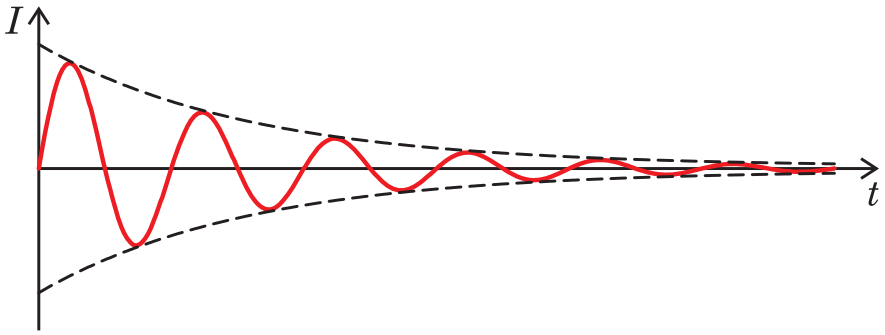
Obwód LC. Drgania elektromagnetyczne.



Ładujemy kondensator *C*. Po zamknięciu obwodu kluczem *K* w obwodzie płynie prąd elektryczny rozładowania i przepływa przez cewkę *L*. W cewce powstanie pole magnetyczne i zjawisko samoindukcji, które spowoduje zjawisko bezwładności prądu (Mechanika – ruch wahadła, ruch cieczy w naczyniach połączonych. Ciało wyprowadzone z położenia równowagi i swobodnie puszczone nie wraca do tego położenia, ale wskutek bezwładności przechodzi dalej i zaczyna wykonywać drgania wokół położenia równowagi). Podobne zjawisko jak w mechanice zachodzi w przypadku kondensatora. Prąd nie przestaje płynąć, gdyż siła elektromotoryczna samoindukcji podtrzymuje przepływ prądu w tym samym kierunku, powodując naładowanie kondensatora ładunkiem przeciwnego znaku. Gdy prąd maleje i staje się równy zero, wtedy różnica potencjałów między okładkami kondensatora osiąga wartość maksymalną. Następnie prąd zmienia kierunek, powodując wyładowania w kierunku przeciwnym i zjawisko powtarza się. W układzie występują drgania elektromagnetyczne o częstości:

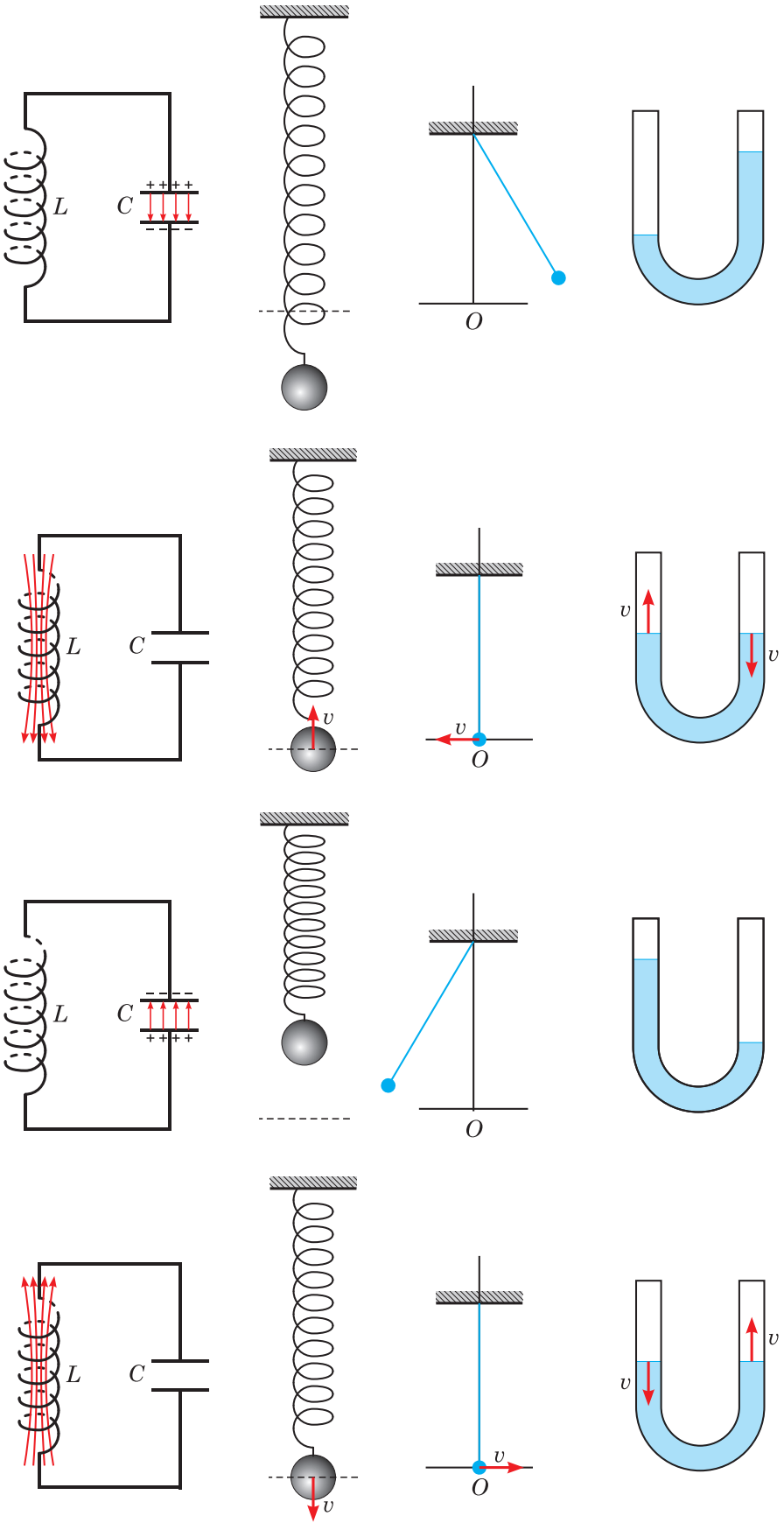
$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Natężenie prądu można przedstawić: $I = I_0 e^{-\beta t} sin\omega t$



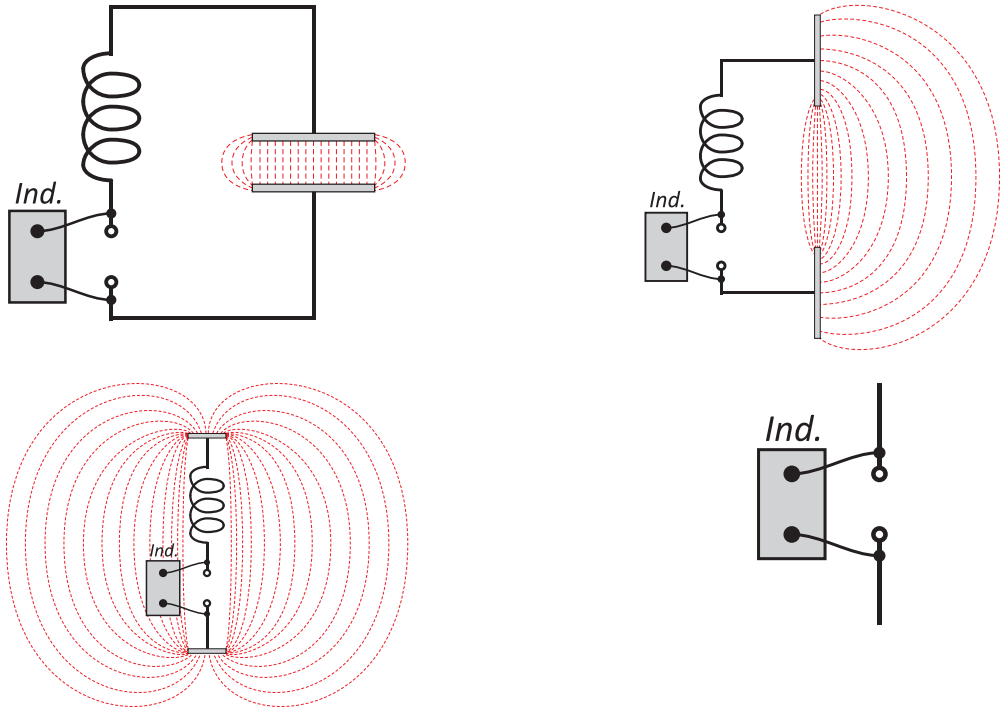
Powodem ustawania drgań w obwodzie jest wydzielanie się ciepła i fali elektromagnetycznej.

Porównanie drgań elektromagnetycznych z drganiami mechanicznymi.



Powstanie i rozchodzenie się fal elektromagnetycznych

W obwodzie drgającym zamkniętym pole elektryczne skupione jest prawie całkowicie między okładkami kondensatora. Gdy rozchylimy płyty kondensatora linie sił pola rozprzestrzenią się nieco dalej. Zwiększając dystans między płytami kondensatora jeszcze będziemy, coraz bardziej zwiększać zasięg pola elektrycznego. Rozsuwanie płyt kondensatora powoduje nie tylko zwiększenie zasięgu pola elektrycznego, ale również wpływa na okres drgań ($T = 2\pi\sqrt{LC}$).



Okres drgań będzie się zmieszał a częstotliwość zwiększała. Gdy usuniemy płyty i zwojnicę, częstotliwość drgań zwiększy się jeszcze bardziej. Obwody tego typu nazywamy otwartymi. Z pomiędzy okładek rozsuniętego kondensatora wydobywa się fala elektromagnetyczna. Jeżeli do takiego obwodu nie będzie dostarczana energia z zewnątrz (z induktora), to przestanie on być źródłem rozprzestrzeniającego się pola elektrycznego.

Jak widać obwód drgający traci energię (część na ciepło a część na powstanie fali elektromagnetycznej). Amplituda drgań nie będzie maleć, jeżeli będziemy dostarczać obwodowi w ciągu każdego okresu drgań tyle energii ile ten obwód traci. W celu otrzymania w generatorze drgań niegasnących stosuje się np.: triody (lampa posiadająca trzy elektrody: katodę, anodę i siatkę umieszczoną pomiędzy nimi).

Drgania elektryczne wywołane w obwodzie drgającym LC, stanowią prądy zmienne o bardzo dużej częstotliwości. Ponieważ przy takich prądach strumień pola magnetycznego bardzo szybko powstaje i ginie, jego działanie indukcyjne jest bardzo silne. Największy prąd indukcyjny popłynie w obwodzie, który ma taki sam okres drgań własnych jak obwód nadający drgania. Rezonans elektryczny:

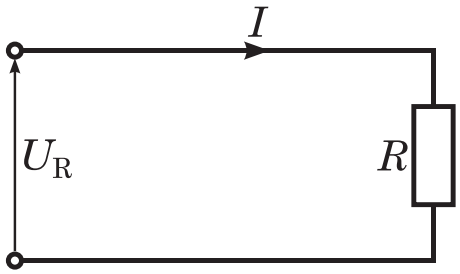
$$2\pi\sqrt{L_1C_1} = 2\pi\sqrt{L_2C_2}$$

Fale elektromagnetyczne podlegają wszystkim zasadom, które dotyczą zjawisk falowych (omówione w innej części skryptu).

Obwód RLC

Zanim omówimy obwód RLC rozważymy kolejno poszczególne jego elementy:

Układ elektryczny o rezystancji R



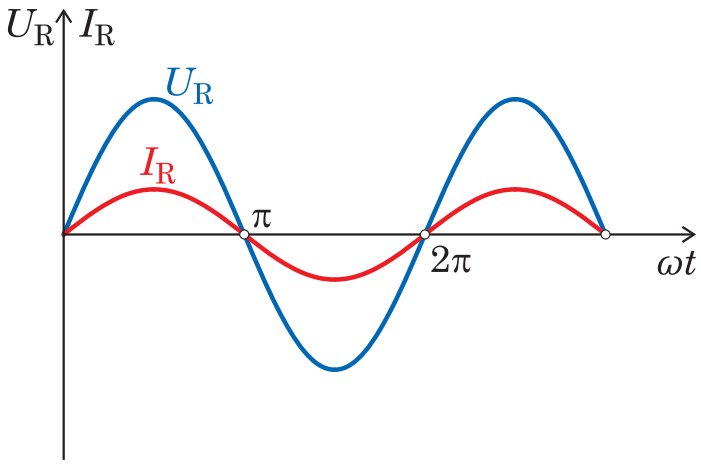
Do zacisków opornika przyłożono napięcie sinusoidalne. $U_R = U_0 sin\omega t$

$$I_R = \frac{U_0}{R} = I_0 sin\omega t$$

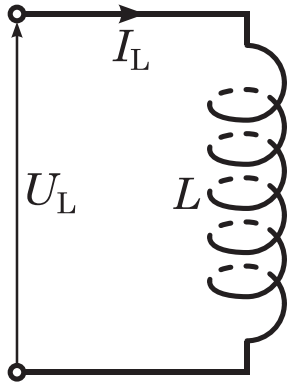
Amplituda prądu: $I_0 = \frac{U_0}{R}$

Podstawiając: $I_0 = \sqrt{2}I_{sk}$, $U_0 = \sqrt{2}U_{sk}$ otrzymamy: $I_{sk} = \frac{U_{sk}}{R}$

W obwodzie z idealnym opornikiem napięcie i prąd są w fazie.



Układ elektryczny o indukcyjności L



Na skutek zmienności prądu w cewce indukuje się siła elektromotoryczna:

$$\varepsilon = -L\frac{dI_L}{dt}$$

Zgodnie z Prawem Kirchhoffa, suma napięć na oczku równa jest zeru:

$$U_L - L\frac{dI_L}{dt} = 0$$

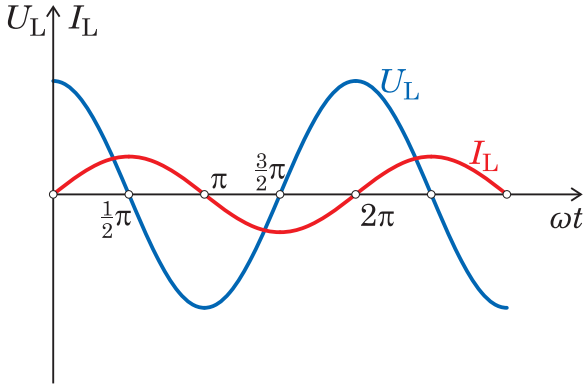
Przez cewkę płynie prąd sinusoidalnie zmienny: $I_L = I_0 sin\omega t$

Otrzymujemy: $U_L = \omega L I_0\, cos\omega t = U_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

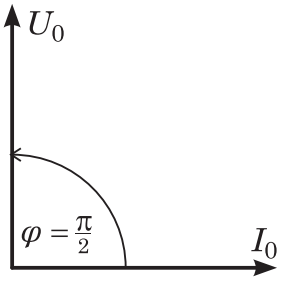
$$U_0 = I_0 \omega L$$

$$U_{sk} = I_{sk} \omega L$$

Wartość ωL nazywamy oporem indukcyjnym $R_L = \omega L$.

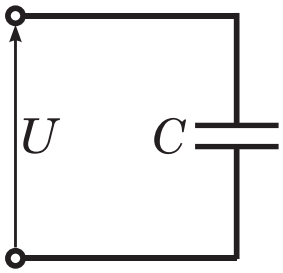


Wykres wektorowy napięcia i natężenia prądu sinusoidalnie zmiennego dla dwójnika o idealnej indukcyjności.





Układ elektryczny o pojemności C



Idealny kondensator został podłączony pod napięcie: $U_c = U_0 sin\omega t$.

Każdej zmianie napięcia towarzyszy zmiana ładunku na okładkach kondensatora:

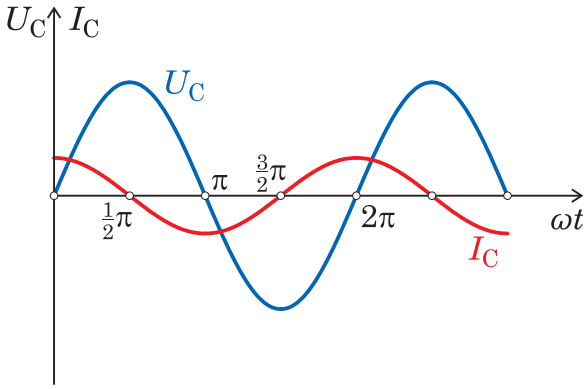
$$\Delta Q = C \cdot \Delta U$$

$$I_C = C\frac{dU_c}{dt}$$

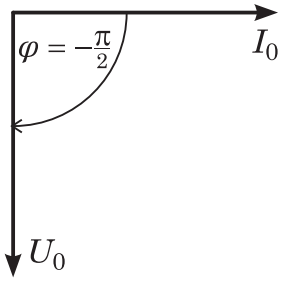
$$I_C = \omega C U_0 cos\omega t = I_0 cos\omega t = I_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\frac{1}{\omega C}}$$

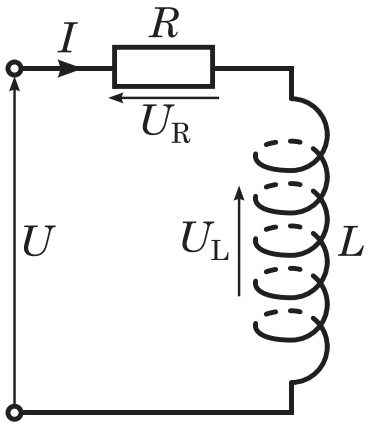
Wartość $\frac{1}{\omega C}$ nazywamy oporem pojemnościowym: $R_c = \frac{1}{\omega C}$



Wykres wektorowy napięcia i natężenia prądu sinusoidalnie zmiennego dla dwójnika o pojemności C.



Układ elektryczny szeregowy RL



Przez idealny opornik i idealną cewkę płynie prąd sinusoidalny $I = I_0 sin\omega t$. Zgodnie z II prawem Kirchhoffa otrzymujemy:

$$U = U_R + U_L = U_{0R} sin\omega t + U_{0L} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

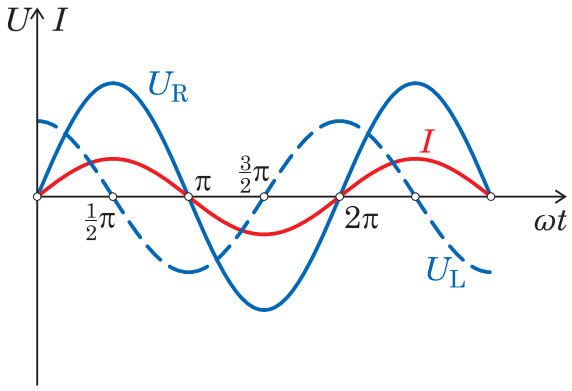
Z – zawada-opór wypadkowy dwójnika szeregowego RL.

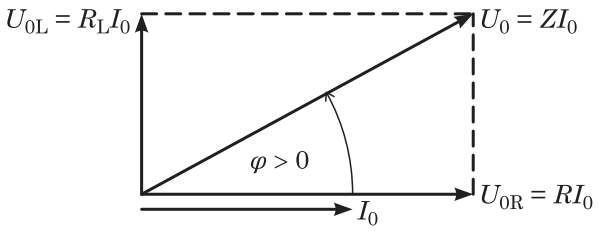
$$Z = \sqrt{R^2 + R_L^2}$$

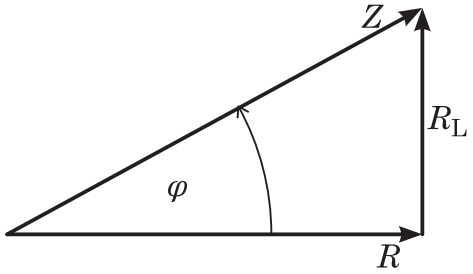
Kąt przesunięcia fazowego między natężeniem prądu a napięciem: $tg\varphi = \frac{R_L}{R} = \frac{\omega L}{R}$

Dodawanie wartości chwilowych napięć zgodnie z II prawem Kirchhoffa odpowiada geometryczne dodawanie wektorów odwzorowujących poszczególne napięcia:

$$U_0 = \sqrt{U_{R0}^2 + U_{L0}^2}$$







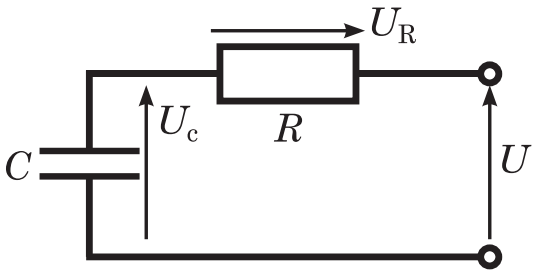
Z rysunku wynikają następujące relacje:

$$R = Z\cos\varphi$$

$$R_L = Z\sin\varphi$$

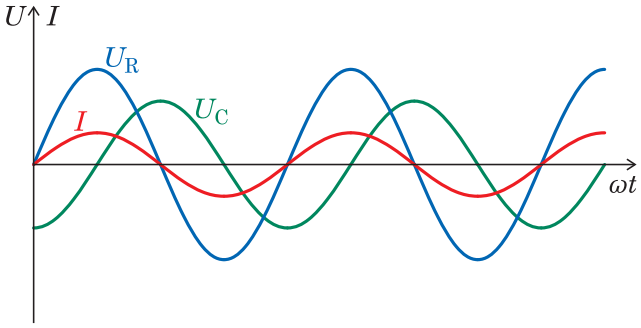
Dla $\varphi = 0$ dwójnik RL sprowadza się do dwójnika idealnego oporu, a dla $\varphi = \pi/2$ do dwójnika idealnego L.

Układ elektryczny szeregowy RC

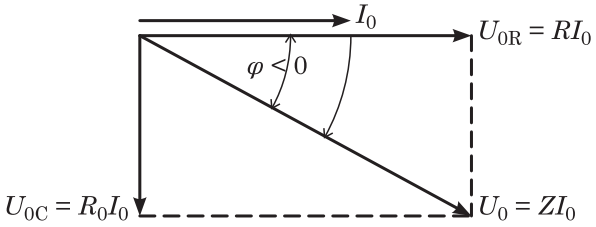


Sinusoidalne napięcie płynie przez idealny opornik i idealny kondensator $I = I_0 sin\omega t$. Zgodnie z prawem Kirchhoffa:

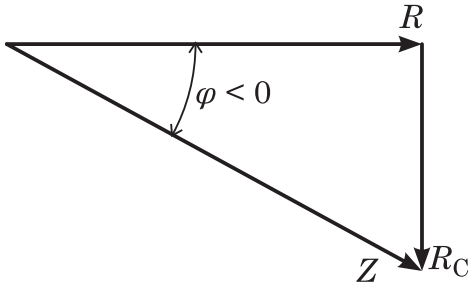
$$U = U_R + U_C = U_{0R} sin\omega t + U_{0C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U_0 \sin(\omega t - \varphi)$$



Wykres wektorowy:



Trójkąt oporów:



Z trójkąta napięć otrzymujemy: $U_0 = \sqrt{U_{0R}^2 + U_{0C}^2}$

Z trójkąta oporów otrzymujemy: $Z = \sqrt{R^2 + R_C^2}$

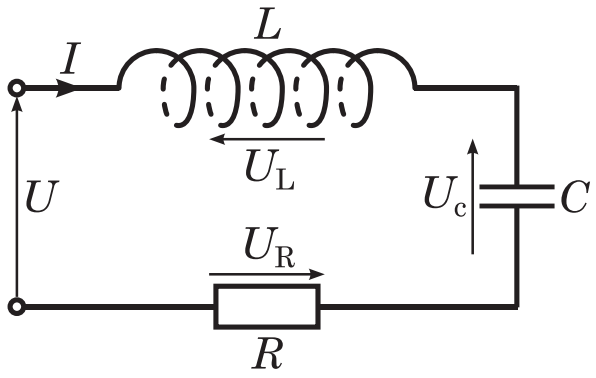
$$R = Zcos\varphi$$

$$R_C = -Zsin\varphi$$

$$tg\varphi = -\frac{R_C}{R}$$

Dla $\varphi = 0$ – dwójnik RC sprowadza się do dwójnika idealnego oporu a dla $\varphi = -\pi/2$ do dwójnika idealnego C.

Układ elektryczny RLC. Rezonans napięć w obwodzie RLC.



Przez opornik, cewkę i kondensator płynie sinusoidalny prąd: $I = U_R + U_L + U_C$.

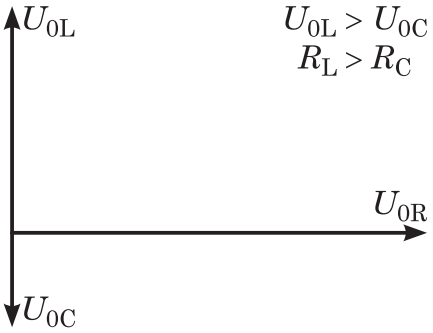
Napięcia na poszczególnych elementach wynoszą:

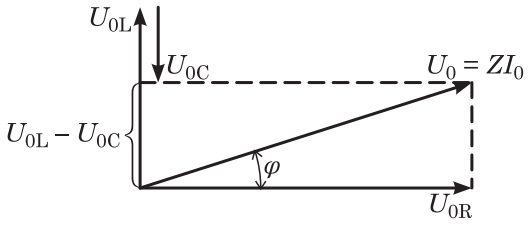
$$U_R = U_{0R}sin\omega t$$

$$U_L = U_{0L}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$U_C = U_{0C}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Napięcie wypadkowe wynosi: $U = U_0\sin(\omega t + \varphi)$.

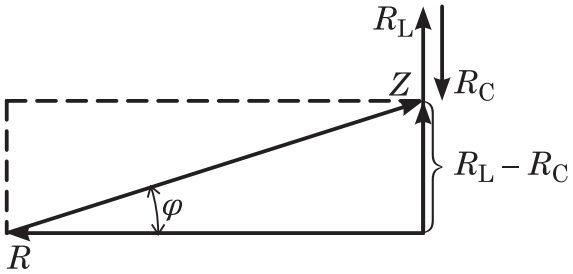




Z wektorowego wykresu napięć wynika:

$$U_0 = \sqrt{U_{0R}^2 + (U_{0L} - U_{0C})^2} = \sqrt{(I_0R)^2 + (I_0R_L + I_0R_C)^2} = I_0\sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

Z trójkąta oporów, gdy $R_L > R_C$, $\varphi > 0$, (obwód ma charakter indukcyjny) otrzymujemy:

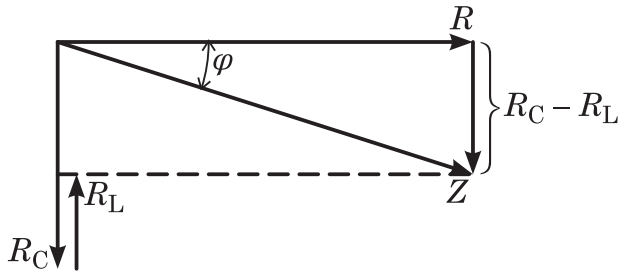


$$R = Z\cos\varphi$$

$$R_L - R_C = Z\sin\varphi$$

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

a gdy $R_L < R_C$, $\varphi < 0$ (obwód ma charakter pojemnościowy):



$$Z = \sqrt{R^2 + (R_C - R_L)^2}$$

Przypadek $\varphi = 0$ nazywamy rezonansem napięć. Dla rezonansu napięć wartości napięć na kondensatorze i cewce są sobie równe i przesunięte względem siebie o kąt π. Napięcia te znoszą się.

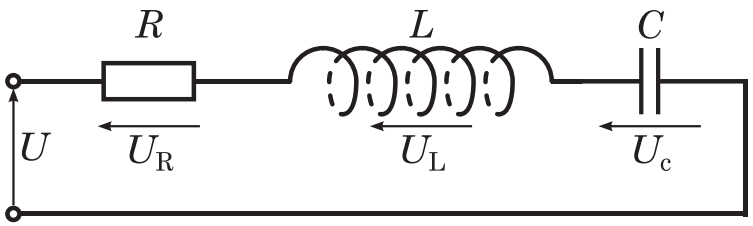
Rezonans napięć w obwodzie RLC.

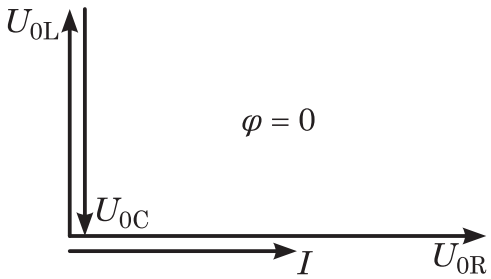
Rezonans przedstawia taki stan pracy układu RLC, w którym opor stawiamy prądowi zmiennemu jest minimalny. W stanie rezonansu napięcie i prąd na zaciskach rozpatrywanego obwodu są zgodne w fazie. Częstotliwość przy której opór pojemnościowy równy jest oporowi indukcyjnemu nazywamy częstotliwością rezonansową f_r.

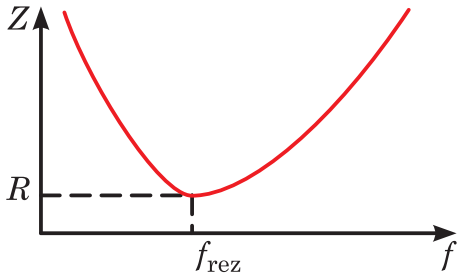
$$R_{L=}R_C$$

$$2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C}$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$







Zawada ma wartość minimalną $Z = R$.

W miarę zbliżania się do częstotliwości rezonansowej, zawada obwodu maleje do wartości R, prąd zwiększa się do maksimum, kąt fazowy zbliża się do zera.

Równania Maxwella (1873r.)

Elektrodynamika jest teorią pola. Fundamentalne pola:

$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$- natężenie pola elektrycznego,

$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$- indukcja pola magnetycznego

Za ich pomocą określa się:

$\vec{D} = \vec{D}(\vec{r}, t)$- indukcja pola elektrycznego

$\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t)$- natężenie pola magnetycznego

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$$

$$\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} = c$$

gdzie:

ε – przenikalność dielektryczna ośrodka materialnego,
ε_0 – przenikalność dielektryczna próżni,
μ – przenikalność magnetyczna ośrodka materialnego,
μ_0 – przenikalność magnetyczna próżni.

Nazwa	Równanie (postać całkowa i różniczkowa)	Dotyczy	Fakty doświadczalne
Prawo Gaussa dla elektryczności	$\varepsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{S} = q$ $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$ *Źródłami pola elektrycznego są ładunki. Jeżeli nie ma ładunków elektrycznych to linie pola są liniami zamkniętymi.*	Ładunek i pole elektryczne.	Ładunki jednoimienne odpychają się a ładunki różnoimienne przyciągają się z siłą odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi. Ładunek umieszczony na izolowanym przewodniku przemieszcza się w kierunku jego powierzchni zewnętrznej.
Prawo Gaussa dla magnetyzmu	$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$ $div\vec{B} = 0$ *Nie istnieją w przyrodzie ładunki magnetyczne. Linie indukcji pola magnetycznego są liniami zamkniętymi.*	Pole magnetyczne	Dotychczas nie stwierdzono istnienia odosobnionego bieguna magnetycznego.
Prawo indukcji Faradaya	$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ $rot\ \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ *Zmienne pole magnetyczne wytwarza wirowe pole elektryczne, które może wywoływać prąd elektryczny.* *Gdy brak pola magnetycznego, bądź jest stałe, to istniejące pole elektryczne jest bezwirowe.*	Efekt elektryczny zmieniającego się pola magnetycznego	Sztabka magnetyczna przesuwana przez zamknięty obwód powoduje powstanie prądu w tym obwodzie.
Prawo Ampere'a (rozszerzone przez Maxwella)	$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \left(\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + i\right)$ $rot\vec{B} = \mu\mu_0\vec{j} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$ *Prąd elektryczny lub zmienne pole elektryczne wytwarza wirowe pole magnetyczne.*	Efekt magnetyczny zmieniającego się pola elektrycznego lub prądu	Prędkość światła można wyliczyć z pomiarów czysto elektromagnetycznych. Prąd płynący w przewodniku wytwarza wokół siebie pole magnetyczne.

gdzie:

$\rho = \rho(\vec{r}, t)$-gęstość ładunków

$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$- gęstość prądu.

$\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ ma wymiar prądu, mimo, że nie mamy tutaj do czynienia z ruchem ładunków, to ten człon nazywa się **prądem przesunięcia**. Pole magnetyczne może być wytworzone przez:

a) prąd przewodzenia
b) prąd przesunięcia.

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (i_p + i)$$

Koncepcja prądu przesunięcia pozwala na utrzymanie zasady ciągłości prądu.

Uwaga przypomnienie:

$$grad\varphi = \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \nabla \cdot \varphi$$

Wektorowy operator *nabla* ∇ może działać na dowolne pole wektorowe.

$$\nabla \cdot \vec{h} = div\, \vec{h}$$

$$\nabla \times \vec{h} = rot\, \vec{h}$$

$$\vec{h}(x,y,z) = h_x(x,y,z)\vec{\imath} + h_y(x,y,z)\vec{\jmath} + h_z(x,y,z)\vec{k}$$

$$\nabla \cdot \vec{h} = (\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot (\vec{\imath}h_x + \vec{\jmath}h_y + \vec{k}h_z)$$

$$\nabla \times \vec{h} = (\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}) \times (\vec{\imath}h_x + \vec{\jmath}h_y + \vec{k}h_z)$$

$$\nabla \times \vec{h} = rot\, \vec{h} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z}\right) + \vec{\jmath}\left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}\right)$$

$\Delta = \nabla\nabla = \nabla^2$- operator Laplace'a

$$\Delta = \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

Zmienne w czasie pole magnetyczne indukuje zmienne (wirowe) pole elektryczne.

W przypadku dynamicznym mówimy o polu elektromagnetycznym.

Równania Maxwella przewidują istnienie fal elektromagnetycznych o prędkości rozchodzenia się w próżni danej równaniem:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Na podstawie równań Maxwella wnioskujemy:

- wszystkie fale mają taką samą naturę
- wszystkie fale mają taką samą prędkość rozchodzenia się
- różnią się częstościami i długościami fal.

Źródłem fal elektromagnetycznych jest Słońce, ale również na Ziemi znajdują się źródła promieniowania elektromagnetycznego: radary, telewizory, radia, silniki.

Równanie falowe dla fali elektromagnetycznej rozchodzącej się wzdłuż osi 0X

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$$

gdzie *n* jest współczynnikiem załamania ośrodka.

ZADANIA

Zadanie 191. Po jakim czasie (przyjmując za jednostkę stałą czasową) kondensator w obwodzie RC uzyska ładunek wynoszący 1% wartości ładunku w stanie równowagi?

Zadanie 192. Opornik o oporze 10000 Ω i kondensator połączono szeregowo i przyłożono nagle napięcie 10 V. Jeżeli napięcie na kondensatorze wzrośnie do 5 V w czasie 1 μs to jak jest pojemność kondensatora?

Zadanie 193. Kondensator o pojemności C = 1 μF i zmagazynowanej początkowo energii U_0 = 0,5 J rozładowano przez opór $R = 1 \cdot 10^6\ \Omega$.

a) Jaki jest początkowy ładunek kondensatora?
b) Jaki prąd płynie przez opornik, gdy zaczyna się rozładowanie
c) Wyrazić V_C, napięcie na kondensatorze i V_R napięcie na oporniku jako funkcje czasu.

Zadanie 194. Prąd płynący w obwodzie LR osiąga 1/3 swej wartości stacjonarnej po upływie 5 s. Jaka jest indukcyjna stała czasowa obwodu?

Zadanie 195. Solenoid o indukcyjności $1{,}0 \cdot 10^{-6}$ H połączono szeregowo z oporem $1{,}0 \cdot 10^3\ \Omega$. Po jakim czasie od podłączenia baterii 10 V prąd osiągnie 80% swej końcowej wartości? Jaką wartość osiągnie prąd płynący przez opór *R* po upływie czasu równego stałej czasowej?

Zadanie 196. Kondensator o pojemności 10 μF naładowany jest do potencjału 50 V. W pewnej chwili baterie ładującą odłączamy cewkę o indukcyjności 10 mH. W tak utworzonym obwodzie LC pojawiają się drgania. Jaki jest maksymalny prąd w cewce? Zakładamy, że w obwodzie nie ma żadnego oporu.

Zadanie 197. Jaki ładunek wyrażony jako funkcja ładunku maksymalnego, jest zgromadzony na kondensatorze drgającego obwodu LC, gdy energia jest równo rozłożona między pole elektryczne i magnetyczne? Ile czasu upłynie od chwili osiągnięcia tego stanu przy założeniu, że w chwili początkowej kondensator był całkowicie naładowany? Przyjmijmy, że L = 10 mH, a C = 1μF.

Zadanie 198. Obwód RLC.

a) znaleźć wyrażenia na wielkość $q(t)$ dla pojedynczego obwodu zamkniętego zawierającego opór R, indukcyjność L i pojemność C.
b) Po jakim czasie nastąpi zmniejszenie amplitudy oscylacji do połowy, jeżeli L = 10 mH, C = 1 μF, R = 0,1 Ω.

Zadanie 199. Znaleźć pojemność obwodu LC, jeżeli maksymalny ładunek kondensatora wynosi 1,0 μC i energia całkowita wynosi $1{,}4 \cdot 10^{-4}$ J.

Zadanie 200. Indukcyjność 1,5 mH w obwodzie LC magazynuje maksymalną energię $1{,}0 \cdot 10^{-5}$ J. Ile wynosi szczytowe natężenie prądu?

Zadanie 201. W drgającym obwodzie LC L = 1,0 mH, C = 4,0 μF i maksymalny ładunek na kondensatorze wynosi 3,0 μC. Znaleźć maksymalne natężenie prądu.

Zadanie 202. Szczytowe napięcie drgającego obwodu LC składającego się z kondensatora o pojemności 1 nF i cewki o indukcyjności 3,0 mH wynosi 3,0 V. Ile wynosi maksymalne naładowanie kondensatora? Jakie jest szczytowe natężenie w obwodzie? Ile wynosi maksymalna energia zmagazynowana w polu magnetycznym cewki?

Zadanie 203. Jaki ładunek istnieje w drgającym obwodzie LC biorąc pod uwagę maksymalne naładowanie kondensatora:

a) gdy energia jest rozmieszczona równomiernie między polem elektrycznym a magnetycznym?
b) Aby ten warunek zaistniał, jaki ułamek okresu musi minąć od chwili, gdy kondensator był całkowicie naładowany?

Zadanie 204. W pewnej chwili w drgającym obwodzie LC, trzy czwarte całkowitej energii zostaje zmagazynowane w polu magnetycznym cewki.

a) Biorąc pod uwagę maksymalne naładowanie kondensatora znaleźć ładunek kondensatora jaki wtedy jest zgromadzony?
b) Biorąc pod uwagę maksymalne natężenie prądu, ile wtedy wynosi natężenie w cewce?

Zadanie 205. Jak można pobudzić indukcyjność 1,0 mH do drgań z częstotliwością 1 MHz?

Zadanie 206. Mamy indukcyjność 10 mH i dwa kondensatory o pojemnościach 50 μF i 2 μF.

a) znaleźć cztery rezonansowe częstotliwości, które można otrzymać łącząc te elementy na różne sposoby.
b) czy istnieją jeszcze jakieś częstotliwości oprócz tych czterech?

Zadanie 207. Obwód LC ma indukcyjność L = 3 mH i pojemność C = 10 μF.

a) obliczyć częstotliwość kątową ω drgań,
b) znaleźć okres drgań T,
c) w czasie t = 0 ładunek kondensatora wynosi 200 μC, a natężenie prądu wynosi 0. Naszkicuj ładunek kondensatora jako funkcje czasu.

Zadanie 208. Nieskończenie długą nić znajdującą się w próżni naładowano ze stałą gęstością ładunku ρ. Określić natężenie pola elektrycznego i potencjał jako funkcję odległości *r* do nici.

Zadanie 209. Przestrzeń wypełniona jest ładunkiem o gęstości ρ zmieniającej się według wzoru $\rho = \rho_0/R$, gdzie ρ_0 – stała, R – odległość od początku układu współrzędnych. Określić wektor natężenia pola jako funkcję wektora położenia.

Zadanie 210. Znaleźć indukcje pola magnetycznego wewnątrz i zewnątrz nieskończenie długiego przewodnika o promieniu *R*, w którym płynie jednorodną struga stały prąd o natężeniu *I* jako funkcję odległości *r* od środka przewodnika.

Zadanie 211. Wyznacz wartość indukcji magnetycznej $\vec{B}$ w środku obwodu kołowego o promieniu *r*, w którym płynie prąd o natężeniu *I*.

Zadanie 212. Wyprowadź z prawa Faradaya wzór na siłę elektromotoryczną indukowaną w pręcie o długości l, obracającym się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ ze stałą prędkością kątową ω wokół osi przechodzącej przez jeden z końców pręta i prostopadłej do niego. Płaszczyzna obrotu jest prostopadła do $\vec{B}$.

Zadanie 213.Znaleźć natężenie pola magnetycznego w odległości *r* od nieskończenie długiego przewodnika prostoliniowego, przez który płynie prąd o natężeniu *I.*

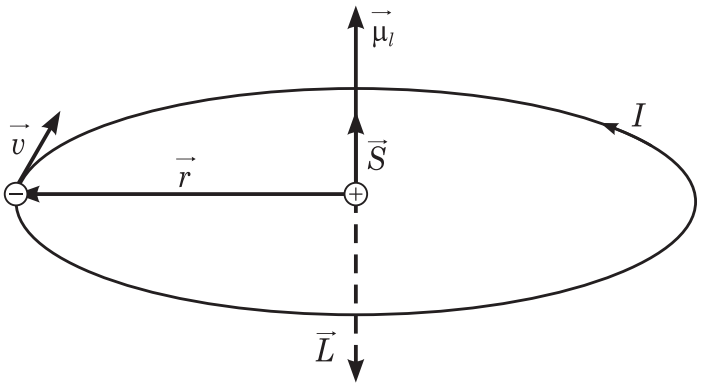
Zadanie 214. Załóżmy, że indukcja pola magnetycznego wewnątrz długiego przewodnika o promieniu a wzrasta proporcjonalnie do czasu $\vec{B} = \beta t$, natomiast na zewnątrz przewodnika $\vec{B} = 0$. Jakie pole elektryczne powstanie w przestrzeni wokół pręta? Zakładamy, że pole $\vec{B}$ jest jednorodne wewnątrz przewodnika i równoległe do jego osi symetrii.

Zadanie 215. Zinterpretuj prąd przesunięcia oraz udowodnij, że jest on równy prądowi rzeczywistych ładunków płynących w obwodzie. Pokaż, że prąd przesunięcia w kondensatorze o równoległych okładkach możemy zapisać w sposób następujący: $i_p = C\frac{dV}{dt}$.

Rozdział VI Magnetyzm materii

Najprostszą strukturą magnetyczną jest dipol magnetyczny. W przyrodzie nie istnieją monopole magnetyczne, co wynika z **prawa Gaussa**:$\Phi_B = \oint \vec{B} d\vec{S} = 0$. Wypadkowy strumień magnetyczny przez dowolną zamkniętą powierzchnię jest równy zeru.

Moment magnetyczny elektronu w atomie:



a. orbitalny moment magnetyczny

$$\vec{\mu}_l = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}$$

$\vec{L}$- moment pędu elektronu

Wartość orbitalnego momentu magnetycznego

$$\mu_l = \frac{e}{T}\pi r^2$$

b. własny moment magnetyczny elektronu

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}_s$$

$\vec{L}_s$- własny moment pędu elektronu – spin elektronu.

Pod względem magnetycznym substancje dzielimy na ***para*** i ***diamagnetyki. Ferromagnetyk*** jest szczególnym przypadkiem paramagnetyka.

Atom, który poza polem magnetycznym nie wykazuje żadnych właściwości magnetycznych jest atomem diamagnetyka (bizmut, cynk, miedź, ołów, srebro, gazy szlachetne). Taki atom ma sparowaną liczbę elektronów, momenty magnetyczne w parach znoszą się i atom nie wykazuje, bez obecności zewnętrznego pola magnetycznego, żadnych właściwości magnetycznych.

Atom, który poza polem magnetycznym zewnętrznym wykazuje właściwości magnetyczne nazywamy atomem paramagnetyka (cyna, magnez, chrom, aluminium). Taki atom ma liczbę elektronów i momenty magnetyczne poszczególnych elektronów nie znoszą się.

Magnesowanie polega na porządkowaniu elementarnych dipoli magnetycznych istniejących w ferromagnetyku. W ferromagnetyku nienamagnesowanych dipole magnetyczne są nieuporządkowane.

Wektor magnetyzacji.

$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{V}$$

gdzie:

V – objętość ciała,
$\vec{m}_i$ – moment magnetyczny *i*-tej cząsteczki,

Pole magnetyczne w magnetyku:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{M} = \kappa \vec{B}_0$$

gdzie:

$\vec{B}$ – wektor indukcji pola magnetycznego wewnątrz ciała,
$\vec{B}_0$ – wektor indukcji zewnętrznego pola magnetycznego,
μ_0 – przenikalność magnetyczna próżni,
κ – podatność magnetyczna
$\vec{B}'$ – wektor indukcji dodatkowego pola magnetycznego.

Względna przenikalność magnetyczna

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \kappa \vec{B}_0 = \mu \vec{B}_0$$

gdzie:

$\vec{B}$ – wektor indukcji pola magnetycznego w ośrodku.
μ – względna przenikalność magnetyczna: $\mu = 1 + \kappa$

Natężenie pola magnetycznego:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}$$

Stosunek indukcji pola magnetycznego solenoidu, wypełnionego substancją do indukcji pola solenoidu pustego nazywamy stałą przenikalności magnetycznej:

$$\mu = \frac{B_n}{B_p}$$

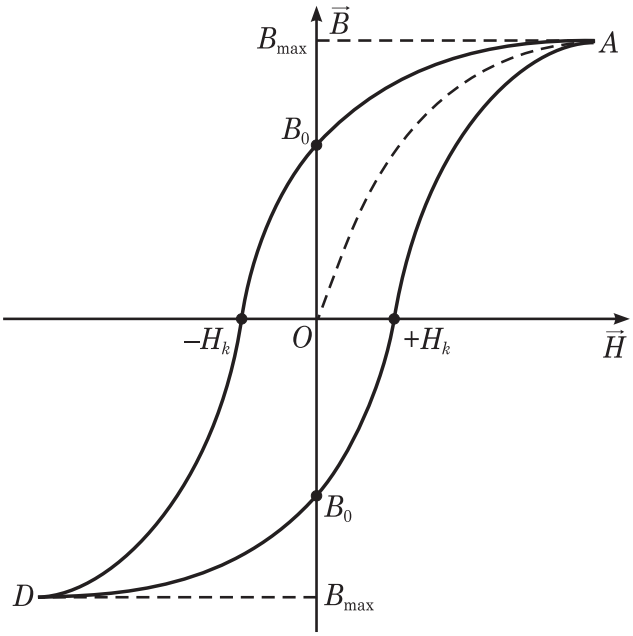
Dla ferromagnetyków liczba ta jest duża (tysiące) i zależy od natężenia prądu w solenoidzie. Dla paramagnetyków μ jest nieco większe od 1, a dla diamagnetyków nieco mniejsze od 1.

$(\mu - 1)\vec{B}_p$- **wektor magnetyzacji.** Jednostka wektora magnetyzacji jest $Tesla = \frac{N}{A \cdot m}$

Ferromagnetyzm nie jest właściwością pojedynczych atomów jak para czy diamagnetyzm. Jest właściwością kryształów. Już w stanie naturalnym całe obszary ferromagnetyka są namagnesowane. W kryształach ferromagnetyka następuje sprzężenie magnetycznych momentów atomów w sposób sztywno-równoległy. Obszary namagnesowane nazywamy domenami. Pierwiastki ferromagnetyczne: żelazo, kobalt, nikiel, gadolin, dysproz.

Krzywa namagnesowania. Pętla histerezy.

Krzywe namagnesowania dla materiałów ferromagnetycznych nie wracają do punktu początkowego, gdy najpierw zwiększamy a kolejno zmniejszamy wartość i kierunek zewnętrznego pola magnetycznego. Brak powtarzalności nazywamy **histerezą**, a krzywą na rysunku pętlą histerezy.



Pole pętli histerezy jest proporcjonalne do energii rozpraszanej w postaci ciepła, podczas namagnesowanie i przemagnesowania rdzenia z ferromagnetyka.

Histerezę można wyjaśnić biorąc pod uwagę pojęcie domen magnetycznych. Ruchy domen i zmiany ich ustawienia nie są całkowicie odwracalne. Ta pamięć materiałów magnetycznych jest podstawową właściwością wykorzystywaną do magnetycznego gromadzenia informacji (dyski komputerowe).

Dla każdego ferromagnetyka istnieje taka temperatura zwana temperaturą Curie, powyżej której ferromagnetyk staje się zwykłym paramagnetykiem (np.: dla żelaza wynosi 1043 K).

Prawo Curie:

$$\kappa = \frac{const}{T}$$

Prawo Curie-Weisa:

$$\kappa = \frac{const}{T - T_c}$$

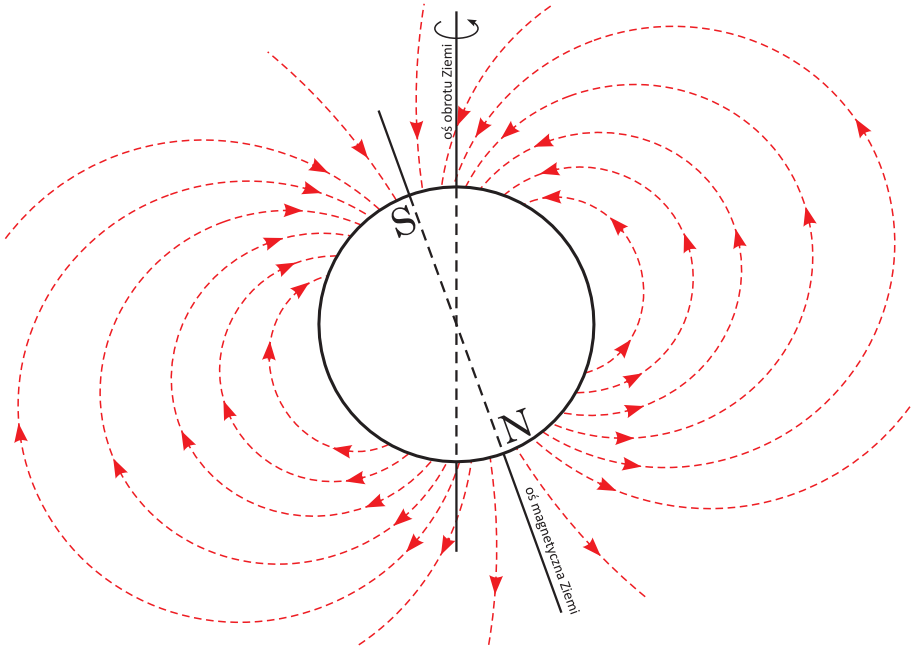
T_c – temperatura Curie

Magnetyzm jądrowy

Wiele jąder ma dipolowe momenty magnetyczne, co powoduje, że próbka materii może wykazywać pewne własności magnetyczne. Momenty jądrowe są o kilka rzędów wielkości mniejsze od momentów związanych z ruchem elektronów w atomach lub jonach. Zjawisko to obserwuje się za pomocą jądrowego rezonansu magnetycznego.

Magnetyzm Ziemi

Ziemia jest wielkim magnesem. W północnej części Kanady linie sił pola magnetycznego wchodzą prostopadle do powierzchni Ziemi. Tam leży biegun magnetyczny południowy. Natomiast na południe od Australii linie sił pola magnetycznego wychodzą prostopadle do powierzchni Ziemi i tam znajduje się północny biegun magnetyczny.
Nachyleniem magnetycznym lub *inklinacją* nazywamy kąt, który linie sił pola magnetycznego tworzą z poziomem danego miejsca.
Deklinacją (zboczeniem magnetycznym) nazywamy kąt, jaki tworzy północny biegun igły magnetycznej z południkiem geograficznym.
Powodem istnienia pola Magnetycznego Ziemi jest istnienie silnych prądów elektrycznych wewnątrz Ziemi.



Nadprzewodnictwo – stan materiału polegający na zerowym oporze, jest osiągany w niektórych materiałach w niskiej temperaturze.

Nadprzewodnictwo zostało wykryte w 1911 przez Kamerlingha Onnesa. Jest to zjawisko kwantowe, niemożliwe do wyjaśnienia na gruncie fizyki klasycznej. Poza zerową rezystancją inną ważną cechą nadprzewodników jest wypychanie ze swej objętości pola magnetycznego (**efekt Meissnera**).

Nadprzewodnictwo jest obserwowane w różnorodnych materiałach: cynie, rtęci, ołowiu, stopach, ceramikach tlenkowych, materiałach organicznych.

Cechą charakteryzującą nadprzewodniki jest spadek do zera ich oporu elektrycznego poniżej pewnej temperatury, nazywanej temperaturą krytyczną. Temperatura ta zależy od rodzaju materiału, a także od czynników zewnętrznych – ciśnienia i pola magnetycznego. Substancjami o najniższej rezystywności w temperaturze pokojowej są srebro i miedź. Innym charakterystycznym dla nadprzewodników efektem jest wypychanie z materiału pola magnetycznego (efekt Meissnera, w nadprzewodnikach pierwszego rodzaju), lub skupianie pola magnetycznego w „wiry” (w nadprzewodnikach drugiego rodzaju).

Postęp nauki przyczynia się do poznawania substancji, które umożliwiają bezstratny przepływ prądu w coraz wyższych temperaturach. Jest to jednak temperatura zbyt niska dla praktycznych zastosowań i wykorzystanie nadprzewodników jest nadal nieopłacalne w masowych zastosowaniach.

Przykłady zastosowań:

- nadprzewodnikowe elektromagnesy w aparatach NMR, w których generują bardzo silne pola magnetyczne przy niewielkim poborze mocy,
- w przemysłowych generatorach plazmy oraz w akceleratorach cząstek elementarnych,
- nadprzewodnikowe zasobniki energii.

ZADANIA

Zadanie 216. Jaka jest częstość precesji protonu w polu magnetycznym o indukcji 0,5 T?

Zadanie 217. Znaleźć $\vec{H}$ w pierścieniu Rowlanda stosując prawo Ampere'a.

Zadanie 218. Dipolowy moment jednozwojowej pętli wynosi $2 \cdot 10^{-4}$ Am^2. Jakie jest pole magnetyczne na osi dipola 8 cm od pętli.

Zadanie 219. Spinowy moment pędu elektronu wynosi $0{,}53 \cdot 10^{-34}$ J·s, a moment magnetyczny $9{,}3 \cdot 10^{-24}$ A·m^2. Porównać oba momenty μ/L oraz e/m dla elektronu.

Zadanie 220. Dipolowy moment magnetyczny Ziemi wynosi $8 \cdot 10^{22}$ A·m^2.

a) Jaki prąd powinien płynąć przez pojedynczy zwój, aby wytworzyć taki sam moment dipolowy?
b) Czy w ten sposób można usunąć Ziemskie pole magnetyczne daleko od Ziemi?
c) Na powierzchni Ziemi? Promień Ziemi R = $6{,}37 \cdot 10^6$ m.

Zadanie 221. W jakiej temperaturze średnia energia cieplna gazu paramagnetycznego będzie się równała energii magnetycznej pola 0,5 T, jeżeli momenty dipolowe atomów wynoszą około 10^{-23} A·m^2.

Zadanie 222. Moment dipolowy atomu żelaza wynosi $1{,}8 \cdot 10^{-23}$ A·m^2. Załóżmy, że w pręcie żelaznym o długości 5 cm i przekroju poprzecznym 1 cm^2 momenty dipolowe wszystkich atomów ustawione są w jednym kierunku.

a) Jaki jest moment dipolowy pręta?
b) Jaki moment obrotowy trzeba przyłożyć, aby utrzymać ten magnes prostopadle do zewnętrznego pola o indukcji 1,5 T. Gęstość żelaza 7,9 g/cm^3.

Zadanie 223. Załóżmy, że w 1 g wody wszystkie jądra wodoru (protony) ustawione są w tym samym kierunku. Jaka będzie indukcja magnetyczna $\vec{B}$ w odległości 5 cm od próbki, wzdłuż osi ustawienia protonów?

Zadanie 224. Wartość *e/m* dla elektronu można wyznaczyć przez pomiar:

a) częstości cyklotronowej elektronów ν_c w danym polu magnetycznym,
b) częstości precesji protonów ν_p w tym samym polu. Pokazać, że istnieje zależność: $\frac{e}{m} = \frac{\nu_c}{\nu_p}\frac{\mu_s}{L_s}$.