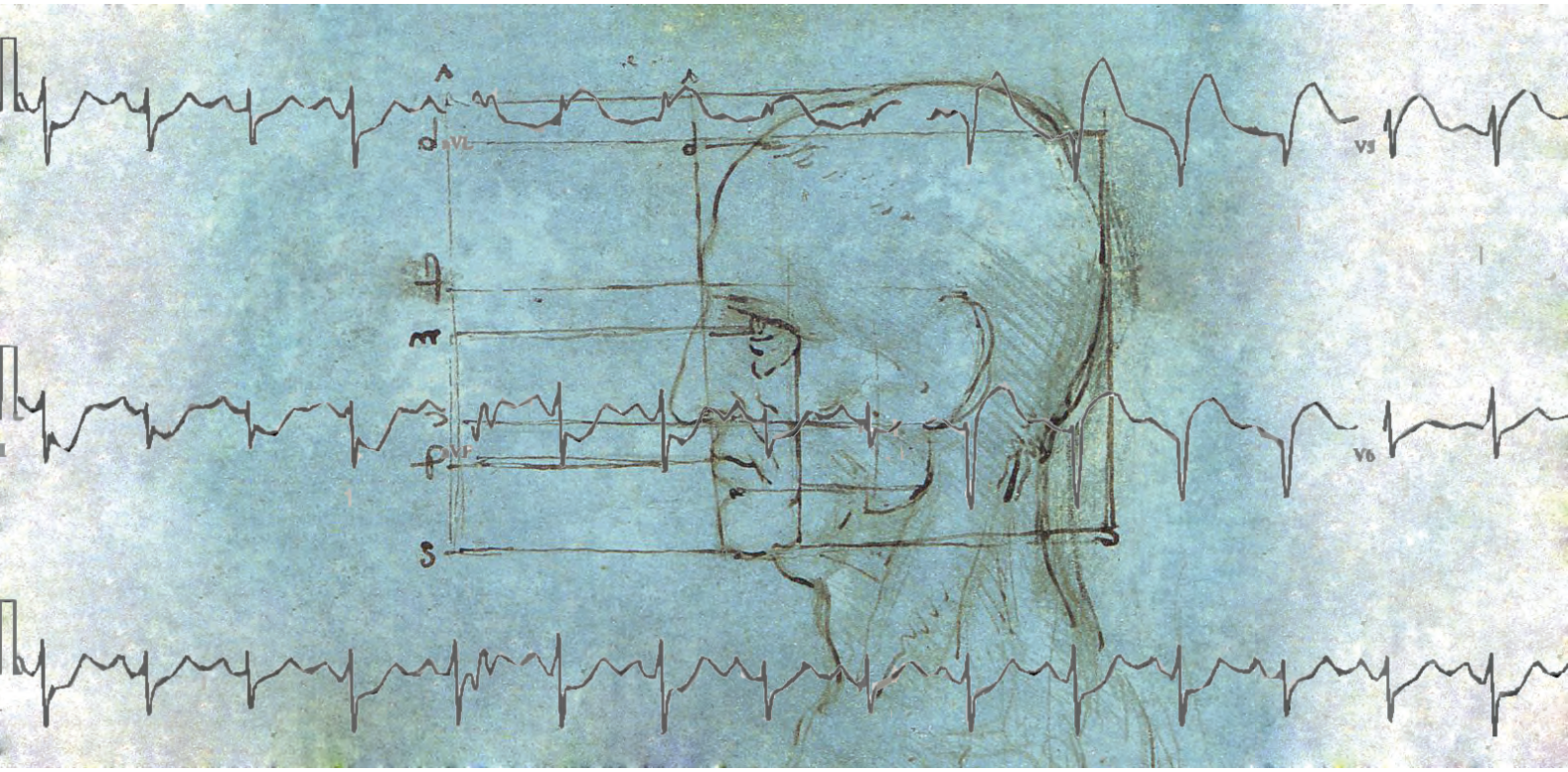

Metody matematyczne fizyki medycznej. Część teoretyczna.

wykład

Marcin Marciniak

Gdańsk, 2013

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytetu Gdańskiego

Skrypt powstał w ramach projektu „Kształcimy profesjonalistów – kompleksowy program kształcenia skierowany do studentów, absolwentów oraz studentów niepełnosprawnych Uniwersytetu Gdańskiego” współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach środków Europejskiego Funduszu Społecznego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET GDAŃSKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Spis treści

Rozdział 1. Wprowadzenie do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych 3
1.1. Określenie równania różniczkowego zwyczajnego 3
1.2. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnienia początkowego dla równań rzędu pierwszego 5
1.3. Rodzaje równań różniczkowych rzędu pierwszego i metody ich rozwiązywania 6
1.3.1. Równania o zmiennych rozdzielonych 7
1.3.2. Równania jednorodne 10
1.3.3. Równania liniowe 11
1.3.4. Równanie Bernoulliego 14
1.3.5. Równanie zupełne 16

Rozdział 2. Równania różniczkowe zwyczajne liniowe 19
2.1. Równania liniowe jednorodne 19
2.1.1. Przestrzeń rozwiązań równania jednorodnego 20
2.1.2. Równania liniowe jednorodne o stałych współczynnikach 20
2.2. Równania liniowe niejednorodne 23
2.2.1. Metoda uzmienniania stałych 24

Rozdział 3. Elementy teorii równań różniczkowych cząstkowych 27
3.1. Równania cząstkowe rzędu pierwszego 27
3.2. Równania różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego 29
3.2.1. Równania liniowe jednorodne 29
3.3. Równania quasi-liniowe 32

ROZDZIAŁ 1

Wprowadzenie do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych

1.1. Określenie równania różniczkowego zwyczajnego

Przypuśćmy, że na przedziale (a, b) jest określona pewna nieznana funkcja liczbowa y, która każdemu argumentowi $x \in (a, b)$ przyporządkowuje pewną wartość $y(x) \in \mathbb{R}$. Zmienną x będziemy nazywali zmienną niezależną. Będziemy zakładali, że nieznana funkcja y jest różniczkowalna, a jedyne, co o niej wiemy, to warunek na pochodną tej funkcji wyrażony pewnym równaniem. Równanie to określa zależność między pochodną funkcji y a samą funkcją funkcją y i zmienną niezależną x.

Przykład 1.1. Załóżmy, że nieznana funkcja $y(x)$ zadana jest warunkiem

$$y' = y + x + 1. \tag{1.1}$$

Powyższe równanie określa pewną zależność między pochodną y' funkcji y i samą funkcją y.

Rozważmy teraz funkcję y_0 zadaną wzorem $y_0(x) = 2e^x - x - 2$. Obliczamy:

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= 2e^x - 1, \\ y_0(x) + x + 1 &= 2e^x - x - 2 + x + 1 = 2e^x - 1. \end{aligned}$$

Porównując otrzymane wyrażenia otrzymujemy równość

$$y_0'(x) = y_0(x) + x + 1$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że funkcja y_0 spełnia równanie (1.1).

Definicja 1.2. Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ będzie pewną funkcją $n + 2$ zmiennych. *Równaniem różniczkowym* nazywamy równanie

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.2}$$

Definicja 1.3. Liczbę n nazywamy *rzędem równania* (1.2), jeśli jego lewa strona w sposób istotny zależy od $y^{(n)}$, tj. n-tej pochodnej funkcji y. Oznacza to, że nie istnieje taka funkcja

$G : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, że

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Przykład 1.4. Wróćmy do równania (1.1) z Przykładu 1.1. Można je zapisać w postaci

$$y' - y - x - 1 = 0.$$

Funkcja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, o której mowa w Definicji 1.2, ma zatem wzór

$$F(s, t, u) = u - t - s - 1.$$

Oczywiście jest to równanie pierwszego rzędu.

Definicja 1.5. Niech $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją n-krotnie różniczkowalną. Funkcję tę nazywamy *rozwiązaniem* równania (1.2) w przedziale (a, b), jeśli spełniony jest warunek

$$\forall x \in (a, b) : \; F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Przykład 1.6. Wróćmy do Przykładu 1.1. Wykazaliśmy tam że funkcja

$$y_0(x) = 2e^x - x - 2$$

jest rozwiązaniem równania (1.1) w przedziale $(-\infty, \infty)$. Zauważmy jednak, że nie jest to jedyne rozwiązanie. Na przykład, przeprowadzając podobne rachunki jak we wspomnianym przykładzie, można pokazać, że funkcja y_1 zadana wzorem

$$y_1(x) = -4e^x - x - 2$$

jest też rozwiązaniem równania (1.1).

Podobnie uzasadnimy, że każda funkcja postaci

$$y(x) = Ce^x - x - 2, \tag{1.3}$$

gdzie C jest dowolną stałą, jest rozwiązaniem w przedziale $(-\infty, \infty)$.

Definicja 1.7. *Warunkiem początkowym* dla równania (1.2) nazywamy układ równości

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{1.4}$$

gdzie $x_0 \in (a, b)$, $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ są zadanymi liczbami.

Równanie różniczkowe (1.2) wraz z warunkiem początkowym (1.4) nazywamy *zagadnieniem początkowym* lub *zagadnieniem Cauchy'ego*.

Przykład 1.8. Rozważmy następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y' = y + x + 1, \\ y(0) = 3. \end{cases} \tag{1.5}$$

W Przykładzie 1.6 scharakteryzowaliśmy w równości (1.3) postać dowolnego rozwiązania równania wchodzącego w skład powyższego zagadnienia początkowego. Podstawiając do wzoru (1.3) $x = 0$ otrzymujemy

$$y(0) = Ce^0 - 0 - 2 = C - 2$$

Warunek początkowy $y(0) = 3$ pozwala zatem wyznaczyć wartość stałej C:

$$C - 2 = 3$$

$$C = 5$$

Rozwiązaniem zagadnienia początkowego (1.5) jest zatem funkcja

$$y(x) = 5e^x - x - 2. \tag{1.6}$$

Definicja 1.9. *Całką szczególną* równania różniczkowego (1.2) nazywamy jego rozwiązanie spełniające warunek początkowy (1.4).

Całką ogólną równania różniczkowego (1.2) nazywamy zbiór wszystkich jego całek szczególnych.

Przykład 1.10. Zgodnie z powyższą definicją wzór (1.6) określa jedną z całek szczególnych równania (1.1), zaś wzór (1.3) określa jego całkę ogólną.

1.2. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnienia początkowego dla równań rzędu pierwszego

W tym rozdziale zajmiemy się problemem rozwiązywalności zagadnienia początkowego (zagadnienia Cauchy'ego) dla równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego. Będziemy przy tym zakładali, że funkcja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest szczególnej postaci, mianowicie

$$F(s, t, u) = f(s, t) - u$$

dla pewnej funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Oznacza to, że równanie (1.2) przyjmuje postać

$$y' = f(x, y) \tag{1.7}$$

Sformułujemy teraz pewien warunek na funkcję f, który gwarantuje istnienie rozwiązań powyższego równania.

Definicja 1.11. Niech $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^2$ jest pewnym obszarem. Mówimy, że funkcja f spełnia *warunek Lipschitza* ze względu na zmienną y, jeśli istnieje stała $K > 0$ taka, że dla dowolnych liczb $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ takich, że $(x, y_1) \in U$ i $(x, y_2) \in U$, spełniona jest nierówność

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Rozważmy teraz następujące zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.8}$$

gdzie $f : (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$.

Twierdzenie 1.12. *Jeśli funkcja $f : (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ jest ciągła i spełnia w prostokącie $(a, b) \times (c, d)$ warunek Lipshitza ze względu na zmienną y, to istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że istnieje dokładnie jedna funkcja $y : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ będąca rozwiązaniem zagadnienia początkowego (1.8).*

Uwaga 1.13. Powyższe twierdzenie znane jest w literaturze jako twierdzenie Picarda (lub twierdzenie Picarda-Lindelöfa). Podaje ono jeden z możliwych warunków wystarczających na funkcję f gwarantujących istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnienia początkowego (1.8). Oczywiście możliwe jest sformułowanie innych warunków. Takie warunki podają np. twierdzenie Peano lub twierdzenie Carathéodory'ego.

1.3. Rodzaje równań różniczkowych rzędu pierwszego i metody ich rozwiązywania

W rozdziale tym będziemy zajmować się problemem rozwiązywania równań typu (1.7). W zależności od postaci funkcji f wyróżniamy różne typy równań.

1.3.1. Równania o zmiennych rozdzielonych. Równanie (1.7) nazywamy równaniem o zmiennych rozdzielonych, jeśli

$$f(x,y) = \frac{\phi(x)}{\psi(y)} \tag{1.9}$$

dla pewnych funkcji jednej zmiennej $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ i $\psi : (c,d) \to \mathbb{R}$.

Równanie o zmiennych rozdzielonych ma zatem postać

$$y' = \frac{\phi(x)}{\psi(y)}. \tag{1.10}$$

Używając zwyczajowego oznaczenia pochodnej funkcji y jako $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ możemy powyższe równanie zapisać też jako

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\phi(x)}{\psi(y)} \tag{1.11}$$

Powyższy zapis można przekształcić formalnie do

$$\psi(y)\,\mathrm{d}y = \phi(x)\,\mathrm{d}x$$

z czego wynika równość

$$\int \psi(y)\,\mathrm{d}y = \int \phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Niech Ψ i Φ będą funkcjami pierwotnymi funkcji ψ i ϕ. Obliczając całki w ostatniej równości otrzymujemy następujący warunek na całkę ogólną równania (1.11)

$$\Psi(y) = \Phi(x) + C. \tag{1.12}$$

Warunek ten interpretujemy następująco: rozwiązaniem równania (1.11) jest każda taka funkcja $y : (c,d) \to \mathbb{R}$, że

$$\Psi(y(x)) = \Phi(x) + C, \qquad \text{dla każdego } x \in (c,d).$$

Uwaga 1.14. Mówimy, że warunek (1.12) zadaje rozwiązanie równania różniczkowego w *postaci uwikłanej*. Oznacza to, że nie zadaje on jawnego wzoru na funkcję $y(x)$ mimo, że określa ją jednoznacznie.

W niektórych wypadkach, gdy znamy jawny wzór funkcji Ψ^{-1} odwrotnej do Ψ, możemy z równania (1.12) wyznaczyć jawnie całkę ogólną równania (1.11):

$$y(x) = \Psi^{-1}(\Phi(x) + C).$$

Przykład 1.15. Rozważmy równanie

$$y' = 1 + x + y + xy. \tag{1.13}$$

Można je zapisać w postaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1+x)(1+y).$$

To ostatnie przekształcamy do postaci, w której zmienne są rozdzielone

$$\frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = (1+x)\,\mathrm{d}x.$$

To prowadzi nas do równości

$$\int \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = \int (1+x)\,\mathrm{d}x.$$

Całkując obie strony powyższej równości otrzymujemy

$$\ln|1+y| = x + \frac{x^2}{2} + C.$$

Przekształcając tę równość otrzymujemy

$$|1+y| = e^{x+\frac{x^2}{2}+C}.$$

Zastępując stałą e^C przez C i dopuszczając ewentualną zmianę znaku stałej C przy opuszczaniu wartości bezwzględnej otrzymujemy ostateczny wzór na całkę ogólną równania (1.13)

$$y = Ce^{x+\frac{x^2}{2}} - 1.$$

Przykład 1.16. Rozważmy następujące zagadnienie początkowe:

$$\begin{cases} y' \sin x = y \ln y, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2. \end{cases} \tag{1.14}$$

Najpierw znajdziemy całkę ogólną równania różniczkowego. Rozdzielamy zmienne i otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}.$$

Obliczamy całki obu stron:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \left| \begin{array}{c} t = \ln y \\ \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}y}{y} \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln|\ln y|$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} &= \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \left| \begin{array}{c} u = \cos x \\ \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x \\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} = \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{(u-1)(u+1)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) \mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln|u-1| - \ln|u+1|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| = \\
&= \ln\sqrt{\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right|}.
\end{aligned}$$

Postać uwikłana całki ogólnej wygląda więc następująco:

$$\ln|\ln y| = \ln\sqrt{\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right|} + C$$

Przekształcając tę równość otrzymujemy

$$\ln y = C\sqrt{\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right|}$$

$$y = \exp\left(C\sqrt{\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right|}\right)$$

Musimy teraz ustalić wartość stałej C tak, by był spełniony warunek początkowy.

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(C\sqrt{\left|\frac{\cos\frac{\pi}{2} - 1}{\cos\frac{\pi}{2} + 1}\right|}\right) = \exp\left(C\sqrt{\left|\frac{0-1}{0+1}\right|}\right) = e^C$$

Zatem

$$e^C = 2$$

$$C = \ln 2.$$

Szukana całka szczególna ma zatem wzór

$$y(x) = \exp\left(\ln 2\sqrt{\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right|}\right) = 2^{\sqrt{\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right|}}.$$

1.3.2. Równania jednorodne. Równanie (1.7) nazywamy równaniem jednorodnym, jeśli funkcja f jest postaci

$$f(x,y) = \chi\left(\frac{y}{x}\right),$$

gdzie χ jest pewną funkcją ciągłą jednej zmiennej. Równanie jednorodne ma zatem postać

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \chi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.15}$$

W równaniu tym wprowadzamy nową zmienną

$$u = \frac{y}{x}.$$

Stąd otrzymujemy równości

$$y = xu$$

oraz

$$y' = u + xu'.$$

Równanie (1.15) przybiera postać

$$u + xu' = \chi(u).$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych. W wyniku przekształceń otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}u}{\chi(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Przykład 1.17. Rozważmy równanie

$$xy' = 3y - 2x - 2\sqrt{xy - x^2}.$$

Zakładamy tutaj, że $xy - x^2 > 0$. Powyższe równanie zapisujemy w postaci

$$y' = 3\,\frac{y}{x} - 2 - 2\sqrt{\frac{y}{x} - 1}.$$

Funkcja χ z równania (1.15) ma zatem postać

$$\chi(u) = 3u - 2 - 2\sqrt{u-1}.$$

Podstawiając

$$u = \frac{y}{x}$$

otrzymujemy

$$y' = u + xu'$$

$$u + xu' = 3u - 2 - 2\sqrt{u-1}$$

skąd

$$\frac{\mathrm{d}u}{2u - 2 - 2\sqrt{u-1}} = \frac{\mathrm{d}x}{x}. \tag{1.16}$$

Obliczamy całkę lewej strony powyższego równania

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{2u-2-2\sqrt{u-1}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u-1}\left(\sqrt{u-1}-1\right)} = \left| \begin{array}{c} t=\sqrt{u-1}-1 \\ \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u-1}} \end{array} \right|$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln\left|\sqrt{u-1}-1\right|.$$

Porównując całki z obu stron równania (1.16) otrzymujemy

$$\ln\left|\sqrt{u-1}-1\right| = \ln x + C.$$

Stąd

$$\sqrt{u-1}-1 = Cx$$
$$u = 1+(1+Cx)^2.$$

Wracając do poprzednich zmiennych otrzymujemy całkę ogólną równania (1.16)

$$y = x\left(1+(1+Cx)^2\right).$$

1.3.3. Równania liniowe. Równanie (1.7) nazywamy *równaniem liniowym*, jeśli funkcja f jest liniowa względem zmiennej y, tzn.

$$f(x,y) = -p(x)y + q(x)$$

dla pewnych funkcji jednej zmiennej $p : (a,b) \to \mathbb{R}$ i $q : (a,b) \to \mathbb{R}$. Równanie liniowe ma zatem tradycyjną postać

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1.17}$$

W sytuacji, gdy $q(x) = 0$ dla $x \in (a,b)$, to równanie (1.17) nazywamy *równaniem liniowym jednorodnym*.

1.3.3.1. *Rozwiązywanie równań liniowych jednorodnych.* Równanie liniowe jednorodne ma postać

$$y' + p(x)y = 0.$$

Łatwo zauważyć, że jest to równanie o zmiennych rozdzielonych. Można je bowiem doprowadzić do postaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}x.$$

Niech $P(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x$ będzie funkcją pierwotną funkcji p. Całkując powyższe równanie otrzymujemy

$$\ln|y| = -P(x) + C$$
$$y = Ce^{-P(x)}. \tag{1.18}$$

Przykład 1.18. Rozważmy równanie

$$xy' = y \ln x.$$

Jest to równanie liniowe jednorodne, bo można je doprowadzić do postaci

$$y' - \frac{\ln x}{x} y = 0.$$

Rozwiązujemy to równanie rozdzielając zmienne

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$$

$$y = Ce^{\frac{1}{2}\ln^2 x}$$

1.3.3.2. *Rozwiązywanie równań niejednorodnych - metoda uzmiennienia stałej.* Zajmiemy się teraz przypadkiem ogólnym równania liniowego (1.17). Opiszemy tutaj metodę rozwiązywania takich równań zwaną *metodą uzmiennienia stałej*. Kluczowym punktem tej metody jest założenie, że rozwiązanie równania (1.17) jest postaci

$$y(x) = C(x)e^{-P(x)}, \tag{1.19}$$

gdzie P pierwotną funkcji p, zaś $C(x)$ jest pewną nieznaną funkcją. Zauważmy, że powyższa formuła powstała w ten sposób, że we wzorze (1.18) na całkę ogólną równania liniowego jednorodnego zastąpiliśmy stałą C pewną funkcją $C(x)$ (stąd nazwa metody, bo „uzmienniliśmy" stałą C).

Ze wzoru (1.19) otrzymujemy formułę

$$y' = C'(x)e^{-P(x)} - C(x)p(x)e^{-P(x)} \tag{1.20}$$

(pamiętamy, że $P' = p$). Teraz oba wzory (1.19) i (1.20) wstawiamy do równania (1.17)

$$C'(x)e^{-P(x)} - p(x)C(x)e^{-P(x)} + p(x)C(x)e^{-P(x)} = q(x).$$

Przekształcając otrzymane w ten sposób równanie otrzymujemy

$$C'(x)e^{-P(x)} = q(x)$$

$$C'(x) = q(x)e^{P(x)}$$

Ostatnia równość pozwala nam obliczyć funkcję $C(x)$

$$C(x) = \int q(x)e^{P(x)}\,\mathrm{d}x$$

Biorąc pod uwagę wzór (1.19) otrzymujemy następującą postać całki ogólnej równania liniowego (1.17)

$$y(x) = e^{-P(x)} \int q(x) e^{P(x)} \, \mathrm{d}x.$$

Przykład 1.19. Rozważmy równanie

$$y' - y\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{\cos x}. \tag{1.21}$$

Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne

$$y' - y\mathrm{tg}\, x = 0. \tag{1.22}$$

Przekształcając je otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{tg}\, x \, \mathrm{d}x. \tag{1.23}$$

Obliczamy całkę z funkcji tg

$$\int \mathrm{tg}\, x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x \\ \sin x \, \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x| + C$$

Wracając do równania (1.23) otrzymujemy

$$\ln|y| = -\ln|\cos x| + C$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C$$

Ostatecznie całka ogólna równania jednorodnego (1.22) ma postać

$$y = \frac{C}{\cos x}.$$

Stosujemy teraz metodę uzmiennienia stałej. Zakładamy, że rozwiązanie równania (1.21) jest postaci

$$y(x) = \frac{C(x)}{\cos x}. \tag{1.24}$$

Stąd otrzymujemy

$$y'(x) = \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{C'(x)}{\cos x} + \frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x}.$$

Otrzymane formuły wstawiamy do równania (1.21)

$$\frac{C'(x)}{\cos x} + \frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x}\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{C'(x)}{\cos x} + \frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{C'(x)}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$
$$C'(x) = 1.$$

Stąd wynika, że

$$C(x) = x + D,$$

Gdzie D jest pewną stałą. Ostatecznie, uwzględniając (1.24), otrzymujemy

$$y = \frac{x + D}{\cos x}.$$

1.3.4. Równanie Bernoulliego. Równanie (1.7) nazywamy równaniem Bernoulliego, jeśli funkcja f ma postać

$$f(x, y) = -k(x)y + h(x)y^r,$$

gdzie $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, zaś $k, h : (a, b) \to \mathbb{R}$ są pewnymi funkcjami jednej zmiennej rzeczywistej. Oznacza to, że równanie Bernoulliego ma postać

$$y' + k(x)y = h(x)y^r. \tag{1.25}$$

W celu rozwiązania powyższego równania wprowadzamy nową zmienną

$$z = y^{1-r}. \tag{1.26}$$

Z określenia tego wynika równość

$$z' = (1 - r)y^{-r}y'. \tag{1.27}$$

Pomnóżmy teraz obie strony równania (1.25) przez y^{-r}. W wyniku tego dostaniemy

$$y^{-r}y' + k(x)y^{1-r} = h(x).$$

Jeśli do tej formuły zastosujemy równości (1.26) i (1.27), to otrzymamy równanie

$$\frac{1}{1 - r}z' + k(x)z = h(x). \tag{1.28}$$

Jest to równanie liniowe, które rozwiązujemy tak, jak to opisano w poprzednim podrozdziale.

Przykład 1.20. Rozważmy równanie

$$y' + \frac{y}{x} = -xy^2.$$

Jest to równanie Bernoulliego, w którym $r = 2$. Wprowadzamy zatem zmienną

$$z = y^{-1} = \frac{1}{y}.$$

Stąd

$$z' = -\frac{y'}{y^2}.$$

Tak, jak to opisano powyżej, dzielimy obie strony wyjściowego równania przez y^2 i otrzymujemy

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = -x.$$

Stosując otrzymane równości dotyczące zmiennej z i z' otrzymujemy równanie liniowe

$$-z' + \frac{z}{x} = -x$$

$$z' - \frac{z}{x} = x. \tag{1.29}$$

Jest to równanie liniowe niejednorodne. Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne

$$z' - \frac{z}{x} = 0.$$

Po rozdzieleniu zmiennych ma ono postać

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Po scałkowaniu obu stron otrzymujemy

$$\ln|z| = \ln|x| + C,$$

co prowadzi do

$$z = Cx.$$

W celu rozwiązania równania niejednorodnego uzmienniamy stałą

$$z = C(x)x,$$

stąd

$$z' = C'(x)x + C(x)$$

Otrzymane formuły wstawiamy do (1.29)

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x$$

$$C'(x)x = x$$

$$C'(x) = 1.$$

Stąd

$$C(x) = x + D$$

Wynika stąd, że

$$z = (x + D)x = x^2 + Dx$$

Ostatecznie, wracając do starych zmiennych, otrzymujemy całkę ogólną wyjściowego równania Bernoulliego

$$y = \frac{1}{x^2 + Dx}$$

1.3.5. Równanie zupełne. Przypuśćmy, że funkcja f w równaniu (1.7) jest postaci

$$f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

gdzie P i Q są pewnymi funkcjami dwóch zmiennych. Równanie to można zatem przepisać w postaci

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{1.30}$$

Powyższe równanie nazywamy *równaniem zupełnym*, jeśli istnieje funkcja dwóch zmiennych U taka, że

$$\mathrm{d}U(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

tzn. lewa strona równania jest różniczką zupełną funkcji U. Oznacza to, że spełnione są równości

$$P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y), \qquad Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y). \tag{1.31}$$

W takim przypadku całką ogólną równania (1.30) jest funkcja y zadana w postaci uwikłanej

$$U(x,y) = C.$$

Następujące twierdzenie podaje warunki równoważne zupełności równania (1.30)

Twierdzenie 1.21. *Załóżmy, że na pewnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$ funkcje P i Q mają ciągłe pochodne cząstkowe $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Na to, aby równanie (1.30) było zupełne, potrzeba i wystarcza, aby spełniona była równość*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

w obszarze D.

Przykład 1.22. Rozważmy równanie

$$\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{e^y}{1+x^2}\,\mathrm{d}y = 0. \tag{1.32}$$

Sprawdzamy, czy jest spełniony warunek opisany w Twierdzeniu 1.21

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Powyższe oznacza, że istnieje funkcja U taka, że

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} \tag{1.33}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{e^y}{1+x^2} \tag{1.34}$$

Korzystając z równości (1.33) obliczamy

$$U(x,y) = \int \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = (1-e^y)\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^y-1}{1+x^2} + \varphi(y)$$

gdzie φ jest pewną funkcją jednej zmiennej. Obliczmy pochodną otrzymanej funkcji względem zmiennej y

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{e^y}{1+x^2} + \varphi'(y).$$

Z równości (1.34) wynika zatem, że

$$\varphi'(y) = 0$$

skąd wynika, że φ jest funkcją stałą.

Całka ogólna jest zatem zadana następującym warunkiem uwikłanym

$$\frac{e^y-1}{1+x^2} = C.$$

Warunek ten można rozwikłać

$$e^y - 1 = C(1+x^2)$$
$$e^y = 1 + C(1+x^2)$$
$$y = \ln\left[1 + C(1+x^2)\right]$$

ROZDZIAŁ 2

Równania różniczkowe zwyczajne liniowe

W rozdziale poprzednim wprowadziliśmy pojęcie równania różniczkowego zwyczjnego rzędu n (por. (1.2)).

Definicja 2.1. Równanie (1.2) nazywamy równaniem liniowym, jeśli funkcja F zależy w sposób liniowy od zmiennych $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$

Z powyższej definicji wynika, że równaniem różniczkowym zwyczajnym liniowym nazywamy równanie postaci

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = f(x), \tag{2.1}$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n, f$ są funkcjami jednej zmiennej określonymi na pewnym przedziale (a, b).

2.1. Równania liniowe jednorodne

Równanie (2.1) nazywamy *jednorodnym*, jeśli $f = 0$, tzn. równanie jest postaci

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = 0 \tag{2.2}$$

Twierdzenie 2.2. *Zbiór wszystkich rozwiązań równania (2.2) jest przestrzenią liniową, tzn. jeśli y_1 i y_2 są rozwiązaniami oraz $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, to również funkcja $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ jest też rozwiązaniem równania (2.2).*

Co więcej, wymiar tej przestrzeni jest równy n, gdzie n jest rzędem równania różniczkowego.

Definicja 2.3. Jeśli układ funkcji $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jest bazą przestrzeni rozwiązań równania (2.2), to nazywamy go układem rozwiązań fundamentalnych.

2.1.1. Przestrzeń rozwiązań równania jednorodnego. Z powyższej definicji wynika, że jeśli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jest układem rozwiązań fundamentalnych równania (2.2), to dowolne rozwiązanie tego równania jest postaci

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x) \tag{2.3}$$

gdzie $C_1, C_2, \ldots, C_n$ są pewnymi stałymi.

Przykład 2.4. Rozważmy równanie

$$y'' - y = 0.$$

Zauważmy, że funkcje

$$y_1(x) = e^x$$

$$y_2(x) = e^{-x}$$

są rozwiązaniami powyższego równania. Łatwo zauważyć, że funkcje te są liniowo niezależne (bo y_1 nie jest wielokrotnością funkcji y_2). Z Twierdzenia 2.2 wynika zatem, że układ y_1, y_2 jest układem rozwiązań fundamentalnych naszego równania. Rzowiązanie ogólne tego równania jest zatem postaci

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Z powyższych rozważań wynika, że chcąc wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania (2.2) należy znaleźć jakikolwiek układ rozwiązań fundamentalnych tego równania. Przedstawimy metodę szukania takich rozwiązań przy dodatkowym założeniu na funkcje $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

2.1.2. Równania liniowe jednorodne o stałych współczynnikach. W rozdziale tym będziemy zakładali, że wszystkie funkcje $a_0, a_1, \ldots, a_n$ w równaniu (2.2) są stałe, tzn. równanie ma postać

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0, \tag{2.4}$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Omówimy metodę wyznaczania układu rozwiązań fundamentalnych w tym przypadku.

Definicja 2.5. *Wielomianem charakterystycznym* równania (2.4) nazywamy wielomian

$$W(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k. \tag{2.5}$$

Przykład 2.6. Rozważmy równanie

$$y''' - 3y'' + 2y' - 6y = 0$$

Wielomianem charakterystycznym tego równania jest

$$W(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda - 6.$$

Przypomnijmy, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można przedstawić w postaci iloczynu czynników nierozkładalnych. Czynnikami takimi są

$$\lambda - r$$

oraz

$$\lambda^2 + p\lambda + q, \qquad \text{gdzie } \Delta = p^2 - 4q < 0.$$

Rozłóżmy wielomian charakterystyczny na czynniki nierozkładalne, tzn. przedstawmy go w postaci

$$W(\lambda) = (\lambda - r_1)^{k_1}(\lambda - r_2)^{k_2} \dots (\lambda - r_s)^{k_s}(\lambda^2 + p_1\lambda + q_1)^{l_1} \dots (\lambda^2 + p_t\lambda + q_t)^{l_t}$$

Z rozkładu tego wynika, że liczby rzeczywiste $r_1, \dots, r_s$ są pierwiatskami wielomianu W, przy czym r_i ma krotność k_i. Ponadto, każdy czynnik kwadratowy $\lambda^2 + p_j\lambda + q_j$ ma dwa pierwiastki zespolone wzajemnie sprzężone

$$\alpha_j + i\beta_j, \qquad \alpha_j - i\beta_j$$

przy czym oba te pierwiastki mają krotność l_j.

Twierdzenie 2.7. *Następujący układ funkcji*

$$e^{r_1x}, xe^{r_1x}, x^2e^{r_1x}, \dots, x^{k_1-1}e^{r_1x}$$
$$e^{r_2x}, xe^{r_2x}, x^2e^{r_2x}, \dots, x^{k_2-1}e^{r_2x}$$
$$\vdots$$
$$e^{r_sx}, xe^{r_sx}, x^2e^{r_sx}, \dots, x^{k_s-1}e^{r_sx}$$
$$e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x, e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x, xe^{\alpha_1x}\cos\beta_1x, xe^{\alpha_1x}\sin\beta_1x \dots, x^{l_1-1}e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x, x^{l_1-1}e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x$$
$$e^{\alpha_2x}\cos\beta_2x, e^{\alpha_2x}\sin\beta_2x, xe^{\alpha_2x}\cos\beta_2x, xe^{\alpha_2x}\sin\beta_2x \dots, x^{l_2-1}e^{\alpha_2x}\cos\beta_2x, x^{l_2-1}e^{\alpha_2x}\sin\beta_2x$$
$$\vdots$$
$$e^{\alpha_sx}\cos\beta_sx, e^{\alpha_sx}\sin\beta_sx, xe^{\alpha_sx}\cos\beta_sx, xe^{\alpha_sx}\sin\beta_sx \dots, x^{l_s-1}e^{\alpha_sx}\cos\beta_sx, x^{l_s-1}e^{\alpha_sx}\sin\beta_sx$$

jest układem rozwiązań fundamentalnych równania (2.4).

Przykład 2.8. Rozważmy równanie

$$y'' + 3y' + y = 0.$$

Wielomian charakterystyczny tego równania to

$$W(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

Obliczamy pierwiastki $r_1 = -1$ i $r_2 = -2$. Oba te pierwiastki są oczywiście krotności 1, czyli

$$W(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że układ funkcji

$$y_1(x) = e^{-x}$$

$$y_2(x) = e^{-2x}$$

jest układem fundamentalnym rozwiązań. Rozwiązanie ogólne jest zatem postaci

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Przykład 2.9. Rozważmy równanie

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

Wielomian charakterystyczny to

$$W(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Ta funkcja kwadratowa nie ma pierwiastków rzeczywistych, ma za to dwa pierwiastki zespolone wzajemnie sprzężone:

$$1 + i, \qquad 1 - i.$$

Na podstawie twierdzenia wnioskujemy, że układ funkcji

$$y_1(x) = e^x \cos x,$$

$$y_2(x) = e^x \sin x,$$

jest układem rozwiązań fundamentalnych. Zatem rozwiązanie ogólne to

$$y(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x.$$

Przykład 2.10. Rozważmy równanie

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 16y' + 16y = 0.$$

Wielomian charakterystyczny tego równania to

$$W(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 16\lambda + 16$$

Znadujemy rozkład tego wielomianu na czynniki nierozkładalne

$$W(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda^2 + 4).$$

Wielomian ten ma zatem jeden pierwiastek rzeczywisty $r = 2$ krotności 2 oraz dwa jednokrotne wzajemnie sprzężone pierwiastki zespolone: $2i$, $-2i$. Z powyższego twierdzenia wynika, że układ funkcji

$$y_1(x) = e^{2x}$$
$$y_2(x) = xe^{2x}$$
$$y_3(x) = \cos 2x$$
$$y_4(x) = \sin 2x$$

jest układem fundamentalnym rozwiązań. Rozwiązanie ogólne jest zatem postaci

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

2.2. Równania liniowe niejednorodne

W rozdziale tym zajmiemy się opisem rozwiązań równania liniowego.

Twierdzenie 2.11. *Niech y_1, y_2 będą rozwiązaniami równania (2.1). Wtedy różnica*

$$y = y_1 - y_2$$

jest rozwiązaniem równania jednorodnego (2.2).

Wniosek 2.12. *Niech y_0 będzie pewnym rozwiązaniem równania (2.1). Wtedy rozwiązanie ogólne tego równania jest postaci*

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x),$$

gdzie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jest dowolnym układem rozwiązań fundamentalnych równania jednorodnego (2.2), zaś $C_1, C_2, \ldots, C_n$ są dowolnymi stałymi.

Z powyższych rozważań wynika, że szukanie rozwiązania ogólnego dla równania liniowego niejednorodnego przebiega w dwóch etapach:

(1) wyznaczenie rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (2.2),
(2) wyznaczenie jednego rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego (2.1).

W dalszym ciągu będziemy się zajmowali tylko równaniami o stałych współczynnikach. Dla tych równań etap (1) omówiliśmy w poprzednim rozdziale. Pozostaje omówić sposoby wyznaczania równań szczegółowych

2.2.1. Metoda uzmienniania stałych. Jest to metoda analogiczna do tej omówionej w Rozdziale 1 dla równań liniowych rzędu pierwszego.

Załóżmy, że chcemy rozwiązać równanie

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = f(x) \tag{2.6}$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Przypuśćmy, że wyznaczyliśmy układ rozwiązań fundamentalnych $y_1, \ldots, y_n$ równania jednorodnego (2.4). Będziemy poszukiwać rozwiązań równania (2.6) w postaci

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y_j(x), \tag{2.7}$$

gdzie $C_1, \ldots, C_n$ są pewnymi funkcjami zmiennej x.

Twierdzenie 2.13. *Jeśli pochodne $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$ spełniają następujący układ równań*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j(x) = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j'(x) = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j''(x) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j^{(n-2)}(x) = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

to funkcja y zadana wzorem (2.7) jest rozwiązaniem równania (2.6).

Przykład 2.14. Rozważmy równanie

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}. \tag{2.8}$$

Najpierw rozwiązujemy jednorodne

$$y'' + y = 0.$$

Wielomian charakterystyczny tego równania to

$$W(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

Ma on dwa wzajemnie sprzężone pierwiastki zespolone i, $-i$. Rozwiązaniami fundamentalnymi równania jednorodnego są zatem funkcje

$$y_1(x) = \cos x$$

$$y_2(x) = \sin x$$

.

Zgodnie z opisaną wyżej procedurą rozwiązań wyjściowego równania niejednorodnego szukamy w postaci

$$y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x. \tag{2.9}$$

Obliczamy pochodne rozwiązań fundamentalnych

$$y_1'(x) = -\sin x$$

$$y_2'(x) = \cos x$$

Zgodnie z Twierdzeniem 2.13 pochodne funkcji C_1 i C_2 zdeterminowane są następującym układem równań

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

Rozwiążemy ten układ równań metodą Cramera

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix} = -1$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$$

Stąd otrzymujemy

$$C_1'(x) = -1$$

$$C_2'(x) = \operatorname{ctg} x$$

Obliczając odpowiednie całki otrzymujemy

$$C_1(x) = -x + D_1$$

$$C_2(x) = \ln|\sin x| + D_2$$

Wstawiając te wzory do (2.9) otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania (2.8)

$$\begin{aligned} y(x) &= (-x + D_1)\cos x + (\ln|\sin x| + D_2)\sin x = \\ &= -x\cos x + \sin x \ln|\sin x| + D_1 \cos x + D_2 \sin x \end{aligned}$$

ROZDZIAŁ 3

Elementy teorii równań różniczkowych cząstkowych

3.1. Równania cząstkowe rzędu pierwszego

Zasadniczą cechą równań różniczkowych zwyczajnych było to, że nieznana funkcja zależała od jednej zmiennej. W równaniach różniczkowych cząstkowych szukana funkcja u zależy od wielu zmiennych, a określające ją warunki zadane są przy pomocy jej pochodnych cząstkowych.

Definicja 3.1. *Równaniem różniczkowym cząstkowym pierwszego rzędu* nazywamy równanie

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{3.1}$$

gdzie F jest pewną funkcją rzeczywistą $2n+1$ zmiennych.

Definicja 3.2. *Rozwiązaniem równania* (3.1) nazywamy funkcję $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mającą pochodne cząstkowe pierwszego rzędu, która w pewnym obszarze $E \subset \mathbb{R}^n$ spełnia równanie (3.1), tzn.

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n)\right) = 0$$

dla każdego punktu $(x_1, \ldots, x_n) \in E$.

W przypadku, gdy $n = 2$ lub $n = 3$, będziemy pisali $u(x, y)$ lub $u(x, y, z)$ zamiast $u(x_1, x_2)$ lub $u(x_1, x_2, x_3)$.

Przykład 3.3. Rozważmy równanie

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{3.2}$$

Niech $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną różniczkowalną funkcją jednej zmiennej. Niech

$$u(x, y) = \phi(x^2 + y^2).$$

Pokażamy, że funkcja u jest rozwiązaniem naszego równania. Obliczamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x\phi'(x^2+y^2)\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y\phi'(x^2+y^2)\end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy\phi'(x^2+y^2) - 2xy\phi'(x^2+y^2) = 0.$$

Definicja 3.4. Niech $x_n^0 \in \mathbb{R}$ będzie ustaloną liczbą. Niech ponadto $g(x_1,\ldots,x_{n-1})$ będzie pewną funkcją $n-1$ zmiennych. *Warunkiem początkowym* dla równania (3.1) nazywamy warunek

$$u(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^0) = g(x_1,\ldots,x_{n-1})$$

spełniony dla wszystkich $x_1,\ldots,x_{n-1}$ takich, że $(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^0) \in E$.

Zagadnieniem początkowym albo *zagadnieniem Cauchy'ego* nazywamy problem

$$\begin{cases} F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,u,\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\dfrac{\partial u}{\partial x_2},\ldots,\dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0,\\ u(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^0) = g(x_1,\ldots,x_{n-1})\end{cases} \tag{3.3}$$

Przykład 3.5. Rozważmy zaganienie początkowe

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0\\ u(0,y) = 1-y^2\end{cases}$$

W poprzednim przykładzie opisaliśmy rozwiązanie ogólne równania wchodzącego w skład tego zagadnienia

$$u(x,y) = \phi(x^2+y^2)$$

gdzie ϕ jest dowolną funkcją jednej zmiennej. Szukamy zatem takiej funkcji ϕ, która spełnia warunek

$$\phi(y^2) = \phi(0+y^2) = u(0,y) = 1-y^2.$$

Warunek ten spełnia funkcja zadana wzorem

$$\phi(t) = 1-t.$$

Rozwiązaniem rozważanego zagadnienia początkowego jest zatem funkcja

$$u(x,y) = \phi(x^2+y^2) = 1-x^2-y^2.$$

3.2. Równania różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego

Definicja 3.6. Równanie (3.1) nazywamy *równaniem liniowym*, jeśli funkcja F jest liniowa względem wszystkich oprócz pierwszych n argumentów.

Niech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Równanie liniowe rzędu pierwszego ma więc postać

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + B(\mathbf{x})u = g(\mathbf{x}) \tag{3.4}$$

gdzie $A_1, \ldots, A_n, B, g$ są pewnymi funkcjami n zmiennych.

Uwaga 3.7. W teorii równań różniczkowych dowodzi się, że jeśli funkcje $A_1, \ldots, A_n, B, g$ są dostatecznie regularne[1], to zagadnienie początkowe (3.3) ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie.

3.2.1. Równania liniowe jednorodne. Równanie liniowe (3.4) nazywamy *jednorodnym*, jeśli funkcje B i g są tożsamościowo równe zero, ma zatem postać

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \tag{3.5}$$

Z powyższym równaniem będziemy stowarzyszali następujący układ różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1(\mathbf{x})} = \frac{\mathrm{d}x_2}{A_2(\mathbf{x})} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x_n}{A_n(\mathbf{x})} \tag{3.6}$$

W powyższym układzie równań jedną ze zmiennych, np. x_1, traktujemy jako zmienną niezależną, a pozostałe zmienne – jako funkcje zależne od x_1. Mamy tutaj zatem $n-1$ niewiadomych funkcji $x_2(x_1), \ldots, x_n(x_1)$.

Definicja 3.8. Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór wszystkich rozwiązań układu równań (3.6) w przedziale (a, b). Funkcję $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazywamy *całką pierwszą*, jeżeli dla każdego rozwiązania $(x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{F}$ istnieje stała C taka, że

$$\psi(x_1, x_2(x_1), \ldots, x_n(x_1)) = C$$

dla każdego $x_1 \in (a, b)$.

[1] Chodzi tutaj o założenie analityczności. Wykracza to jednak poza zakres naszego skryptu.

Twierdzenie 3.9. *Układ (3.6) ma co najwyżej $n-1$ liniowo niezależnych całek pierwszych.*

Ponadto, jeżeli $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ są liniowo niezależnymi całkami pierwszymi układu (3.6), to układ warunków

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1 \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2 \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1} \end{cases}$$

jest całką ogólną układu równań (3.6) zadaną w postaci uwikłanej.

Związek między całkami pierwszymi układu równań (3.6) a całką ogólną równania (3.5) precyzuje nastepujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.10. *Niech $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ będą liniowo niezależnymi całkami pierwszymi układu równań (3.6). Wtedy*

$$u(\mathbf{x}) = G(\psi_1(\mathbf{x}), \ldots, \psi_{n-1}(\mathbf{x}))$$

gdzie G jest dowolną funkcją różniczkowalną $n-1$ zmiennych, jest całką ogólną równania (3.5).

Przykład 3.11. Rozważmy równanie liniowe jednorodne

$$xz\frac{\partial u}{\partial x} + yz\frac{\partial u}{\partial y} - (x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{3.7}$$

Układ równań zwyczajnych stowarzyszony z tym równaniem ma postać

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = \frac{\mathrm{d}y}{yz} = -\frac{\mathrm{d}z}{x^2+y^2} \tag{3.8}$$

Potraktujmy go jako układ dwóch równań, w którym niewiadome funkcje y i z zależą od zmiennej niezależnej x

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = \frac{\mathrm{d}y}{yz} \tag{3.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = -\frac{\mathrm{d}z}{x^2+y^2} \tag{3.10}$$

Rozwiązujemy równanie (3.9). Mnożąc obie strony przez z otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

$$y = C_1 x. \tag{3.11}$$

Wstawiając powyższe do równania (3.10) otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = -\frac{\mathrm{d}z}{x^2 + C_1^2 x^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = -\frac{\mathrm{d}z}{(1 + C_1^2)x^2}$$
$$z\,\mathrm{d}z = -(1 + C_1^2)x\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}(1 + C_1^2)x^2 + C_2$$
$$x^2 + C_1^2 x^2 + z^2 = C_2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2 \tag{3.12}$$

Z równości (3.11) i (3.12) otrzymujemy

$$\frac{y}{x} = C_1$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2,$$

co oznacza, że funkcje

$$\psi_1(x, y, z) = \frac{y}{x} \tag{3.13}$$
$$\psi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \tag{3.14}$$

są całkami pierwszymi układu równań (3.8). Na podstawie Twierdzenia 3.9 wnioskujemy, że rozwiązanie ogólne równania (3.7) jest postaci

$$u(x, y, z) = G\left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2 + z^2\right),$$

gdzie G jest dowolną funkcją różniczkowalną dwóch zmiennych.

Przykład 3.12. Rozważmy następujące zagadnienie początkowe

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2}z\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{3.15}$$
$$u(1, y, z) = y + z^2 \tag{3.16}$$

Układ równań zwyczajnych z powyższym równaniem ma postać

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2\,\mathrm{d}z}{z} \tag{3.17}$$

Rozpisujemy go układ następujących dwóch równań

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\frac{2\,\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Rozwiązania tych równań mają odpowiednio postacie

$$y = C_1 x \tag{3.18}$$

$$z^2 = C_2 x, \tag{3.19}$$

co oznacza, że funkcje

$$\begin{aligned} \psi_1(x,y,z) &= \frac{y}{x} \\ \psi_2(x,y,z) &= \frac{z^2}{x} \end{aligned}$$

są całkami pierwszymi układu (3.17).

Rozważmy teraz układ równań wynikający z warunku początkowego (3.16). Jeśli weźmiemy $x = 1$, to równania (3.18), (3.19) i (3.16) dadzą

$$\begin{cases} \dfrac{y}{1} = C_1 \\ \dfrac{z^2}{1} = C_2 \\ u = y + z^2 \end{cases}$$

Jeśli wyrugujemy z tego układu zmienne y i z, to otrzymamy równość

$$u = C_1 + C_2.$$

Aplikując równości (3.18) i (3.19) otzrymujemy

$$u(x,y,z) = \frac{y}{x} + \frac{z^2}{x}.$$

3.3. Równania quasi-liniowe

Równanie różniczkowe rzędu pierwszego nazywamy *równaniem quasi-liniowym*, jeśli jest postaci

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(\mathbf{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = B(\mathbf{x}, u), \tag{3.20}$$

gdzie $A_1, \ldots, A_n, B$ są pewnymi funkcjami $n+1$ zmiennych.

Będziemy szukać rozwiązania tego równania w postaci uwikłanej

$$\omega(\mathbf{x}, u) = 0. \tag{3.21}$$

Zauważmy, że z równania (3.21) wynika, że funkcja

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \omega(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$$

jest stała. Zatem pochodna tej funkcji względem zmiennej x_i jest równa zero dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Stąd zaś wynika

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial u}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Jeśli wstawimy te równości do równania (3.20), to otrzymamy równanie

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(\mathbf{x}, u)\frac{\partial \omega}{\partial x_i} + B(\mathbf{x}, u)\frac{\partial \omega}{\partial u} = 0. \tag{3.22}$$

Zauważmy, że jest to równanie liniowe jednorodne, w którym niewiadoma jest funkcja ω zależna od argumentów $x_1, \ldots, x_n, u$.

Chcąc rozwiązać to równanie rozważamy zatem stowarzyszony układ równań zwyczajnych

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1(\mathbf{x}, u)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{A_2(\mathbf{x}, u)} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x_n}{A_n(\mathbf{x}, u)} = \frac{\mathrm{d}u}{B(\mathbf{x}, u)} \tag{3.23}$$

Następnie szukamy układu n liniowo niezależnych całek pierwszych $\psi_1(\mathbf{x}, u), \psi_2(\mathbf{x}, u), \ldots \psi_n(\mathbf{x}, u)$ tego układu. Rozwiązanie ogólne równania (3.22) będzie wtedy miało postać

$$\omega(\mathbf{x}, u) = G(\psi_1(\mathbf{x}, u), \psi_2(\mathbf{x}, u), \ldots \psi_n(\mathbf{x}, u)),$$

co oznacza, że rozwiązanie równania (3.20) będzie zadane następującą postacią uwikłaną

$$G(\psi_1(\mathbf{x}, u), \psi_2(\mathbf{x}, u), \ldots \psi_n(\mathbf{x}, u)) = 0.$$

Przykład 3.13. Rozważmy równanie

$$xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2 + u^2. \tag{3.24}$$

W tym równaniu mamy

$$\begin{aligned} A_1(x, y, u) &= xu \\ A_2(x, y, u) &= yu \\ B(x, y, u) &= x^2 + y^2 + u^2 \end{aligned}$$

Wypiszmy stowarzyszony układ równań zwyczajnych

$$\frac{\mathrm{d}x}{xu} = \frac{\mathrm{d}y}{yu} = \frac{\mathrm{d}u}{x^2 + y^2 + u^2} \tag{3.25}$$

Jest on równoważny następującym warunkom

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{xu} = \dfrac{\mathrm{d}y}{yu} \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{xu} = \dfrac{\mathrm{d}u}{x^2+y^2+u^2} \end{cases} \tag{3.26}$$

Pierwsze równanie doprowadzamy do postaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

co daje rozwiązanie

$$u = C_1 x \tag{3.27}$$

Wstawiając powyższe do równania drugiego otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}x}{xu} = \frac{\mathrm{d}u}{(1+C_1^2)x^2+u^2}.$$

Przekształcając otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (1+C_1^2)\frac{x}{u} + \frac{u}{x}. \tag{3.28}$$

Jest to równanie różniczkowe jednorodne (por. Rozdział 1.3.2). W celu rozwiązania go wprowadzamy zmienną

$$z = \frac{u}{x}. \tag{3.29}$$

Różniczkując formułę $u = xz$ otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.$$

Wstawiamy do (3.28)

$$z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1+C_1^2)\frac{1}{z} + z$$

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1+C_1^2)\frac{1}{z}$$

$$z\,\mathrm{d}z = (1+C_1^2)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

skąd otrzymujemy równość

$$\frac{1}{2}z^2 = (1+C_1^2)\ln|z| + C_2$$

Uwzględniając (3.29) i (3.27) otzrymujemy

$$\frac{2(x^2+y^2)\ln|x| - u^2}{x^2} = C_2$$

Rozwiązanie ogólne równania (3.24) ma zatem postać uwikłaną

$$G\left(\frac{y}{x}, 2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\ln|x| - \frac{u^2}{x^2}\right) = 0$$

gdzie G jest dowolną funkcją różniczkowalną dwóch zmiennych