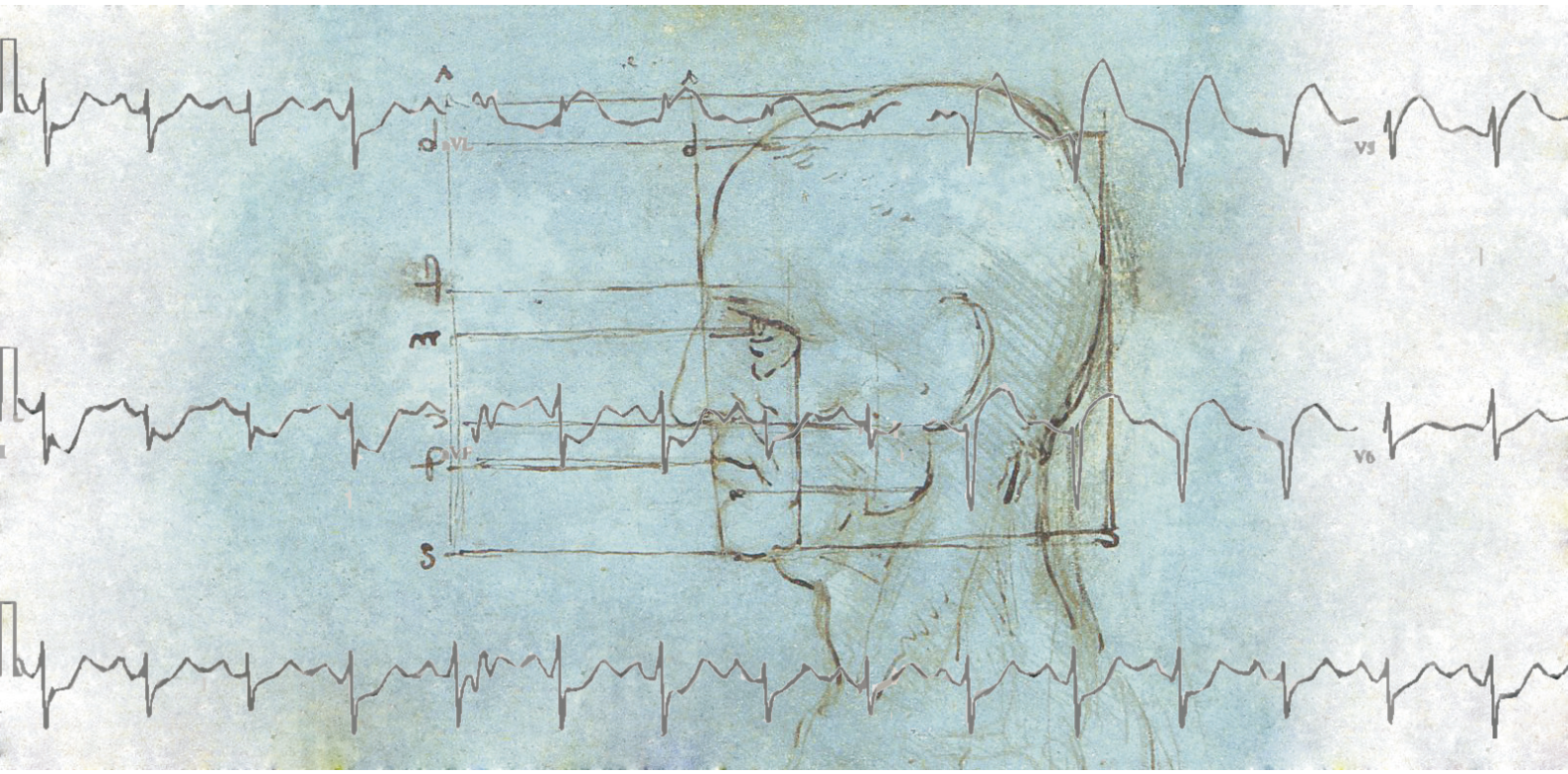


Technologie informacyjne

wykład

Marek Krośnicki

Gdańsk, 2011

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytetu Gdańskiego

Skrypt powstał w ramach projektu „Kształcimy profesjonalistów – kompleksowy program kształcenia skierowany do studentów, absolwentów oraz studentów niepełnosprawnych Uniwersytetu Gdańskiego” współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach środków Europejskiego Funduszu Społecznego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET GDAŃSKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Spis treści

1. Podstawy obsługi komputera 2

1.1. Systemy operacyjne 2

1.2. Systemy Linuksowe 3

1.3. Powłoka bash i wiersz poleceń 3

2. Sieci i protokoły komunikacyjne 6

2.1. protokoły komunikacyjne 6

2.2. Aplikacje internetowe 7

2.2.1. OPEN SSH 7

2.2.2. Szyfrowanie Danych, GPG 8

3. Podstawy teorii błędu pomiarowego 12

3.1. Pojęcia wstępne 12

3.2. Rodzaje błędów i niepewności pomiarowych 15

3.3. Opracowanie pomiarów 17

3.3.1. Błędy przypadkowe i statystyka 19

3.3.2. Reguła przenoszenia błędów 20

3.3.3. Rozkład normalny 22

3.3.4. Regresja Liniowa 25

3.3.5. Średnia ważona 28

4. Arkusze kalkulacyjne 30

5. Edytory tekstu 43

6. Bazy danych 47

Bibliografia 53

1. Podstawy obsługi komputera

1.1. Systemy operacyjne

System operacyjny jest zbiorem oprogramowania, które zarządza zasobami sprzętowymi umożliwiając użytkownikowi uruchomianie aplikacji nie ładujących się samodzielnie na danej maszynie (komputerze, telefonie, odbiorniku gps itp.). System operacyjny steruje między innymi przydzielaniem pamięci oraz czasu procesora dla poszczególnych aplikacji. Można powiedzieć, że system operacyjny stanowi środowisko zapewniające bezkonfliktowy kontakt uruchomionych aplikacji z sprzętem (ang. *hardware*). Aktualne zestawienie różnych systemów operacyjnych działających na różnych maszynach można znaleźć na stronie www Wikipedii [1]. Większość komputerowych systemów operacyjnych składa się z:

— jądra systemu (*kernel*) odpowiedzialnego za komunikację aplikacji z urządzeniami, zarządzanie czasem procesora i przydzielanie pamięci,
— powłoki (*shell*) która służy do komunikacji użytkownika z systemem,
— systemu plików na którym składowane są dane.

Systemy operacyjne można podzielić ze względu na koszty dystrybucji oraz dostępności do kodu źródłowego na otwarte i zamknięte. Zamknięte, komercyjne systemy operacyjne, których najpopularniejszym przedstawicielem jest rodzina systemów Windows własności Microsoft Corporation, są rozpowszechniane odpłatnie bez dostępu do kodu źródłowego. Przeciwieństwem ich są systemy operacyjne o kodzie otwartym dystrybuowane bezpłatnie na przykład na zasadach licencji General Public License GNU [2]. Wersje instalacyjne systemów otwar-

tych można pobrać bezpłatnie z sieci internetowej wraz z kodami źródłowymi. Przykładami takich systemów na komputery klasy PC są FreeBSD oraz Linux.

1.2. Systemy Linuksowe

System operacyjny Linux wraz z całym pakietem aplikacji programem do zarządzania aplikacjami oraz instalatorem nazywamy dystrybucją. Wykaz popularnych dystrybucji można znaleźć na stronie http://distrowatch.com. Ze względu na łatwość instalacji i kompletność oprogramowania warte polecenia są

— openSUSE,

— Fedora,

— Ubuntu,

— Debian.

W tym miejscu należy wymienić również bardzo stabilną dystrybucję SLACKWARE, którą można polecić bardziej zaawansowanym użytkownikom. W systemach Linuksowych występuje wiele odmian środowisk graficznych w których można zawiadywać systemem za pomocą myszki. Do najpopularniejszych obecnie pełnych zintegrowanych środowisk graficznych należą KDE oraz GNOME. Wadą obu tych środowisk jest ich wielkość, która może być obciążeniem dla komputerów ze mniej wydajnymi, starymi jednostkami centralnymi. W takim przypadku dobrze jest używać mniej rozbudowanych środowisk graficznych np: xface, windowmaker itp.

1.3. Powłoka bash i wiersz poleceń

Do komunikacji z systemem można wykorzystać powłokę tekstową bash. Podstawowe i najbardziej przydane komendy wydawane w trybie tekstowym zamieszczono poniżej

`man` podręcznik użytkownika zawierający opisy poszczególnych komend systemowych przykład:

`man -a ls`, wyświetla wszystkie strony podręcznika dotyczące komendy ls

`ls` wyświetla zawartość bieżącego katalogu przykłady:

`ls -h` wyświetla zawartość katalogu podając dane na temat rozmiaru plików itp. w czytelnej dla użytkownika formie

`ls -t` wyświetla pliki w kolejności zgodnej z czasem ostatniej modyfikacji

`ls -r` sortuje pliki w odwrotnej kolejności

`ls -a` wyświetla wszystkie pliki łącznie z plikami ukrytymi w danym katalogu

`rm` kasuje plik

`rm -f` *nazwy plików* kasuje pliki bez dodatkowych pytań

`rm -r *` kasuje rekursywnie zawartość katalogu oraz podkatalogów

UWAGA: kombinację atrybutów `rm -rf *` trzeba stosować z rozwagą, ponieważ skasuje całą zawartość drzewa poczynając od bieżącego katalogu!

`mkdir` zakłada katalog o dane nazwie

`rmdir` *nazwa katalogu* kasuje pusty katalog. Przykład:

`rmdir` *nazwa katalogu*

`cp` kopiuje plik

`cp` *nazwy plików ścieżka i nazwa katalogu docelowego*, przykład: `cp -rv *` ***`nazwa katalogu docelowego`*** kopiuje całą zawartość bieżącego katalogu wraz z podkatalogami do katalogu docelowego.

`mv` przenosi pliki z katalogu do katalogu. Komenda `mv` posiada podobne atrybuty jak komenda `cp`

`pwd` wyświetla ścieżkę bieżącego katalogu

`cd` zmienia katalog

przykład: `cd` .. przechodzi do katalogu wyższego, `cd` przechodzi do katalogu domowego użytkownika, `cd` / przechodzi do katalogu głównego

`cat` *nazwa pliku* wyświetla zawartość pliku bezpośrednio na ekran

`more`, lub `less` komendy te wyświetlają zawartość plików tekstowych stronami na ekran

`top` bardzo przydatny program pokazujący uruchomione procesy na danej maszynie podjąć również ich numery PID (*Retrieve process identifiers*)

`ps` wyświetla uruchomione w danej powłoce procesy

przykłady: `ps -u` ***`nazwa użytkownika`*** wyświetla wszystkie procesy uruchomione przez danego użytkownika

`ps -a` wyświetla wszystkie uruchomione procesy

`kill` wysyła sygnały sterujące uruchomionemu przez użytkownika procesowi o danym numerze PID. Przykład: `kill 2011` przerywa działanie procesu o PID=2011. Listę dostępnych sygnałów sterujących można uzyskać komendą `kill -l`

`nohup` *nazwa zadania* & uruchamia zadanie w „tle". Zadanie to będzie aktywne po wylogowaniu się użytkownika z danej maszyny.

`grep` *szukany ciąg znaków* nazwa przeszukiwanego pliku] szuka w danych pliku tekstowym ciągów znaków

`find` *przeszukiwany katalog* -name *nazwa szukanego pliku* szuka pliku o danej nazwie

Powyższe komendy dla uzyskania zadanego efektu można łączyć w potoki używając separatora `|`. Przykład: Komenda

```
cat plik.txt | grep Ania
```

wyświetli na wejście programu grep zawartość pliku `plik.txt`, po czym grep wyświetli jedynie te linie, które będą zawierać słowo Ania.

Wyniki działania komend wyświetlane na ekran można przekierować do pliku stosując operatory: `>` (zapisz do nowego pliku), `>>` (dopisz do pliku). Chcąc zapisać działanie poprzedniej komendy do pliku wystarczy napisać:

```
cat plik.txt | grep Ania > wynik.txt
```

2. Sieci i protokoły komunikacyjne

2.1. protokoły komunikacyjne

TCP/IP (Transmition Control Protocol/Internet Protocol) jest to zbiór protokołów umożliwiających transmisję danych oraz wzajemną komunikację między komputerami w internecie oraz sieciach lokalnych. Protokół TCP/IP składa się z czterech abstrakcyjnych warstw (Layers): *Link Layer, Internet Layer, Transport Layer, Application Layer*. Każda z warstw jest odpowiedzialna za rozwiązywanie pewnego zakresu zadań. Link Layer jest powłoką o najniższym poziomie i składa się z zestawu procedur będącym ogniwem łączącym (*link*) osprzęt komunikacyjny danego komputera (np. kartę sieciową) z siecią do której lokalnie podłączony jest dany komputer (często zwany hostem). Internet Layer zapewnia komunikację pomiędzy hostem lokalnym a hostem docelowym (mogącym należeć do innej sieci), przesyłając przez węzły sieci (nody) pakiety danych. Do celów identyfikacji poszczególnych hostów Internet Layer posługuję się strukturą adresów IP (Internet Protocol). Internet Layer niejako konstytuuje sieć internetową. Do bezpośredniej komunikacji między poszczególnymi hostami służy zbiór narzędzi i protokołów zawartych w Transport Layer, między innymi TCP (Transmission Control Protocol) oraz UDP (User Datagram Protocol). Narzędzia i protokoły obsługujące różne usługi sieciowe takie jak np. www, ftp, są zawarte w Application Layer. Koordynują one współdziałanie uruchomionych aplikacyjnych na skomunikowanych wzajemnie hostach.

Ze względu na widoczność z zewnątrz możemy podzielić adresy IP na adresy

sieci prywatnych (16 bitowe od 192.168.0.0 – 192.168.255.255 według normy IPv4) oraz adresy zewnętrzne transmitowane do globalnej sieci internetowej.

2.2. Aplikacje internetowe

Do obsługi podstawowych usług sieciowych mamy szeroki wybór aplikacji:

— WWW (*word wide web*) – przeglądarki internetowe firefox, internet explorer, opera, google chrome etc

— poczta elektroniczna – klienci poczty internetowej:outlook, thunderbird, pine, mutt, oprogramowanie obsługujące pocztę przez www, etc.

— praca na zdalnym terminalu ssh (*secure shell*)

— kopiowanie plików: ftp, scp.

— kryptografia: gpg, gpg2

Skupimy się obecnie na aplikacjach związanych z bezpieczeństwem komunikacji oraz podpisywaniem i szyfrowaniem poczty elektronicznej.

2.2.1. OPEN SSH

Aplikacje typ `ssh` zapewniają szyfrowaną transmisję danych w architekturze klient-serwer. Użytkownik może być przez nie rozpoznawany na wiele sposobów. Aplikacje ssh zawierają szereg protokołów do obsługi zdalnych terminali oraz protokoły służące do zdalnego przesyłania plików (`scp`, `sftp`).

Przykłady zastosowań:

`ssh login@nazwa_hosta` Otwiera terminal na zdalnym komputerze

`ssh -X -C login@nazwa_hosta` Otwiera terminal na zdalnym komputerze, pozwalając na przesyłanie grafiki z X-windows (`-X`) oraz kompresując strumień danych (`-C`)

`ssh -Y login@nazwa_hosta` Otwiera terminal na zdalnym komputerze, włączając dodatkowe zabezpieczenia przy przesyłaniu grafiki z X-windows (`-Y`)

`scp login@nazwa_hosta:ścieżka_dostępu_do_pliku/plik.txt katalog_docelowy`
kopiuje plik.txt z komputera zdalnego do katalogu docelowego na komputerze lokalnym
`scp -r login@nazwa_hosta:ścieżka_dostępu_do_katalogu/* katalog_docelowy`
kopiuje rekursywnie całą zawartość katalogu na komputerze zdalnym do katalogu docelowego na komputerze lokalnym

Pod systemami rodziny MS Windows można uzyskać dostęp do narzędzi ssh instalując pakiet puTTY.

2.2.2. Szyfrowanie Danych, GPG

Do szyfrowania poczty elektronicznej oraz plików na dysku można używać pakietu PGP (*Pretty Good Privacy*) [3]. PGP umożliwia szyfrowanie danych za pomocą metod kryptograficznych opartych na kluczu symetrycznym oraz metod wykorzystujących klucz publiczny. Wersja PGP rozpowszechniana na licencji GNU dostępna jest na praktycznie wszystkie popularne systemy operacyjne. Poniżej omówimy podstawowe operacje, które umożliwią nam szyfrowanie informacji za pomocą pakietu GPG. Pełną dokumentację tego pakietu można znaleźć na stronie dystrybucji [4].

1. Generacja klucza prywatnego

   Pracę z programem GPG należy zacząć od wygenerowania klucza prywatnego. Klucz prywatny będzie zabezpieczony hasłem i nie powinien być on rozpowszechniany. Aby wygenerować klucz prywatny należy wydać komendę:
   `gpg --gen-key`
   i odpowiedzieć na kilka pytań dotyczących:
   — typu klucza (Do zastosowań studenckich wartości domyśle są wystarczające)

— terminu ważności hasła (Jeśli planujemy używać klucza tylko na własne potrzeby, możemy wygenerować klucz bezterminowo. W przypadku, gdy planujemy używać PGP do podpisywania dokumentów przydatne może się okazać wybranie rocznego terminu ważności klucza. Każdy klucz prywatny może być w dowolnym momencie unieważniony przez właściciela.

— danych osobowych takich jak imię nazwisko adres e-mail. Dane te są potrzebne do prawidłowej identyfikacji właściciela w bazie danych z kluczami. Można klucz opatrzyć komentarzem np. sugerującym jego zastosowanie.

— Na koniec jesteśmy pytani o hasło dostępu do klucza prywatnego. Podane hasło należy koniecznie zapamiętać ponieważ bez niego klucz jest bezużyteczny.

2. Generacja klucza publicznego. Klucz publiczny można swobodnie rozpowszechniać. Za jego pomocą inny użytkownik PGP może zaszyfrować wiadomość w taki sposób, że będzie czytelna jedynie dla właściciela klucza publicznego. Klucz publiczny generujemy komend :

   ```
   gpg --armor --output pubkey.txt --export 'twoje Imię Nazwisko'
   ```

3. Rejestracja klucza publicznego. Klucz publiczny można zarejestrować w ogólnie dostępnej bazie danych. Ułatwi to dostęp do niego pozostałym użytkownikom PGP. Rejestracji klucza publicznego można dokonać wydając polecenie:

   ```
   gpg --send-keys 'Your Name' --keyserver hkp://subkeys.pgp.net
   ```

4. Klucz publiczny możemy w dowolnej chwili wyeksportować do pliku stosując komendę

   ```
   gpg --export 'Your Name' > mypublickey.pgp
   ```

   Jak już wcześniej wspomniano klucz publiczny można rozesłać naszym znajomym. Znajomość naszego klucza umożliwi im szyfrowanie poczty w taki sposób, że będzie ona czytelna tylko dla właściciela klucza.

5. rejestrację w dyskowej podręcznej bazie danych kluczy publicznych innych użytkowników z którymi chcemy prowadzić szyfrowaną korespondencję prze-

prowadzamy komendą:

```
gpg --import secret.key
```

Po wygenerowaniu i rejestracji kluczy możemy przejść do szyfrowania danych. Używając programu gpg możemy w prosty sposób zaszyfrować dowolny plik na dysku. Dla przykładu, aby zaszyfrować plik `plik.txt` w taki sposób aby był dostępny tylko i wyłącznie dla Ciebie wystarczy napisać

```
gpg --encrypt --recipient 'Twoje imię' plik.txt
```

argument `--encrypt` (w skrócie `-e`) uruchamia szyfrowanie, natomiast `--recipient` (w skrócie `-r`) mówi dla kogo plik jest szyfrowany.

Plik `plik.txt.gpg` może być rozszyfrowany komendą:

```
gpg --output plik.txt --decrypt plik.txt.gpg
```

W przypadku gdy chcemy zaszyfrować wiadomość w taki sposób, aby tylko adresat listu (Jaś Kowalski) mógł ją odczytać, to musimy postępować następująco:

— Sprawdzić czy mamy w dyskowej bazie danych klucz publiczny Jasia Kowalskiego

```
gpg --list-keys
```

Jeśli wśród wyświetlonych kluczy jest klucz Jasia, to możemy zaszyfrować dla niego pocztę komendą:

```
gpg --encrypt --recipient 'Jaś Kowalski' list.txt
```

Utworzony w ten sposób plik list.txt.gpg możemy wysłać jako załącznik e-mailem do Jasia.

— Jeśli nie dysponujemy kluczem publicznym Jasia to możemy spróbować znaleźć klucz przeszukując bazę danych

```
gpg --search-keys 'Jas_Kowalskiwp.pl' --keyserver hkp:subkeys.pgp.net
```

lub prosić Jasia o przesłanie nam klucza publicznego e-mailem. Po czym wykonujemy operacje z punktu pierwszego.

W przypadku gdyby doszło do złamania naszego klucza prywatnego możemy go unieważnić dysponując uprzednio wygenerowanym i przechowanym w bezpiecz-

nym miejscu (np. na dysku cdrom) certyfikatem unieważniającym. Certyfikat taki można wygenerować komendą:

```
gpg --output revoke.asc --gen-revoke 'name'.
```

Na zakończenie wspomnijmy, iż niechciane klucze możemy kasować przy pomocy komendy:

```
gpg --delete-key 'była_przyjaciółka@wp.pl'
```

3. Podstawy teorii błędu pomiarowego

3.1. Pojęcia wstępne

Chcąc poznać zależności i procesy zachodzące w danym układzie, musimy wpierw zebrać informacje o układzie, a następnie dokonać ich analizy. W zależności do układu dobieramy sposób w jaki będziemy dany układ badać. Metodyka badania układu będzie zależała również od celu jaki chcemy osiągnąć oraz od środków finansowych i czasu jaki możemy przeznaczyć na proces badawczy. Dla przykładu: z reguły lekarz pierwszego kontaktu mając przed sobą pacjenta wyglądającego na przeziębionego (pierwsza informacja płynąca z wyglądu ogólnego pacjenta) przeprowadzi z nim krótki wywiad zaczynający się od pytania „Co Panu dolega?". Wysłuchawszy pacjenta opowiadającego o temperaturze (38.1°C) bólach w stawach i mięśniach oraz ogólnym „rozbiciu" lekarz obejrzy gardło oraz osłucha stetoskopem pacjenta. Po dokonaniu tych czynności zreguły zostają zaordynowane leki oraz wybrany jest sposób terapii (w tym przypadku najpewniej odpoczynek w łóżku).

W powyżej przytoczonym przykładzie układem badanym jest chory, a lekarz go badający dysponując małą ilością czasu oraz środków stara się zdobyć jak najwięcej ogólnych informacji o układzie. Jeśli intuicja lekarza nie zostanie zaniepokojona to najpewniej zostanie wybrana standardowa metoda leczenia, natomiast gdy coś go zaniepokoi to pacjent dostanie skierowanie na „badania".

Co w tym przypadku należy rozumieć pod pojęciem badania? Przed odpowiedzeniem na to pytanie musimy zdefiniować dwa pojęcia:

Definicja 1. Wielkością fizyczną będziemy nazywać mierzalną cechę ciała lub

zjawiska. Ilościowo każdą wielkość fizyczną b wyrażamy jej miarą, która składa się z dwu członów: liczby $\{b\}$ zwanej wielkości miary oraz jednostki miary $[b]$

$$b = \{b\} \ \ [b].$$

Definicja 2. Pomiarem nazwiemy zespół czynności wykonanych w celu ustalenia miary określonej wielkości fizycznej

W świetle powyższych definicji skierowanie na badania morfologiczne krwi będzie oznaczało wykonanie zbioru pomiarów polegających na doświadczalnym wyznaczeniu z próbki krwi pobranej od pacjenta wielkości fizycznych takich jak np: ilość czerwonym krwinek w mm^3 (RBC [(ilość mln)/mm^3], hemoglobiny (HGB $[g/(100ml)]$) etc.

Ćwiczenie:
Przelicz 100ml na mm^3.

Najprostszym rodzajem pomiarów jest pomiar bezpośredni, w którym mierzoną wielkość fizyczną porównujemy bezpośrednio z wzorcem. Z tym rodzajem pomiarów stykamy się bardzo często w życiu codziennym np. dokonując pomiaru długości linijką, czy też mierząc upływ czasu zegarem. Formalnie definicję pomiaru bezpośredniego można zapisać w postaci

Definicja 3. Pomiary bezpośrednie jest to rodzaj pomiarów, w których miarę wielkości fizycznej otrzymujemy przez bezpośrednie porównanie z wzorcem

Nie wszystkie wielkości fizyczne mogą być wyznaczone na drodze pomiaru bezpośredniego. Wprowadźmy definicję wielkości fizycznej złożonej

Definicja 4. wielkość fizyczna złożona jest to wielkość fizyczna (oznaczmy ją jako z), która jest funkcją wielkości fizycznych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dających się określić za pomocą pomiaru bezpośredniego. W skrócie możemy zapisać:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Jak wynika z powyższej definicji miarę wielkości fizycznej złożonej, z można wyznaczyć przez dokonanie pomiaru pośredniego. W trakcie którego w pierwszej kolejności wyznaczamy miary wielkości fizycznych bezpośrednio mierzalnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ od których zależy wielość z. Następnie wyznaczone w ten sposób wartości podstawiamy do zależności funkcyjnej $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Przykład 1:

Opór opornika R z prawa Ohma dany jest wzorem

$$R = \frac{U}{I}, \tag{3.1}$$

gdzie U jest spadkiem napięcia na oporniku, a I natężeniem prądu przepływającym przez opornik. Z wzoru (3.1) widzimy, iż R jest wielkością fizyczną złożoną, którą można wyznaczyć wykonując pomiary:

— pomiaru spadku napięcia U woltomierzem,

— natężenia prądu amperomierzem.

Wyznaczone w ten sposób miary U oraz I po podstawieniu do wzoru (3.1) dadzą na wartość oporu R.

Przykład 2:

Przyśpieszenie ziemskie może być w bardzo prosty sposób zgrubnie wyznaczone za pomocą wahadła matematycznego, którego dobrym przybliżeniem będzie mała ciężka kulka zawieszona na długiej nierozciągliwej nici. Po przeanalizowaniu sił działających na kulkę (naciąg nici oraz siła ciężkości) i rozwiązaniu równania ruchu Newtona dla bardzo małych kątów[1] dostaniemy wzór na okres wahadła matematycznego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdzie l jest długością wahadła matematycznego, a g przyśpieszeniem ziemskim. Z powyższego wzoru możemy wyznaczyć przyśpieszenie ziemskie w funkcji długości l oraz okresu T

$$g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}. \tag{3.2}$$

[1] Szanowny czytelniku potraktuj to jako zadanie do samodzielnego rozwiązania!

obydwie wielkości fizyczne l i T są bezpośrednio mierzalne i mogą posłużyć do wyznaczenia g.

Przykład 3:

Ilość czerwonym krwinek w mm^3 (RBC [(ilość mln)/mm^3], jest również wielkością wyznaczaną pośrednio.

Podsumowując niniejszy podrozdział powinniśmy napisać jasno, że celem wykonania i opracowania pomiarów jest możliwie najlepsze oszacowanie rzeczywistej (dokładnej) wartości wielkości fizycznej.

3.2. Rodzaje błędów i niepewności pomiarowych

W praktyce laboratoryjnej, każdy pomiar jest obarczony pewnym błędem pomiaru[2]. Błędy pomiarowe mogą mieć różne źródło. Najprostszym rodzajem błędu, łatwym do wychwycenia przy analizie tabeli pomiarowych jest błąd gruby. Stanowi on zwykłą pomyłkę przy prowadzeniu pomiaru. Wartość pomiaru obarczona błędem grubym znacząco odbiega od wartości uzyskanych w innych pomiarach tej samej wielkości fizycznej i przy opracowaniu wyników musi być koniecznie usunięta z tabeli zawierającej wyniki. W przypadku nieusunięcia błędu grubego z tabeli pomiarowej, może on znacząco wpłynąć na końcowe rezultaty i zafałszować wyniki.

Błędem pomiaru dużo trudniejszym do zauważenia w trakcie prowadzenia pomiarów jest błąd systematyczny (niepewność systematyczna). Powoduje on przesunięcie wyników pomiaru względem wartości rzeczywistej tylko w jedną stronę. Błąd systematyczny Może mieć swoje źródło w źle wykalibrowanej aparaturze pomiarowej lub w samej naturze metody pomiarowe. Błąd systematyczny daje się ujawnić jedynie po zmianie aparatury pomiarowej lub zmianie całej metody pomiaru. Przyczyny powstawania niepewności systematycznych zilustrujemy na

[2] W nowej terminologii błędy pomiaru nazywa się często niepewnościami pomiarowymi. W niniejszym skrypcie będziemy używać tych dwu sformułowań wymiennie

dwu przykładach.

Przykład 1.

Ekspedientka ze sklepu warzywniczego waży towary na wadze szalkowej dysponując starymi lekko „obłupanymi" i skorodowanymi odważnikami. W tym przypadku wyniki pomiaru będą permanentnie zawyżane ponieważ wzorzec masy używany w trakcie pomiaru nie jest zgodny ze standardem. Ekspedientka będąc świadoma faktu, że stosowany przez nią wzorzec masy ma pewne niedoskonałości, przez co może „niedoważać" warzywa, zawsze uczciwie dorzuca trochę towaru. Niemniej popełniany w trakcie pomiaru błąd systematyczny może ją narazić na kłopoty w trakcie kontroli prowadzonej przez Państwowową Inspekcję Handlu i Usług.

Przykład 2.

Podczas wyznaczania przyśpieszenia Ziemskiego za pomocą wzoru (3.2) popełniamy błąd systematyczny związany z metodą pomiaru. Wzór (3.2) został wyprowadzony przy założeniu małych kątów i jest jedynie pierwszym wyrazem z rozwinięcia w szereg Taylora. W związku z tym stosując wzór (3.2) popełniamy błąd systematyczny ΔR związany z zaniedbaniem w rozwinięciu wyrazów wyższego rzędu. Można to zilustrować wzorem

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} + \Delta R \approx 4\pi^2 \frac{l}{T^2}.$$

Zanim przejdziemy do omówienie pozostałych rodzajów błędów pomiarowych, wprowadźmy pojęcie serii

Definicja 5. Seria pomiarowa jest to zbiór różnych wartości mierzonej wielkości fizycznej otrzymanych za pomocą wielokrotnie powtarzanego pomiaru prowadzonego w tych samych warunkach fizycznych oraz tym samym przyrządem pomiarowym.

Uzyskane podczas serii pomiarowej wartości miary mierzonej wielkości fizycznej będą się między sobą różnić. Różnica ta jest spowodowana występowaniem

błędów przypadkowych (niepewności statystycznych). Błędy przypadkowe mogą być powodowane przez niewielkie fluktuacje stanu środowiska, w którym prowadzimy pomiar lub przez drobne niedokładności wynikające z niedoskonałości odczytu.
Przykład 1.
Przy wielokrotnym pomiarze długości stołu liniałem (miarką), możemy przypadkowo niedokładnie zestawić początek stołu z początkiem liniału.
Przykład 2.
Dokonując wielokrotnego pomiaru czasu spadku ciała z wysokości 1.5 metra, możemy nie zawsze włączyć i wyłączyć stoper idealnie w chwili startu bądź zatrzymania ciała. Taki sposób prowadzenia pomiaru doprowadzi do sporych błędów przypadkowych.

Błędy przypadkowe z punktu widzenia osoby prowadzącej pomiar mają jedną podstawową zaletę: są opisane prawami statystki. Odpowiednio stosując te prawa, można dążyć do minimalizacji błędu przypadkowego przez co będziemy możliwie najlepiej przybliżać wartość rzeczywistą danej wielkości fizycznej. Niemniej należy pamiętać, że nigdy nie osiągniemy dokładności większej niż ta, na którą pozwalają nam przyrządy pomiarowe. Zagadnieniami dotyczącymi niepewności zajmiemy się w następnym rozdziale.

3.3. Opracowanie pomiarów

Formalnie, opracowując pomiary wielkość fizycznej x będziemy dążyli do określenia prawdopodobieństwa, że wartość dokładna x_0 będzie leżeć w przedziale określonym przez uzyskaną przez nas wartość pomiarową $\tilde{x}$ plus minus oszacowana niepewność pomiarowa Δx

$$\tilde{x} - \Delta x \leqslant x_0 \leqslant \tilde{x} + \Delta x.$$

W przypadku gdy pomiary wielkości fizycznej prowadzone są w jednej serii pomiarowej, wartość prawdziwą można dobrze przybliżać licząc średnią arytmetyczną z wszystkich wyników uzyskanych w danej serii. Pozostaje nam obecnie oszacować niepewność pomiarową. Zadanie to można poprawnie wykonać stosując prawa statystki. Wynik pomiaru powinniśmy przedstawić w postaci

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)[\text{jednostka miary}],$$

gdzie niepewność pomiarową Δx podajemy z dokładnością do jednej cyfry znaczącej, a wartość średnia $\bar{x}$ jest zaokrąglona odpowiednio do wartości niepewności pomiarowej. Uwaga! Po wykonaniu serii pomiarów, zanim przejdziemy do statystycznej analizy niepewności pomiarowych, należy zgrubnie oszacować jakość wyników oraz wielkość niepewności pomiarowych.

Przykład: Przy prowadzeniu pomiaru długości blatu kuchennego liniałem o całkowitej długości 1m z podziałką co 1 mm otrzymano wartości, które zebrano w tabeli (3.1).

Tabela 3.1.

lp.	d [cm]
1	232.2
2	230.4
3	229.5
4	231.2
5	230.9
6	230.8
7	231.3
8	229.6

Patrząc na te wartości widzimy, że rozrzut wyników między największą a najmniejszą wartością zmierzoną wynosi 2.7cm, a wartość średnia $\bar{d} = 230.8$cm. Rozrzut wyników w tym pomiarze jest bardzo duży. Gdybyśmy przekazali wynik pomiaru 230.8cm stolarzowi z prośbą o zrobienie nadstawki, która ma stać na blacie. Przy zakładaniu nadstawki nadstawki mogłoby się okazać, że nie zlicuje się ona z blatem. Przy czym stolarz nie przyjmie naszej reklamacji, ponieważ wykonał nadstawkę dokładnie według naszego wymiarowania, posługując się przy pomiarach długą miarą stolarską. Zapewne, gdybyśmy stolarzowi podali poprawnie wynik pomiaru w postaci wartość średnia plus minus oszacowana niepewność pomiarowa ($\hat{d} = (230.8 \pm 0.9)$ cm) oszczędzilibyśmy sobie rozczarowań. Stolarz mając zastrzeżenia do naszego pomiaru przyszedłby do nas do domu i

samodzielnie wykonał kilkukrotnie pomiar długą miarą stolarską z dokładnością praktycznie równą dokładności przyrządu.

Dobrym sposobem na wyrobienie sobie opinii na temat jakości pomiarów wielkości fizycznej x, jest odniesienie oszacowanego błędu pomiarowego Δx do wartości najbardziej prawdopodobnej x_{np} i przemnożenie przez 100%. Otrzymany w ten sposób błąd procentowy zapisujemy wzorem

$$\text{błąd procentowy} = \left|\frac{\Delta}{x_{np}}\right| 100\%. \tag{3.3}$$

3.3.1. Błędy przypadkowe i statystyka

W przypadku poprawnie przeprowadzonych pomiarów wielkości x, w których wpływ błędów systematycznych na wynik pomiaru jest zaniedbywalnie mały, o dokładności pomiaru będą stanowiły błędy przypadkowe oraz dokładność samej aparatury pomiarowej. Wpływ błędów przypadkowych na wynik pomiaru można łatwo oszacować wprowadzając podstawowe pojęcia statystki. Jak już wspomniano wartość najbardziej prawdopodobna x_{np} wielkości fizycznej x, może być przybliżana przez średnią arytmetyczną ($\bar{x}$) z wartości x_i uzyskanych w serii pomiarowej

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}, \tag{3.4}$$

gdzie N jest liczbą pomiarów. Aby scharakteryzować rozrzut wyników wokół wartości prawdziwej μ zdefiniujmy odchylenie standardowe

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N}}, \tag{3.5}$$

które jest miarą średniej niepewności pomiarowej. Niestety przy opracowaniu danych pomiarowych powyższy wzór jest bezużyteczny, ponieważ do obliczenia wartości σ potrzebna jest znajomość wartości prawdziwej μ, która niestety nie jest dostępna w eksperymencie. Przy opracowaniu pomiarów stosuje się następujący wzór na odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}. \tag{3.6}$$

W powyższym wzorze w stosunku do (3.5) wartość rzeczywistą zastąpiono wartością średnią, a wartość mianownika obniżono o jeden $(N-1)$. Dokładne wyjaśnienie zmiany czynnika w mianowniku z N na $N-1$ znajduje uzasadnienie w teorii, która wykracza poza zakres niniejszego skryptu. Obecnie wystarczy nam uświadomienie sobie faktu, że zmniejszenie wartości mianownika do $N-1$ we wzorze (3.6) pozwala na szacowanie od góry niepewności pomiarowej, która mogłaby być zaniżona przez wprowadzenie do wzoru (3.6) wartości średniej $\bar{x}$.

Zdefiniowane powyżej odchylenie standardowe σ_x opisuje odchylenie pojedynczego pomiaru, natomiast odchylenie standardowe wartość średniej $\sigma_{\bar{x}}$ opisane jest wzorem

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}. \tag{3.7}$$

Analizując powyższy wzór możemy zauważyć, że zwiększenie liczby pomiarów w serii pomiarowej skutkuje zmniejszeniem niepewności wartości średniej. Skalowanie wzoru (3.7) jest jednak bardzo wolne. Na przykład, aby zmniejszyć wartość $\sigma_{\bar{x}}$ o jeden rząd wielkości, musimy zwiększyć liczbę pomiarów z jednego $(1 = \sqrt{1})$ do stu $(10 = \sqrt{100})$.

3.3.2. Reguła przenoszenia błędów

W przypadku wielkości fizycznej mierzonej pośrednio

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N) \tag{3.8}$$

jej wartość najbardziej prawdopodobną będziemy obliczać wstawiając do wzoru (3.8) wartości średnie wielkości mierzonych bezpośrednio $\bar{x}_i$

$$z = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_N). \tag{3.9}$$

W przypadku gdy $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_N$ są niezależnymi, przypadkowymi niepewnościami pomiarowymi zmierzonych wielkości $x_1, x_2, \ldots, x_N$, to niepewność pomiarowa wielkości zależnej z będzie dana wzorem

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\Delta x_N\right)^2}. \tag{3.10}$$

W powyższym równaniu $\frac{\partial}{\partial x_i}$ oznacza pochodną cząstkową po zmiennej x_i.

Przykład 1:

Oblicz niepewność pomiarową oporu opornika, gdy wartość natężenia została wyznaczona jako $I = (0.6 \pm 0.1)A$, a napięcie $U = (1.2 \pm 0.2)V$.

Z prawa Ohma opór dany jest wzorem

$$R = \frac{U}{I}.$$

Obliczmy najpierw pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I},$$
$$\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}.$$

Ostatecznie dostajemy

$$\Delta R = \sqrt{\left(\frac{1}{I}\Delta U\right)^2 + \left(\frac{U}{I^2}\Delta I\right)^2}. \tag{3.11}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy

$$R = (2.0 \pm 0.5)\Omega.$$

Przykład 2:

Wyznaczmy wzór na niepewność pomiarową przyśpieszenia ziemskiego wyznaczonego za pomocą wahadła matematycznego (patrz przykład 2 rozdział 3.1). Przypomnijmy g dane jest wzorem

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}. \tag{3.12}$$

Obliczmy odpowiednie pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial g}{\partial l} = 4\pi^2 \frac{1}{T^2},$$
$$\frac{\partial g}{\partial T} = -8\pi^2 \frac{l}{T^3}.$$

Wzór na niepewność Δg ma postać

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\Delta l\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 l}{T^3}\Delta T\right)^2}. \tag{3.13}$$

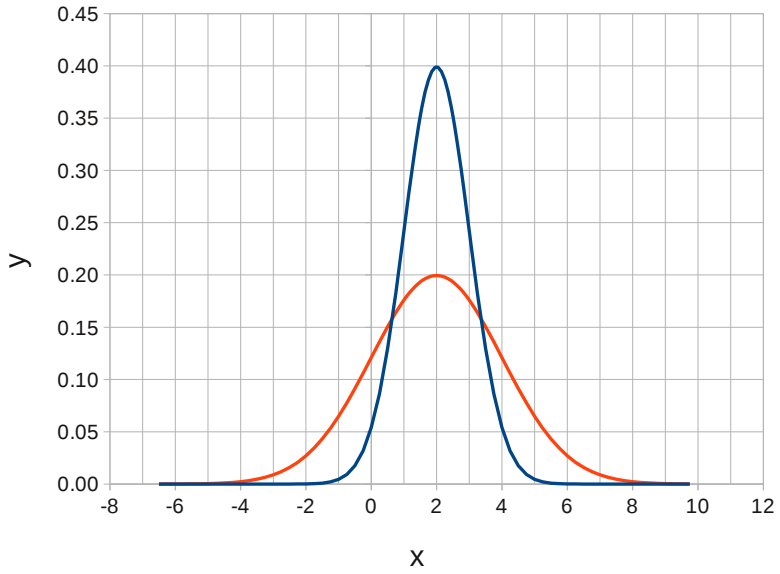
3.3.3. Rozkład normalny

Jeśli wynik pomiaru jest obarczony niewielkimi błędami przypadkowymi, a błędy systematyczne są zaniedbywalne, otrzymywane w pomiarach wielkości fizycznej X wartości x_i będą podlegać rozkładowi normalnemu (Gaussa), który będzie posiadał maksimum dla wartości najbardziej prawdopodobnej x_{np}. Znormalizowana funkcja opisująca rozkład Gaussa dana jest wzorem

$$f_{x_{np},\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - x_{np})^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{3.14}$$

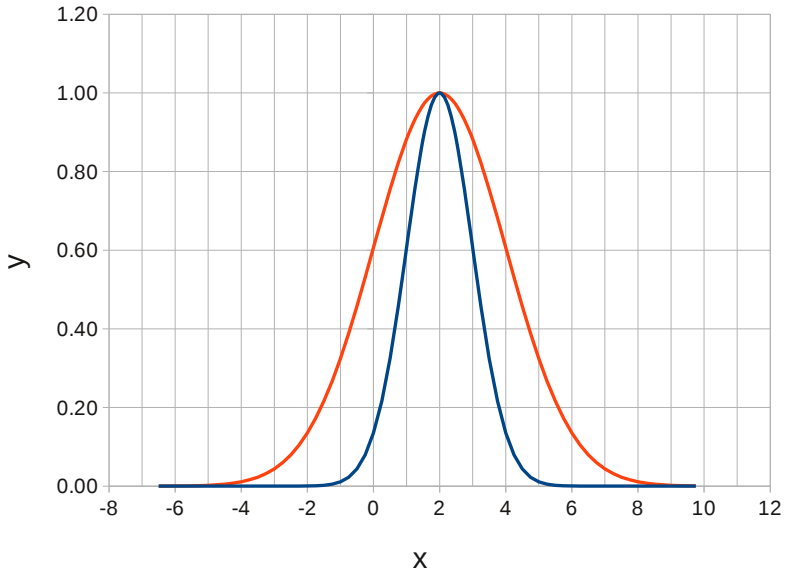
Narysujmy rozkład Gaussa dla wartości najbardziej prawdopodobnej $x_{np} = 2$

Rysunek 3.1. Rozkład normalny dla $x_{np} = 2$. Kolorem niebieskim i czerwonym oznaczono odpowiednio krzywe dla $\sigma = 1$ oraz $\sigma = 2$



oraz $\sigma = 1$, a następnie dla $\sigma = 2$. Z rysunku 3.1 widać, że szerokość krzywej Gaussa jest regulowana parametrem σ im mniejsza jest jego wartość tym bardziej funkcja (3.14) jest skupiona wokół wartości najbardziej prawdopodobnej. We wzo-

Rysunek 3.2. Funkcje $\exp\left[-\frac{(x-x_{np})^2}{2\sigma^2}\right]$ dla $x_{np} = 2$. Kolorem niebieskim i czerwonym oznaczono krzywe odpowiednio dla $\sigma = 1$ oraz $\sigma = 2$



rze (3.14) stała $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ jest czynnikiem normalizacyjnym, który zapewnia że dla każdego σ całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2_{x_{np},\sigma}(x) d\, x = 1. \tag{3.15}$$

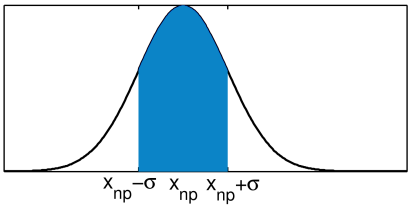
Gdybyśmy zapomnieli tego czynnika funkcje z rysunku 3.1 nie normalizowałby się do jedynki, a ich wykresy miały by postać jak na rysunku 3.2.

Wyrażenie

$$P(x, x + dx) = f_{x_{np},\sigma}(x)dx \tag{3.16}$$

mówi o prawdopodobieństwie, że wynik dowolnego pomiaru znajdzie się w przedziale $\langle x, x + dx\rangle$[3] przy czym dx jest przyrostem różniczkowym. Aby obliczyć prawdopodobieństwo uzyskania wyników w przedziale $\langle x_{np} - \sigma, x_{np} + \sigma\rangle$ musimy policzyć pole pod krzywą $f_{x_{np},\sigma}(x)$ (patrz rysunek 3.3), co jest równoważne ze znalezieniem całki

Rysunek 3.3. Całkowanie graficzne. Zakreskowane pole pod krzywą wynosi 0.68



$$P(x_{np} - \sigma, x_{np} + \sigma) = \int_{x_{np}-\sigma}^{x_{np}+\sigma} f_{x_{np},\sigma}(x)d\,x \tag{3.17}$$

Wartość tej całki wynosi 0.68. Czyli prawdopodobieństwo uzyskania wyników pomiaru w promieniu σ od wartości najbardziej prawdopodobnej wynosi 68%. Jeśli podwoimy promień do 2σ, to prawdopodobieństwo otrzymania wyniku z przedziału $\langle x_{np} - 2\sigma, x_{np} + 2\sigma\rangle$ wzrośnie do 95.4%. W ogólności prawdopodobieństwo uzyskania wyniku w promieniu $t\sigma$ można policzyć licząc całkę błędu (ERF)

$$ERF(t) = P(x_{np} - t\sigma, x_{np} + t\sigma) = \int_{x_{np}-t\sigma}^{x_{np}+t\sigma} f_{x_{np},\sigma}(x)d\,x \tag{3.18}$$

Wykres tej funkcji przedstawiono na rysunku (3.4). Z wykresu możemy zauważyć, że w promieniu 4σ od wartości najbardziej prawdopodobnej leżą praktycznie wszystkie wartości możliwe do uzyskania w eksperymencie.

Dla rozkładu normalnego możemy zdefiniować wartość średnią jako

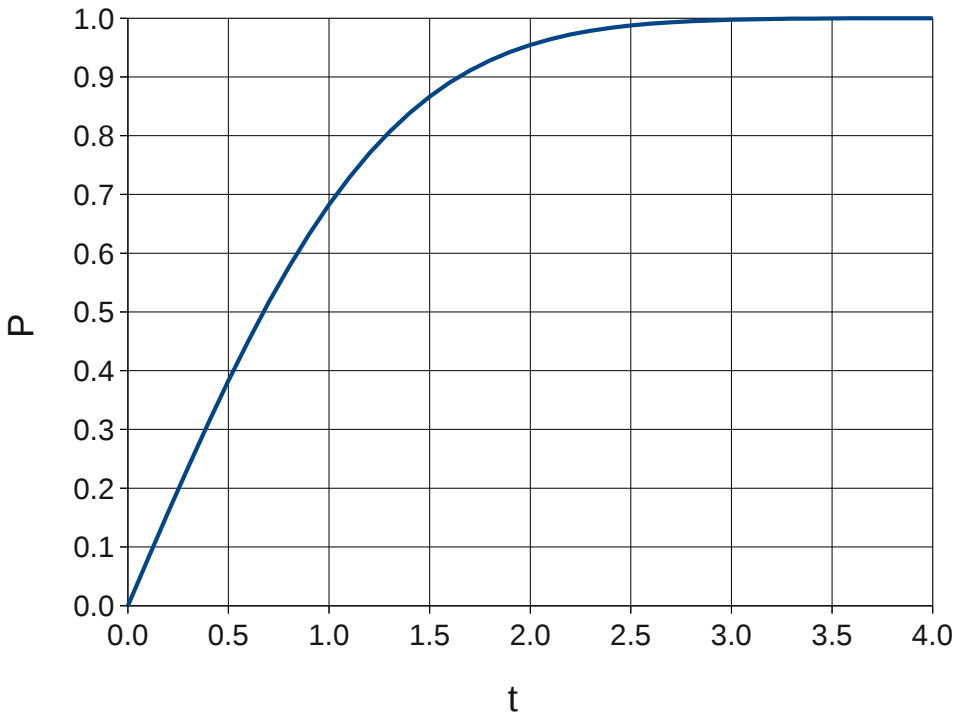
$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{x_{np},\sigma}(x)d\,x. \tag{3.19}$$

Natomiast odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru definiujemy w postaci

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f_{\bar{x},\sigma}(x)d\,x. \tag{3.20}$$

[3] Uwaga: Mówiąc ściślej stwierdzenie to zachodzi dla bardzo długiej serii pomiarowej jako przypadek graniczny

Rysunek 3.4. Funkcja błędu



3.3.4. Regresja Liniowa

Zajmijmy się teraz pomiarami dwu wielkości fizycznych X oraz Y, które są od siebie liniowo zależne. Będziemy chcieli znaleźć równanie prostej $y = ax + b$, która w najlepszy możliwy sposób będzie opisywać zbiór punktów pomiarowych $X \times Y$ gdzie

$$X \times Y = \{(x_i, y_i), x_i \in X \wedge y_i \in Y\}$$

Przyjmijmy następujące założenia wstępne dotyczące wartości pomiarowych:

— o x_i zakładamy, że są obarczone zaniedbywalnie małym błędem pomiarowym,

— zakładamy, że wszystkie punkty ze zbioru Y są obarczone takim samym przypadkowym błędem pomiarowym, a niepewności systematyczne są zaniedbywalnie małe. Przy takim założeniu, każdy y_i podlega rozkładowi Gaussa z taką samą szerokością σ_y.

Postaramy się znaleźć stałe a, b, tak abyśmy mogli z najlepszą możliwą dokładnością estymować wartość najbardziej prawdopodobną $y_i^{np} = ax_i + b$. Jak już wspomnieliśmy, wynik pomiaru y_i podlega rozkładowi normalnemu wyśrodkowanemu wokół swojej wartości najbardziej prawdopodobnej

$$P(y_i) \sim \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_i - ax_i - b)^2}{2\sigma_y^2}}. \tag{3.21}$$

Prawdopodobieństwo całkowite dla pojedynczego pomiaru prawdopodobieństwo jest zadane wzorem (3.21), jednakże prawdopodobieństwo uzyskania wartości $y_1, y_2, \ldots, y_n$ w całej serii pomiarowej będzie równe iloczynowi prawdopodobieństw pojedynczych pomiarów

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_n) = P(y_1)P(y_2)\ldots P(y_n) \sim \frac{1}{\sigma_y^n * \sqrt{2\pi})^n} e^{-\chi^2/2}, \tag{3.22}$$

gdzie

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{\sigma_y^2}. \tag{3.23}$$

Będziemy szukać optymalnych parametrów a, b w taki sposób, aby funkcja (3.22) była minimalizowana. Zachodzi to wtedy gdy wykładnik

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{\sigma_y^2}$$

osiąga minimum. Warunkiem koniecznym na osiąganie przez funkcję χ^2 ekstremum jest zerowanie się pochodnych cząstkowych względem parametrów a, b

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0,$$
$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0.$$

Po podstawieniu (3.23) do powyższych wzorów i wykonaniu rachunków, dostajemy

$$a = \frac{n\left(\sum x_i y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{\Delta}, \tag{3.24}$$

$$b = \frac{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i y_i\right)}{\Delta}, \tag{3.25}$$

gdzie

$$\Delta = n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2 \tag{3.26}$$

W powyższych wzorach sumowanie odbywa się po wszystkich pomiarach ($i = 1, \ldots, n$). Zajmijmy się niepewnościami parametrów a i b oraz wartości y_i. Odchylenie standardowe y_i dane jest wzorem

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2 \tag{3.27}$$

Niepewności a i b można obliczyć korzystając z wartości σ_y oraz reguły przenoszenia błędów. W tym miejscy podamy jedynie końcowe wzory na odchylenie standardowe parametrów a i b

$$\sigma_a^2 = \frac{n\sigma_y^2}{\Delta} \tag{3.28}$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_y^2 \sum x_i^2}{\Delta} \tag{3.29}$$

Wprowadźmy pojęcia współczynnika korelacji liniowej, który jest zdefiniowany wzorem

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\left[\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2\right]^{1/2}}.$$

Współczynnik ten jest bardzo przydatny do oceny, czy zależność między X i Y faktycznie jest liniowa. Współczynnik korelacji liniowej opisuje stopień z jakim zbiór punktów pomiarowych $X \times Y$ oddaje zależność liniową $y = ax + b$. Wartość współczynnika korelacji spełnia nierówność

$$|r| \leqslant 1.$$

Im $|r|$ jest bliższe jedności tym większe jest prawdopodobieństwo, że zmienne X oraz Y są ze sobą liniowo skorelowane. Tabele prawdopodobieństwa dla współczynnika korelacji liniowej można znaleźć w dodatku C bardzo dobrej książki dotyczącej teorii błędu pomiarowego autorstwa Taylora [5].

Przykład 1:

Szybkość zliczeń rozpadów promieniotwórczych N zachodzącej w próbce maleje wykładniczo z czasem

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{3.30}$$

gdzie N_0 jest ilością rozpadów w chwili $t_0 = 0$, a λ oznacza stałą rozpadu promieniotwórczego[4]. Przedstaw równanie (3.30) w postaci nadającej się do zastosowania metody regresji liniowej w celu wyznaczenia λ.

3.3.5. Średnia ważona

Załóżmy, że dysponujemy wynikami pomiarów tej samej wielkości fizycznej otrzymanymi w laboratoriach $A_1, A_2, \ldots, A_N$ za pomocą różnych aparatur pomiarowych

$$\begin{aligned} x &= x_1 \pm \sigma_1 \\ x &= x_2 \pm \sigma_2 \\ &\vdots \\ x &= x_N \pm \sigma_N \end{aligned}$$

Jeśli chcemy uśrednić powyższe wartości to musimy wziąć pod uwagę fakt, że wyniki nie są równo cenne, ponieważ są obarczone różnymi niepewnościami pomiarowymi. W takim przypadku wartość najbardziej prawdopodobną szacuje się licząc średnią ważoną

$$x_{np} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}, \tag{3.31}$$

$$\text{gdzie } w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}. \tag{3.32}$$

Niepewność x_{np} dana jest wzorem

$$\sigma_{x_{np}} = \left(\sum_{i=1}^{N} w_i \right)^{-1/2}. \tag{3.33}$$

[4] określa ona prawdopodobieństwo zajścia rozpadu jednego jądra w jednostce czasu

Ćwiczenie:

Udowodnij słuszność wzoru (3.31) dla przypadku, gdy dysponujemy wynikami uzyskanymi w dwu laboratoriach. Wskazówka: Należy zminimalizować względem wartości najbardziej prawdopodobnej X_{np} wyrażenie na prawdopodobieństwo

$$P_{X_{np}}(x_1, x_2) = P_{X_{np}}(x_1) P_{X_{np}}(x_2) \sim \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} \exp\left[-\frac{(x_1 - X_{np})^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2 - X_{np})^2}{2\sigma_2^2} \right],$$

przy czym wystarczy szukać minimum wykładnika.

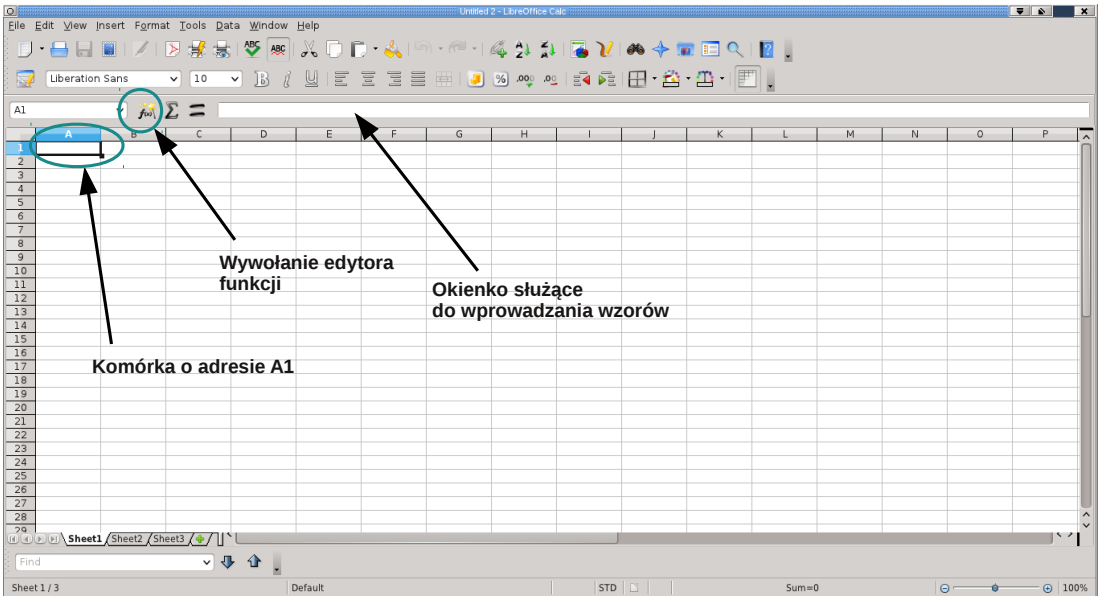
4. Arkusze kalkulacyjne

Arkusze kalkulacyjne są aplikacjami komputerowymi, w których obliczenia prowadzi się w podobny sposób jak w starym papierowym arkuszu księgowym. Arkusz zadany jest w postaci dwuwymiarowej macierzy, w której adresuje się poszczególne komórki podając oznaczenie kolumny (A,B,C,...,Z, AA,...,AZ,...) oraz numer wiersza. Dla przykładu adres pierwszej komórki w lewym górnym rogu będzie miał symbol A1 (patrz rysunek 4.1). Na komputery osobiste dostępna jest spora ilość programów z rodziny arkuszy kalkulacyjnych, do najbardziej popularnych należą:

— Microsoft Excel,

— Libre Office Calc,

Rysunek 4.1. Podstawowe elementy interfejsu arkusza kalkulacyjnego z pakietu Libre Office.

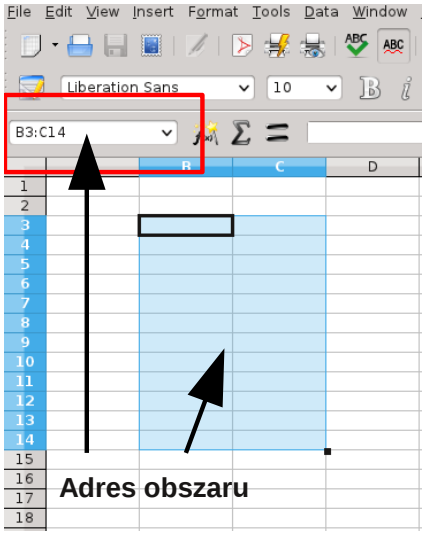


— Gnumeric.

Obecnie intensywnie rozwijane są arkusze kalkulacyjne dostępne on-line przez WWW. Jednym z przedstawicielem tego rodzaju arkuszy jest Google Spreadsheet. Dużą zaletą arkuszy dostępnych przez WWW, jest możliwość pracy w czasie rzeczywistym wielu użytkowników nad tym samym dokumentem. W dalszej części skryptu będziemy posługiwać się aplikacją Libre Office Calc, jednakże podane informację będą również aktualne dla programów pochodzących od innych producentów.

Jak już wspomniano wcześniej, przy pracy z arkuszem kalkulacyjnym możemy odwoływać się do danej komórki podając jej adres. Adresy komórki można podzielić na dwa rodzaje względne i bezwzględne.

Rysunek 4.2. Adresowanie obszarów prostokątnych



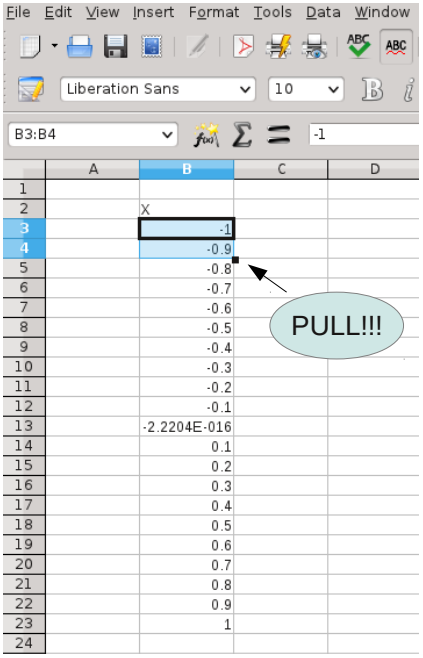
Adres względny komórki podajemy zestawiając ze sobą literę symbolizującą kolumnę i numer odpowiedniego wiersza np. B1. Charakterystyczne dla adresów względnych jest to, że podczas kopiowania formuł matematycznych je zawierających w inne miejsce arkusza podlegają one aktualizacji i zmieniają swoją wartość odpowiednio do miejsca, w które zostały przekopiowane.

Adres bezwzględny danej komórki podajemy poprzedzając symbol kolumny o wiersza znakiem $ np. $B$1. Adresy bezwzględne przy kopiowaniu formuł matematycznych pozostają takie same i odwołuję się przez cały czas do pierwotnie bezwzględnie zaadresowanej komórki. Adresy bezwzględne wygodnie jest stosować przy zadawaniu stałych, z których chcemy korzystać w całym arkuszu.

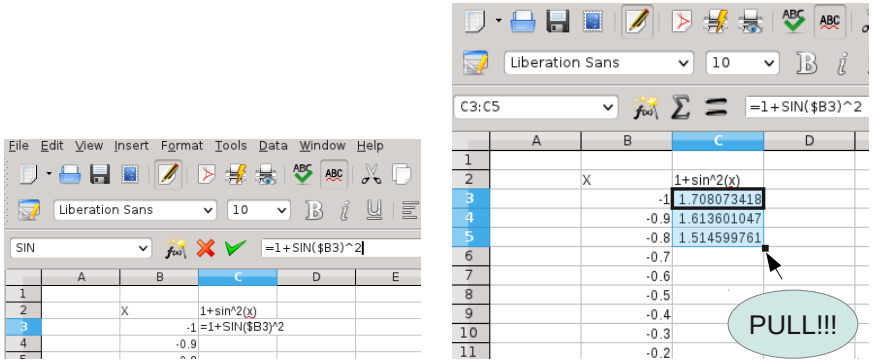
Przy odwoływaniu się do komórek dopuszczalne są sytuacje mieszane, w których kolumna jest adresowana bezwzględnie a wiersz względnie np. $B1, lub odwrotnie kolumna adresowana jest względnie, a wiersz jest adresowany bezwzględnie np. B$1. Jeśli chcemy zaadresować prostokątny obszar (patrz rysunek 4.2) wystarczy, że podamy adres lewego górnego rogu oraz adres prawego dolnego rogu prostokąta. Obszar zaznaczony na niebiesko na rysunku 4.2 adresujemy względnie przez podanie zakresu B3:C14. Adresowanie bezwzględne powyższego obszaru będzie miało postać $B$3:$C$14.

W arkuszu kalkulacyjnym łatwo można wygenerować ciąg liczb różniących się o stałą wartość (ciąg arytmetyczny). W tym celu wystarczy wpisać bezpośrednio pod sobą w jednej kolumnie dwie kolejne liczby różniące się o zadaną wartość, a następnie zaznaczyć zajęty przez te liczby obszar myszką. Dalej musimy przeciągnąć myszką kwadracik powstały w prawym dolnym rogu obszaru generując kolejno następujące po sobie wartości. Całą operację zilustrowano na rysunku 4.3. W arkuszu kalkulacyjnym można bardzo efektywnie wykonywać operacje matematyczne na zdefiniowanych w pakiecie funkcjach. Do predefiniowanych funkcji uzyskuje się dostęp klikając na ikonkę $f(x)$ (patrz rysunek 4.1) lub wpisując bezpośrednio symbol funkcji w okienko wprowadzania wzorów. Dla przykładu policzmy wartości funkcji $g(x) = 1 + \sin^2(\pi x)$ dla wartości x zamieszczonych w tabeli z rysunku 4.3. W tym celu kliknijmy na komórkę C3, po czym w okienku wprowadzania wzorów wpiszmy formułę na funkcję $1 + \sin^2(\pi x)$. Po zatwierdzeniu formuły klawiszem Enter przeciągamy myszką w dół kolumny kwa-

Rysunek 4.3. Generowanie listy inkrementowanej



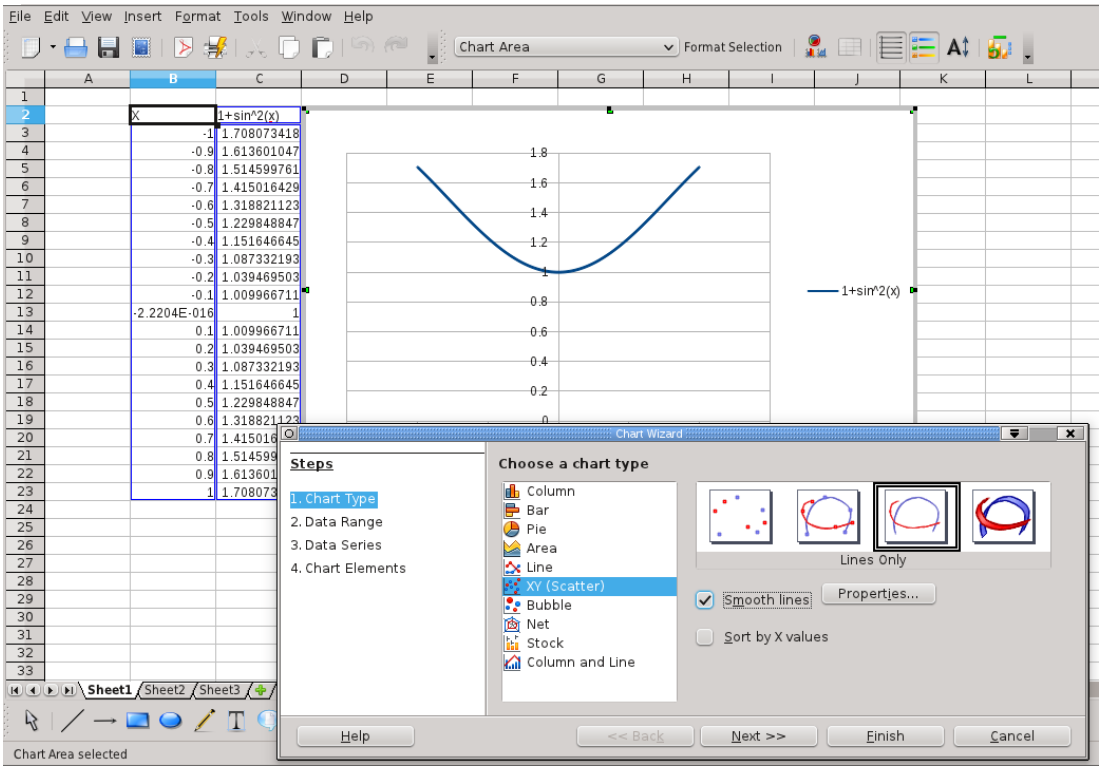
Rysunek 4.4. Wprowadzanie wzorów



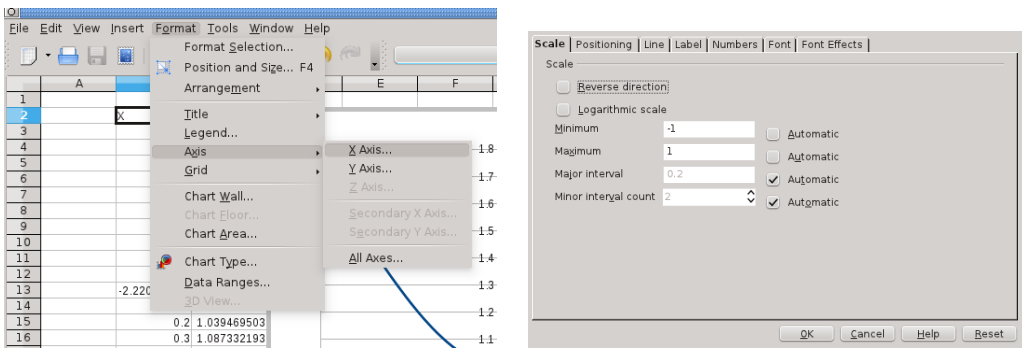
drat z podświetlonej komórki C3 (patrz rysunek 4.4), kopiując w ten sposób wzory do wierszy poniżej.

Dysponując wartościami funkcji $g(x)$ możemy sporządzić wykres funkcji. W tym celu zaznaczamy myszką obszar zmiennych B2:C23. Następnie z menu Insert wybieramy opcję Chart. Po wybraniu Chart pojawi się nam nowe okienko, w którym określamy typ wykresu (XY Scatter) oraz sposób łączenia i interpolacji punktów pomiarowych. Jeśli wszystkie operacje wykonamy poprawnie powinniśmy dostać podobny ekran jak na rysunku 4.5. Zwróćmy uwagę, że na rysunku 4.5 ramka wykresu jest obwiedziona grubą szarą kreską. Tego rodzaju obwiednia rysunku sygnalizuje nam, że rysunek jest aktywny i możemy wybierać dla niego opcje formatowania z menu Format. Klikając przycisk Finish kończymy operację wstawiania rysunku. W kolejnym kroku możemy wykorzystać opcje z menu Format (po aktywacji rysunku!!!) do końcowej obróbki rysunku. Za pomocą opcji z Titles z menu Insert możemy wstawić opisy osi oraz tytuł rysunku. Podczas obróbki rysunku należy zadbać o takie ustawienie skali osi x oraz y aby wykres funkcji $g(x)$ zajmował cały rysunek bez zostawiania pustych miejsc. Wybieramy z menu Format opcję Axis i zmieniamy odpowiednio skalę dla osi Y oraz X (patrz rysunek 4.6). Po wstawieniu linii siatki wykres funkcji $g(x)$ przyjmuje postać jak na rysunku 4.7.

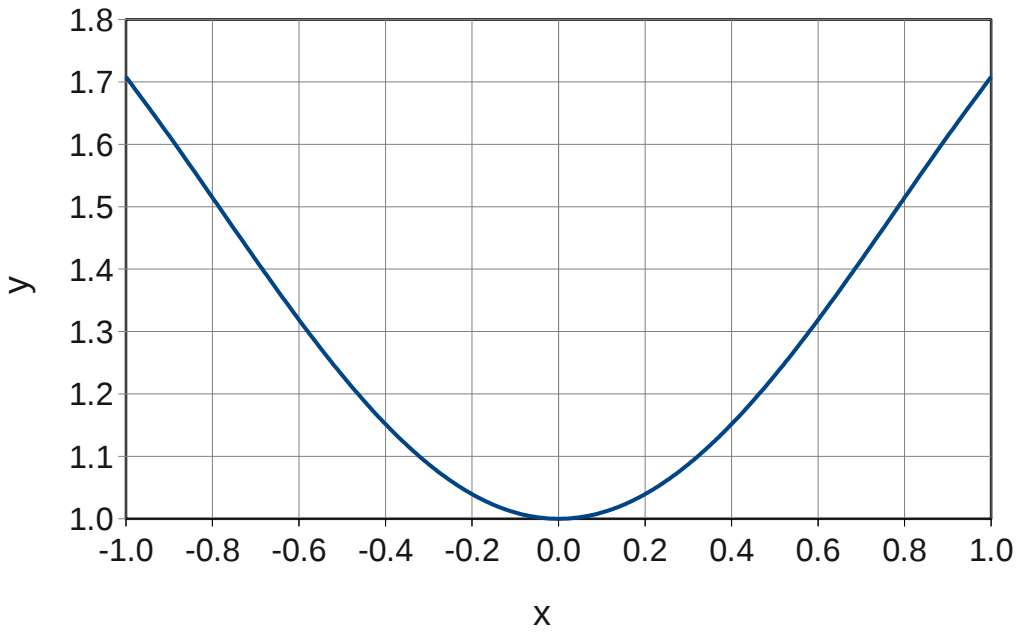
Rysunek 4.5. Sporządzanie wykresów



Rysunek 4.6. Ustawianie skali na osi X



Rysunek 4.7. Wykres funkcji $g(x) = 1 + \sin^2(\pi x)$.



Przykład 1: Wykonajmy teraz następujące zadanie. W przykładzie 1 z rozdziału 3.3.4 postawiono problem wyznaczenia stałej rozpadu dla materiału promieniotwórczego. Student posługując się licznikiem Geigera-Müllera oraz stoper otrzymał następującą tabelę pomiarową i na jej podstawie ma wyznaczyć średni czasu życia $\tau = 1/\lambda$ oraz czasu połowicznego rozpadu $T_{1/2} = \ln(2)/\lambda$ badanego materiału promieniotwórczego (Strontu). Prawo rozpadu promieniotwórczego dane jest wzorem

Tabela 4.1. Wartości pomiarowe

l.p	t [h]	N [jed. umo.]
1	0.5	989
2	1.0	977
3	1.5	971
4	2.0	958
5	2.5	943
6	3.0	934
7	3.5	929
8	4.0	919
9	4.5	908
10	5.0	890
11	5.5	885
12	6.0	877

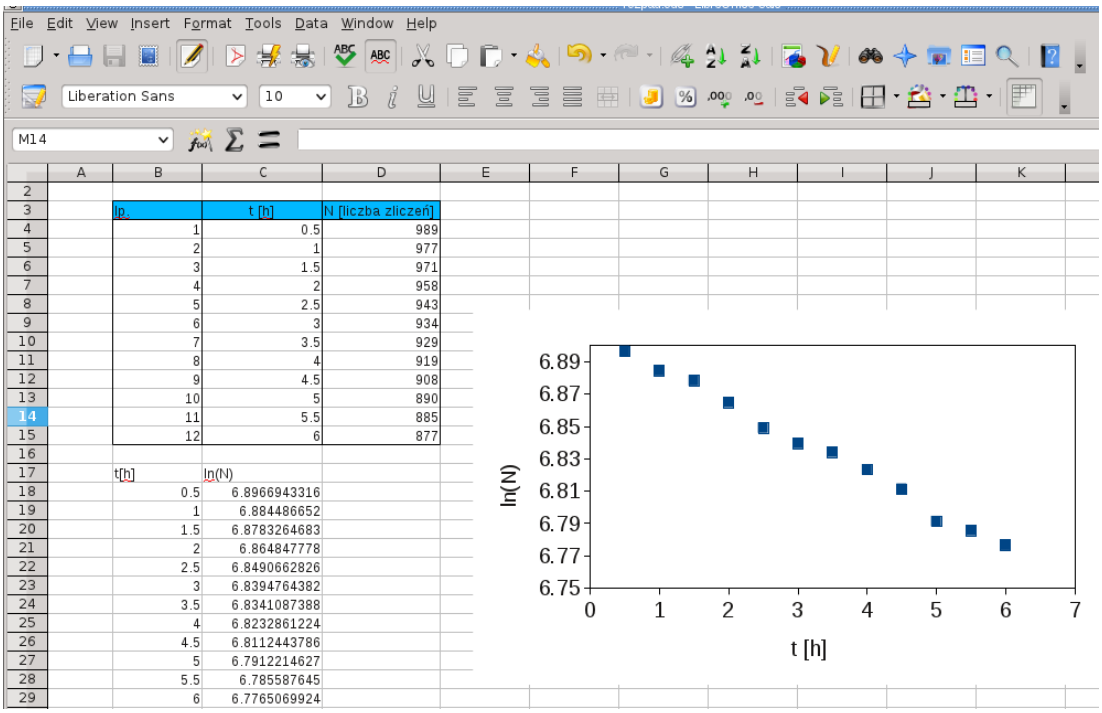
$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

Powyższy wzór można zlinearyzować przez obustronne zlogarytmowanie

$$\ln N(t) = -\lambda t + \ln N_0. \tag{4.1}$$

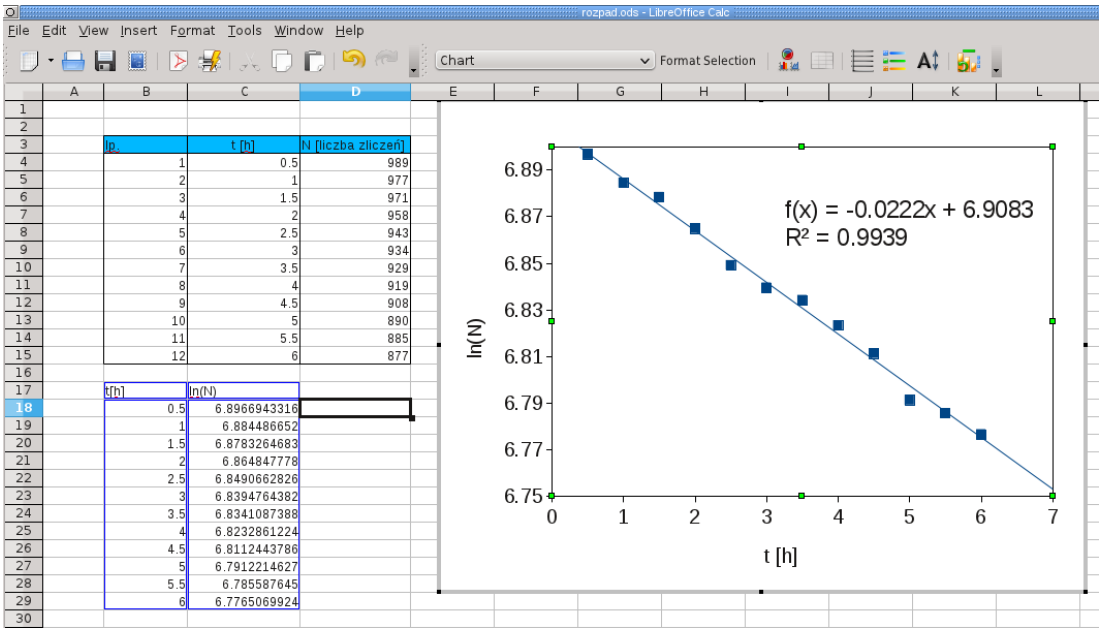
Podstawiając $y = \ln N(t)$, $a = -\lambda$, $b = \ln N_0$ do wzoru (4.1), dostajemy równanie prostej $y = at+b$. Do wyznaczenie τ oraz $T_{1/2}$ wykorzystamy arkusz kalkulacyjny Libre Office Calc. Szczególnie przydatna będzie zaimplementowana w arkuszu kalkulacyjnym funkcja `LINEST()`, za pomocą której można wyznaczyć metodą regresji liniowej stałe a i b. Funkcja `LINEST(dane_Y; dane_X; Typ regresji; Statystyka)` pobiera cztery argumenty. `Dane_Y` oznaczają zmienną zależną Y, `Dane_X` oznaczają zmienną niezależną X, argument `Typ regresji` przyjmuje wartości 0 dla regresji $y = ax$ lub 1 dla $y = ax + b$, `Statystyka` jest zmienną logiczną przyjmującą wartości 0,1. Przypisanie zmiennej `Statystyka` wartości 1 powoduje drukowanie odchyleń standardowych a, b, y oraz współczynnika korelacji. Dokładny opis funkcji `LINEST()` oraz przykłady zastosowań można znaleźć w Helpie. Po utworzeniu w arkuszu tabeli pomiarowych

Rysunek 4.8. Opracowanie danych pomiarowych z tabeli 4.1



i sporządzeniu wykresu $\ln(N) = f(t)$, możemy zauważyć, że punkty pomiarowe układają się wzdłuż linii prostej co dobrze obrazuje wykres z rysunku 4.8. Wybierając z menu Insert opcję Trend Lines możemy wstawić do aktywnego rysunku linię trendu. Kroki te zilustrowano na rysunku 4.9. Z rysunku widać, że dopasowanie linii trendu do danych pomiarowych jest bardzo dobre. Istotność zależności liniowej jest potwierdzona bliską jedności wartością współczynnika korelacji. Wartości a i b w skoroszycie dostaniemy wybierając w edytorze wzorów funkcję macierzową `LINEST`. Kroki potrzebne do wstawienia `LINEST` przedstawiono na rysunku 4.14.

Rysunek 4.9. Prosta $y = ax + b$ otrzymana metodą regresji linowej.



Rysunek 4.10. Funkcja LINEST.

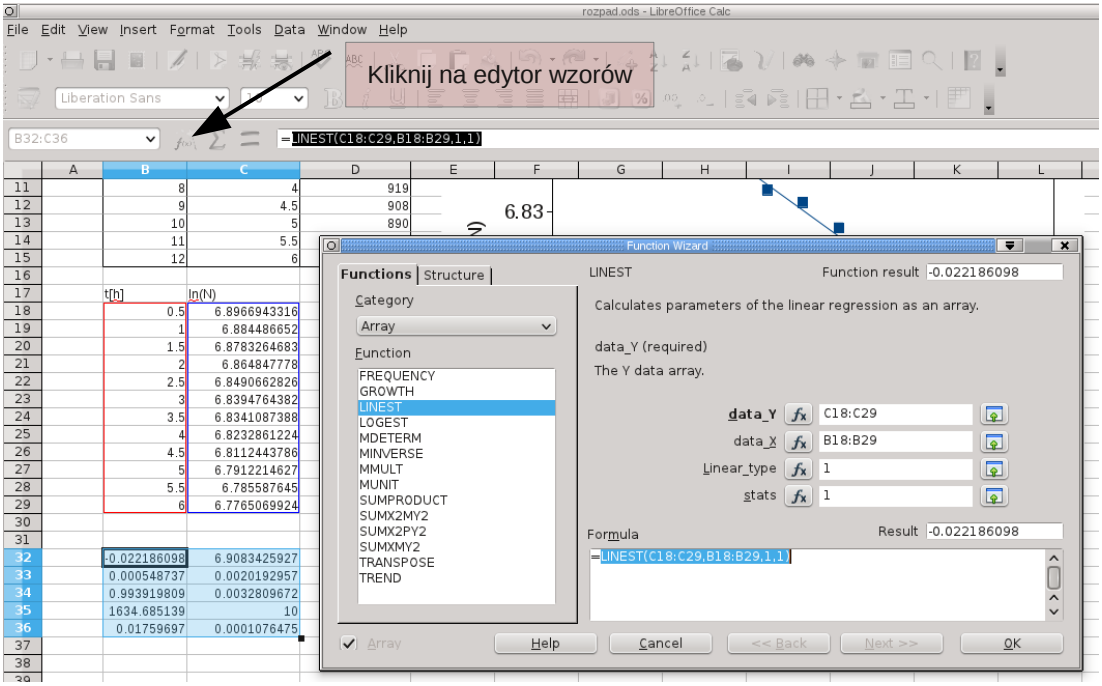


Tabela 4.2. Wynik działania funkcji macierzowej `LINEST`.

	B	C
32	$a = -0.022186098$	$b = 6.9083425927$
33	$\sigma_a = 0.0005487365$	$\sigma_b = 0.0020192957$
34	r^2 =0.9939198089	$\sigma_y = 0.0032809672$
35	F-Statystyka=1634.6851385734	Ilość stopni swobody=10
36	Suma kwadratów=0.017596970	suma rezyduów=0.0001076475

Wynik działania tej operacji wraz z objaśnieniami odnośnie wartości zebrano w tabeli 4.2: Zbierając dane z tabeli wartości LINEST możemy zapiać stałą rozpadu promieniotwórczego jako

$$\lambda = -a + \sigma_a = (2.22 \pm 0.06) \cdot 10^{-2}[1/h]$$

Pozostaje nam jeszcze policzyć $T_{1/2}$, τ oraz wartości niepewności pomiarowych $\Delta T_{1/2}$ oraz $\Delta\tau$. W tym celu wykorzystamy wiadomości z rozdziałów dotyczących niepewności pomiarowych i przeniesiemy niepewność $\Delta\lambda$ na wielkości $T_{1/2}$, τ

$$\tau = \frac{1}{\lambda}, \text{ wtedy } \Delta\tau = \left|\frac{1}{\lambda^2}\right| \Delta\lambda \tag{4.2}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}, \text{ wtedy } \Delta T_{1/2} = \left|\frac{\ln 2}{\lambda^2}\right| \Delta\lambda \tag{4.3}$$

Przyjmując $\Delta\lambda = \sigma_a$, podstawiając w skoroszycie odpowiednie wartości do wzorów (4.2,4.3) otrzymujemy ostatecznie wartości średniego czasu życia oraz czasu połowicznego rozpadu

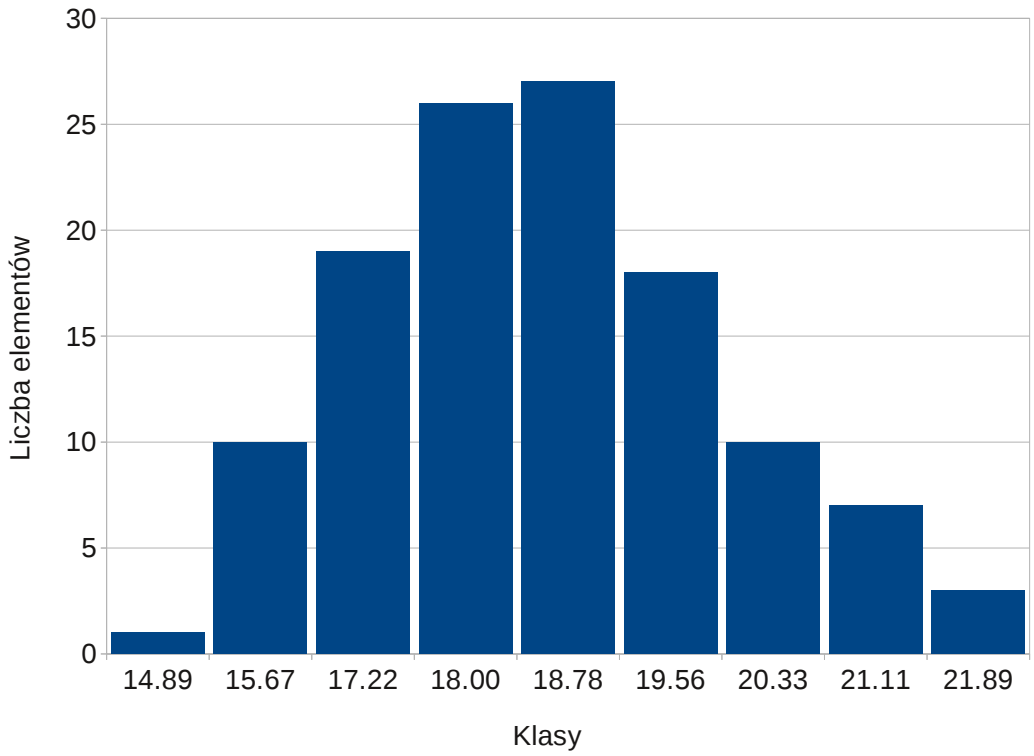
$$\begin{aligned} \tau &= (45.1 \pm 1.2)h, \\ T_{1/2} &= (31.2 \pm 0.8)h. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Porównując czas połowicznego rozpadu z wartościami uznanym dla strontu, możemy stwierdzić, że próbka zawiera izotop ^{83}Sr.

Cenne informacje dotyczące statystycznego rozrzutu danych w serii pomiarowej możemy uzyskać wykorzystując arkusz kalkulacyjny do wykonania analizy

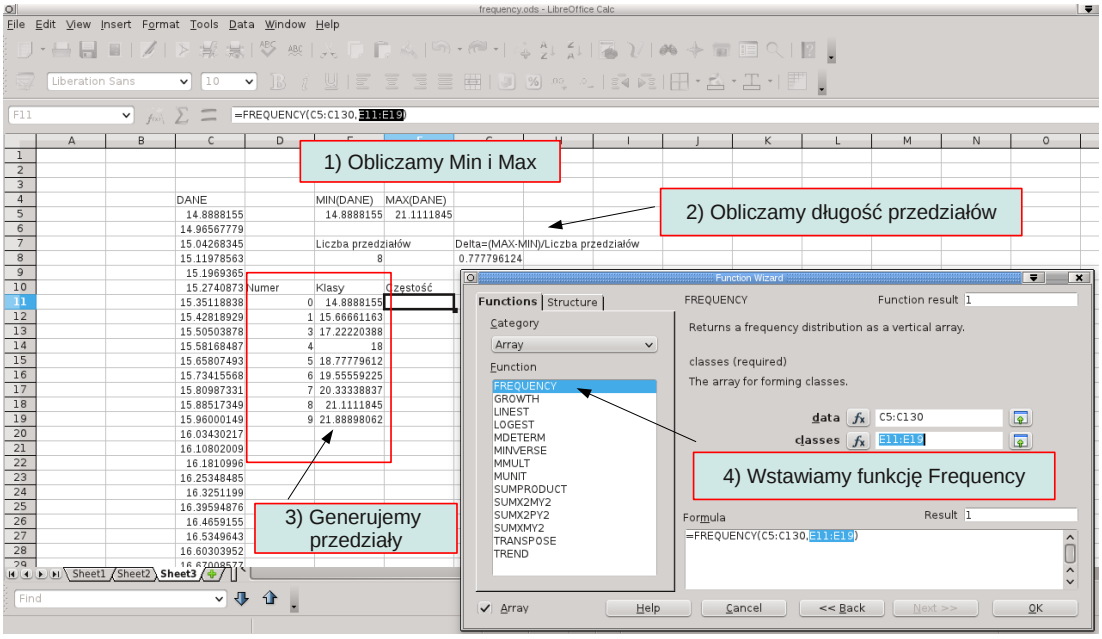
częstości występowania poszczególnych wartości i wykreślenia histogramu 4.11. Tworząc histogram z danych pomiarowych $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ należy znaleźć wartość minimalną (funkcja `MIN(X)`) i maksymalną (funkcja `MAX(X)`) zmiennej mierzonej. Następnie dzielimy zakres, w którym zmieniają się wartości zmiennej pomiarowej na pięć do ośmiu przedziałów (klas). Funkcją `FREQUENCY(Dane X,przedział)` wyznaczamy ilość elementów zbioru X należących do danego przedziału. W ostatnim kroku sporządzamy wykres słupkowy. Oś odciętych indeksujemy wartościami z kolumny zawierającej górne zakresy przedziałów, natomiast na oś rzędnych nanosimy ilość elementów w danym przedziale. Przykładowy histogram uzyskany z danych pomiarowych pokazany jest na rysunku 4.11. Analizując go możemy spostrzec, że wartość najbardziej prawdopodobna będzie leżała w

Rysunek 4.11. Histogram

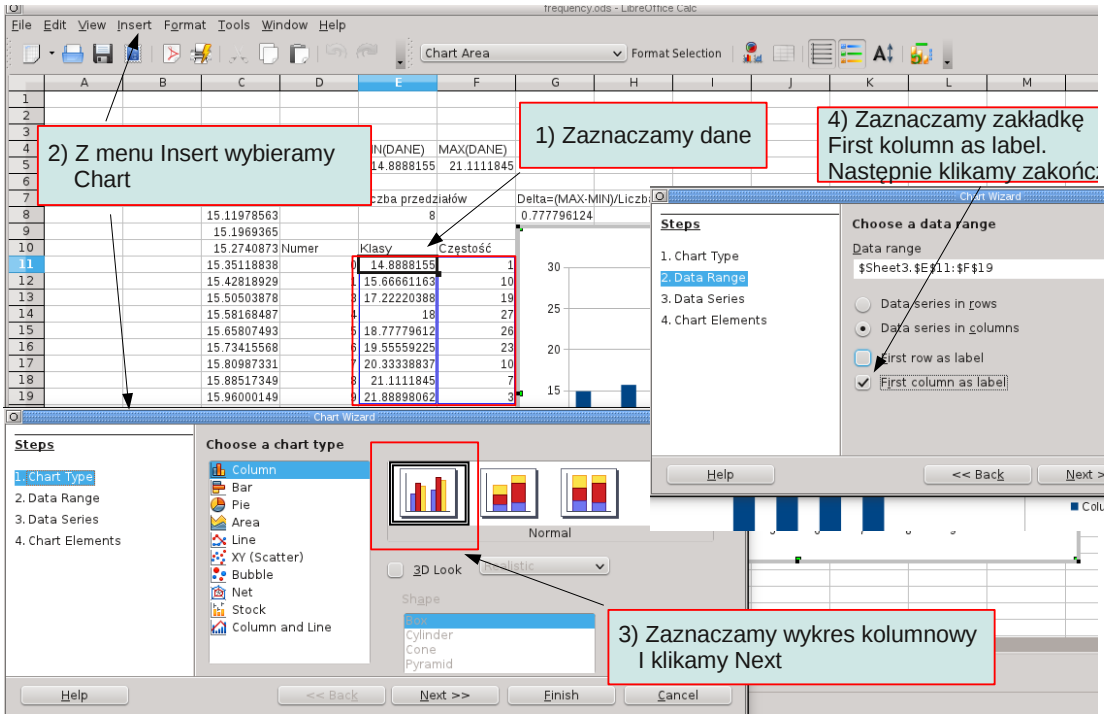


pobliżu 18.4, a niepewności pomiarowe będą asymptotycznie zadane rozkładem normalnym. Kolejne kroki obliczeniowe zilustrowano na rysunkach 4.12–4.14.

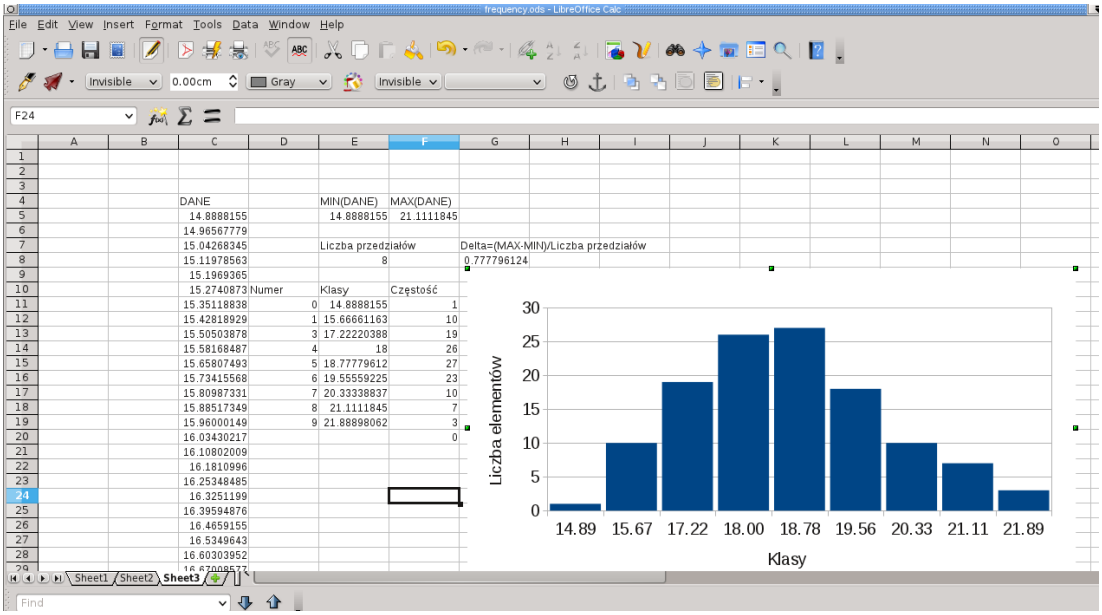
Rysunek 4.12. Wyznaczanie długości przedziału i obliczenie częstości



Rysunek 4.13. Wstawianie histogramu do skoroszytu



Rysunek 4.14. Opracowany histogram



5. Edytory tekstu

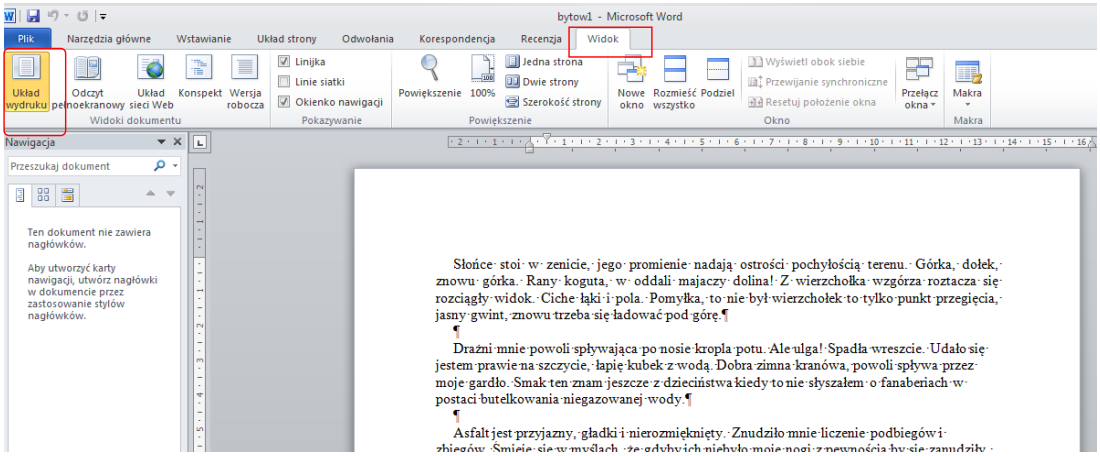
Edytory tekstu są aplikacjami służącymi do składania tekstu. Umożliwiają one wykonywanie w sposób elektroniczny zdań, które kiedyś leżały w wyłącznej w gestii zecera pracującego w drukarni. Posługując się edytorem tekstu należy pamiętać, że dla języka polskiego istnieją normy dotyczące składania tekstów: norma branżowa BN-64/7440-02 oraz polska norma PN-83/P-55366. Normy te należy stosować przy profesjonalnym składzie tekstów. Osoby zainteresowane podstawowymi informacjami o krojach i składzie pisma mogą zapoznać się z artykułem Nowackiego na temat typografii [6]. Przy składzie tekstów, ważne jest pilnowanie, aby na nowo otwartej stronie nie pozostawić samotnego fragmentu zdania[1] oraz właściwie dopełniać akapity w tekście.

Edytory tekstu[2] można podzielić na dwie grupy

[1] Ten rodzaj błędu typograficznego często nazywa się gwarowo bękartem.

[2] Zwane często inaczej procesorami tekstu.

Rysunek 5.1. Menu edytora MS Word 2010 podczas pracy w trybie wydruku.



— edytory typu WYSWIG (*What you see is what you get*), do których należą między innymi:
  — MS Word (patrz rysunek 5.1,
  — Libre Office,
  — Ami Pro,
  — Word Perfect
— programistyczne systemy składu tekstu np. TEX, Metafont, LATEX2e.

Zaletą edytorów WYSWIG jest intuicyjność ich użycia. W czasie pracy nad składem materiału, widzimy pracując w trybie wydruku, tekst dokładnie w takiej postaci w jakiej ma być on wydrukowany, natomiast większość operacji edycyjnych możemy wykonać używając myszki. Pracując z takim edytorem musimy jednak bardzo dobrze znać zasady składu tekstu, ponieważ bez odpowiednio zadeklarowanej klasy dokumentu bardzo łatwo jest popełnić błąd o charakterze typograficznym.

Filzofia programów TEX i LATEX jest przeciwieństwem, edytorów WYSWIG. Wprowadzania tekstu dokonujemy dowolnym edytorem dyskowym (notepad, emacs, vim etc.), deklarując na początku pliku klasę dokumentu, następnie znaki formatujące wydajemy za pomocą komend (słów kluczowych). Tak przygotowany plik tekstowy kompilujemy otrzymując jak wynik plik w formancie pdf. Dla przykładu niniejszy skrypt był pisany przy użyciu klasy mwrep autorstwa Marcina Wolińskiego [7]. Przykładowy plik jest zamieszczony poniżej.

```
\documentclass[12pt]{mwrep}
\usepackage[MeX]{polski}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\begin{document}
  Tak wygląda źródłowy kod \LaTeX'a.
Dostawmy prosty wzór
  \begin{equation}
    \label{wz1}
    \hat H=-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2+V(r)
  \end{equation}
Zróbmy odwołanie do wzoru \ref{wz1}.
\end{document}
```

Tak wygląda źródłowy kod LATEX'a. Dostawmy prosty wzór

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) \tag{5.1}$$

Zróbmy odwołanie do wzoru 5.1.

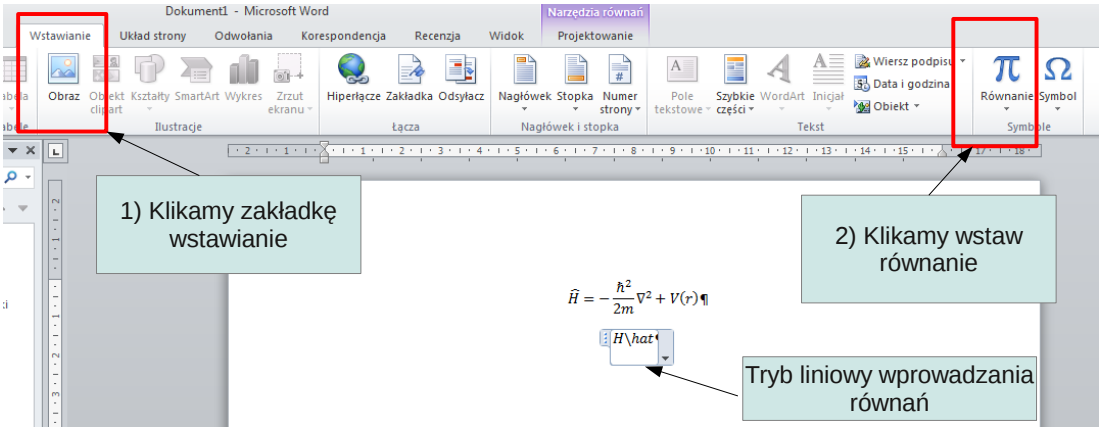
Pakiety TEX i LATEX są dystrybuowane na zasadach otwartych licencji. Dobrą dystrybucją TEX'a na systemy operacyjne rodziny MS Windows jest MikTEX, natomiast standardowych dystrybucjach Linuxa można znaleźć teTEX'a. Instrukcję do LATEX'a dla początkujących [8] można znaleźć pod adresem ftp://ftp.gust.org.pl/TeX/

Zajmijmy się przez chwilę edycją wzorów w programie MS Word 2010. W Wordzie począwszy od wersji 2007 mamy do dyspozycji przy edycji równań matematycznych oprócz trybu graficznego tryb „liniowy", w którym równania można wpisywać podobnie jak w LATEX'u. Spróbujmy wprowadzić w edytorze MS Word równanie (5.1). W tym celu wykonajmy operacje, które pokazano na rysunku 5.2 (klikamy Zakładkę wstaw, klikamy Równanie). Następnie równanie (5.1 w wordzie można pracowicie „wyklikać", lub wprowadzić je wpisując w okienku równania (patrz rysunki 5.2, 5.3) ciąg znaków:

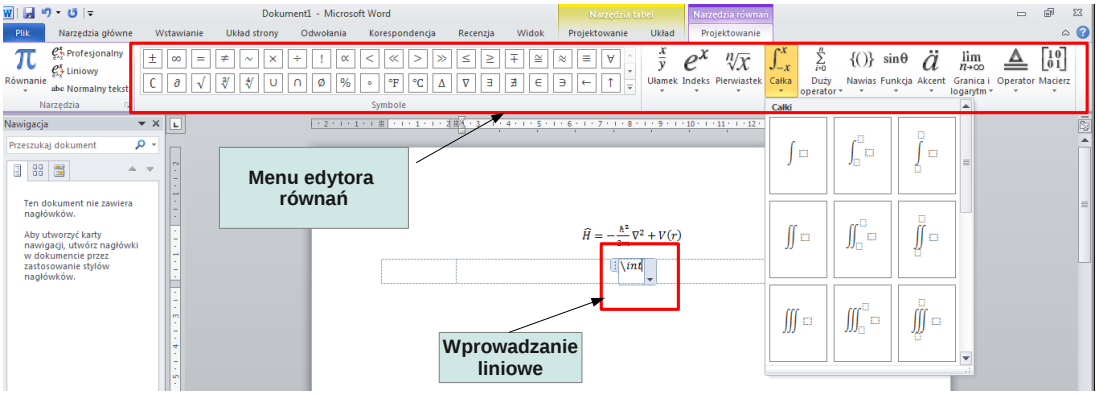
```
H\hat<spacja><spacja>=-\hbar^2/2m<spacja>\nabla^2+V(r)
```

Znak `<spacja>` oznacza spację i zatwierdza komendę. Więcej o trybie liniowym wprowadzania równań można znaleźć pod adresem www. Niestety numerowanie równań w Wordzie jest dalekie od ideału. trzeba w tym celu używać specjalnych makr, lub stosować metodę, podaną przez Jennifer Michelstein (patrz [9], [10]), stanowiącą kombinację tabeli i listy numerowanej . W tak utworzonych numerach równań można postawić zakładki i odwoływać się do nich przez odsyłacze. Przy tworzenie dokumentów należy starać się używać automatycznych list numerowanych oraz automatycznej numeracji rozdziałów, tabel etc.

Rysunek 5.2. Wprowadzanie wzoru matematycznego w MS Word



Rysunek 5.3. Wprowadzanie wzoru matematycznego MS Word. Tryby edycji: liniowy i graficzny.



6. Bazy danych

Pod pojęciem bazy danych będziemy rozumieć uporządkowany zbiór obiektów (danych). Przykładem bazy danych jest katalog książek w bibliotece, zarówno w postaci papierowej jak i elektronicznej. W bazie danych najważniejszym elementem są rekordy, które zawierają informacje na temat danego obiektu. Przykładem rekordu jest karta książki w katalogu bibliotecznym. Rekord jest podzielony na kilka pól, w których przechowywane są cechy charakterystyczne obiektu. W katalogu książkowym polami mogą być: nazwisko autora książki, sygnatura, tytuł książki, rok wydania etc. Dostępne jest obecnie duża ilość programów zarządzających bazami danych do popularnych rozwiązań należą: Oracle Database, IBM DB2, Microsoft SQL Server, PostgreSQL, MySQL. Literatura dotycząca baz danych jest bardzo obszerna. Zainteresowane osoby mogą zacząć poszukiwania materiałów od strony WWW Wikipedii. W niniejszym skrypcie krótko omówimy graficzny interfejs bazy danych MS Access.

W programie Access dane organizowane są w tabele. W wierszach tabel układa się rekordy, natomiast kolumny w tabeli oznaczają kolejne pola. Pierwszą zasadą przy projektowaniu bazy danych jest unikanie powtarzania informacji, dlatego w programie Access można definiować pola wspólne dla kilku tabel oraz definiować relacje między poszczególnymi polami w tabelach. Przed przystąpieniem do dalszej pracy, proszę przeczytaj „samouczki" ze stron microsoftu dotyczące: podstaw Accessa (kliknij ‡) oraz implementacji relacji w Accessie (kliknij ‡).

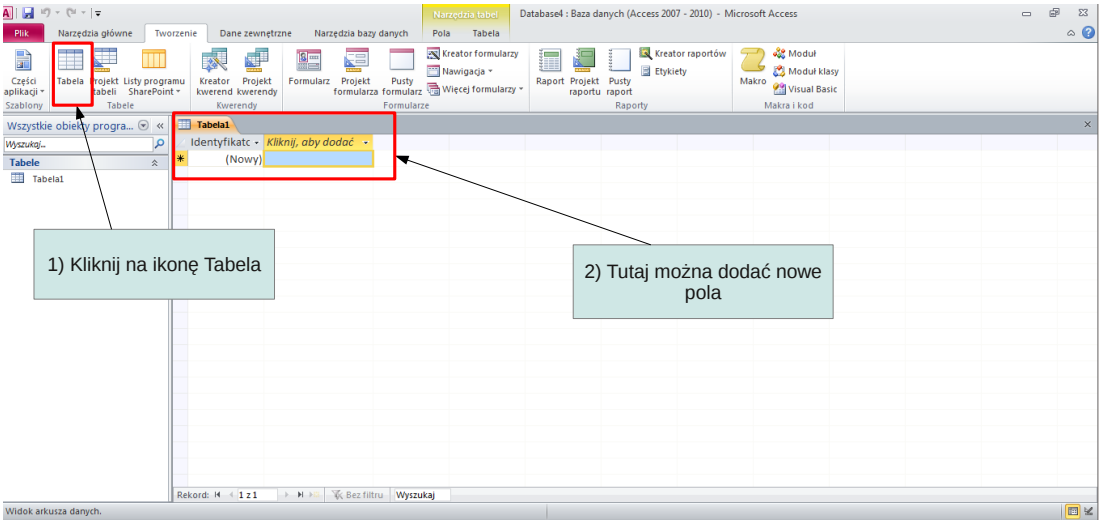
Zadanie:
Zbudujmy prostą bazę danych posiadanych płyt CD z muzyką, pozwalającą na zaznaczenie, którą płytę pożyczyliśmy znajomym. Wygodnie będzie nam utworzyć

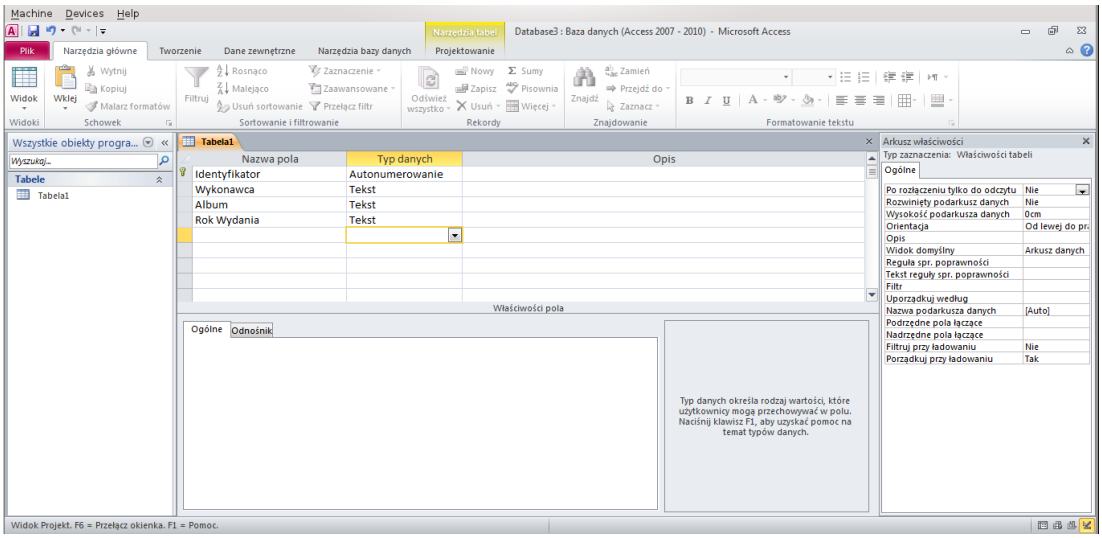
dwie tabele: Indeks Płyt oraz Wypożyczenia. W tabeli Indeks Płyt utworzymy następujące pola: Wykonawca, Tytuł Albumu, Rok Wydania. Oczywiście jeśli, lubimy muzykę klasyczną to będziemy musieli dodać dodatkowo pola Kompozytor, Dyrygent etc. Kolejną tabelą jaką utworzymy będzie tabela Wypożyczenia. Będzie ona zawierać pole z datą wypożyczenia oraz jedno pole pokrewne z tabelą Indeks Płyt, które będzie definiować jednoznacznie wypożyczaną płytę. Otwórzmy teraz program MS Access i wykonajmy następujące kroki:

1. Otwórz pustą bazę danych.
2. W widoku projektu otwórz nową tabelę i zdefiniuj odpowiednie pola (patrz rysunek 6.1). Kliknij prawym przyciskiem na zakładkę Tabela 1 i zapisz tabelę. Następnie zamknij ją i zmień jej nazwę na Indeks_Płyt.
3. w widoku projektu utwórz tabelę Wypożyczenia (Tworzenie, Tabela, Widok Projektu),
4. Wprowadź pole wypożyczający.
5. Wprowadź pole Album/Wykonawca. Wybierz typ danych, Kreator odnośników. zaznacz, że pole odnośnika ma pobierać wartości z innej tabeli. Zaznacz tabelę Indeks_Płyt, następnie wybierz z niej pola Album oraz Wykonawca (patrz rysunki 6.2). W ten sposób została utworzona relacja między tabelami Wypożyczenia a Indeks_Płyt. Zaznacz jako klucz podstawowy pola Wypożyczający, Album/Wykonawca (trzymając CTRL i klikając na pole)
6. Włącz tabelę Indeks_Płyt w widoku Arkusza Danych i wprowadź nazwy albumów[1] (patrz rysunek 6.3a)
7. Otwierając tabelę Wypożyczenia w widoku Arkusza Danych, można utworzyć listę wypożyczeń (patrz rysunek 6.3b)
8. Klikając w zakładce Tworzenie ikonkę Raporty wygenerujmy raport wypożyczeń (patrz rysunki 6.4.

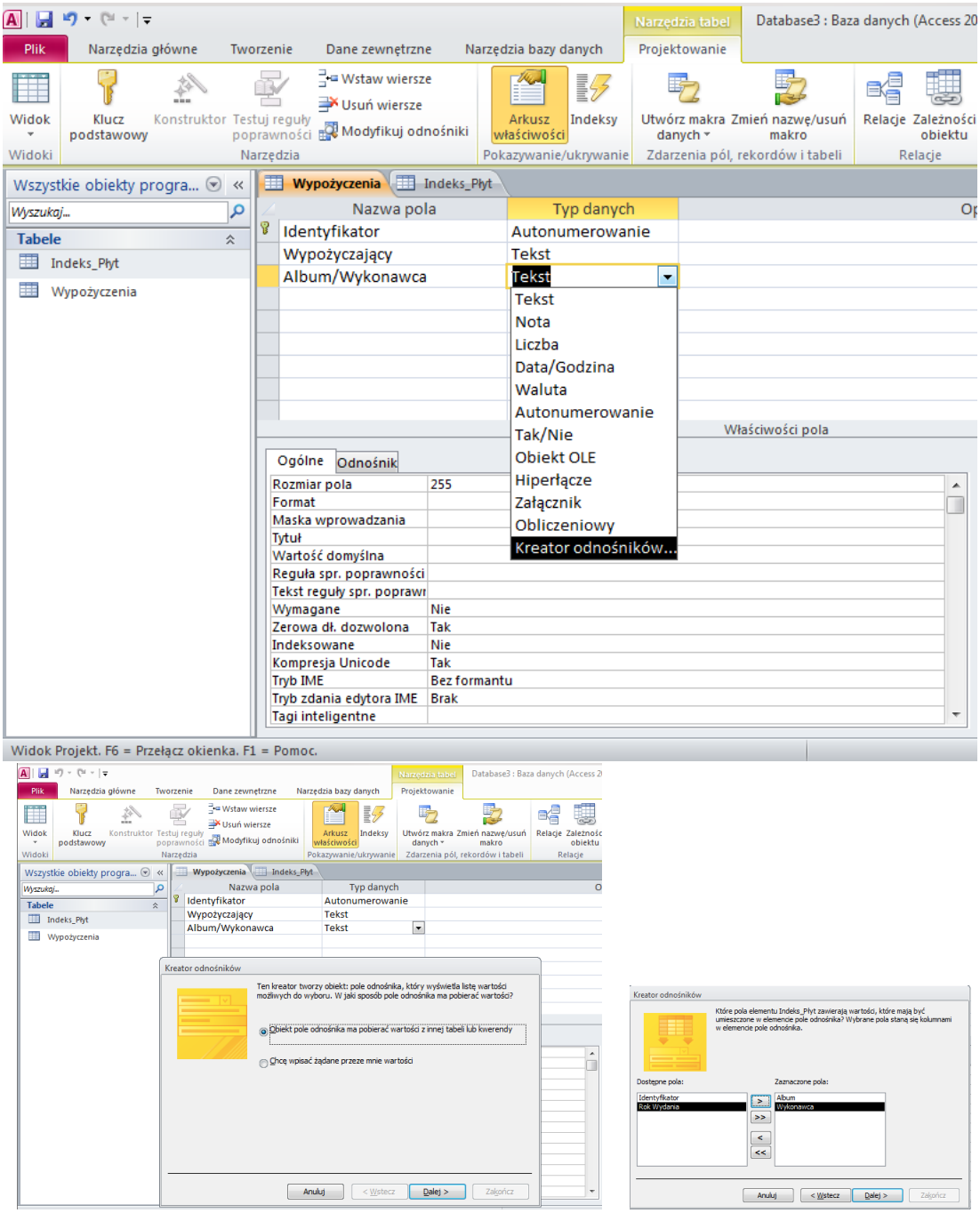
[1] Jeśli nie masz żadnych płyt to proponuję zacząć poszukiwania od listy noworocznej Trzeciego Programu Polskiego Radia Top wszech czasów Rocka

Rysunek 6.1. Zakładanie tabeli w programie Access 2010

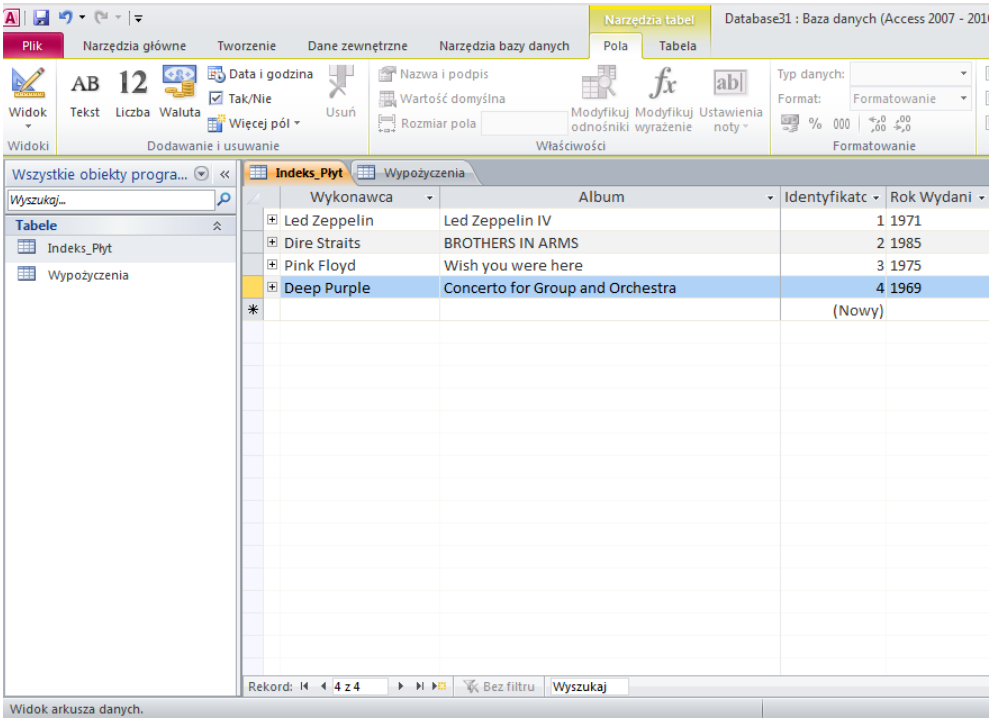




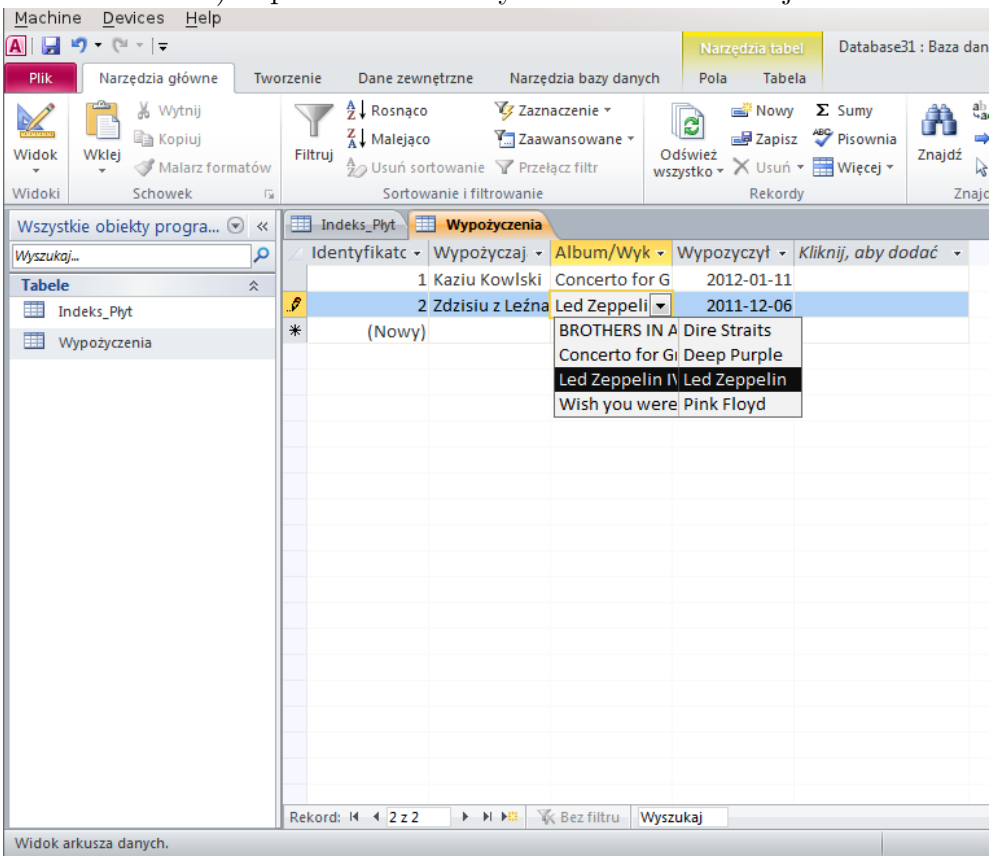
Rysunek 6.2. Tworzenie tabel zależnych w programie Access 2010



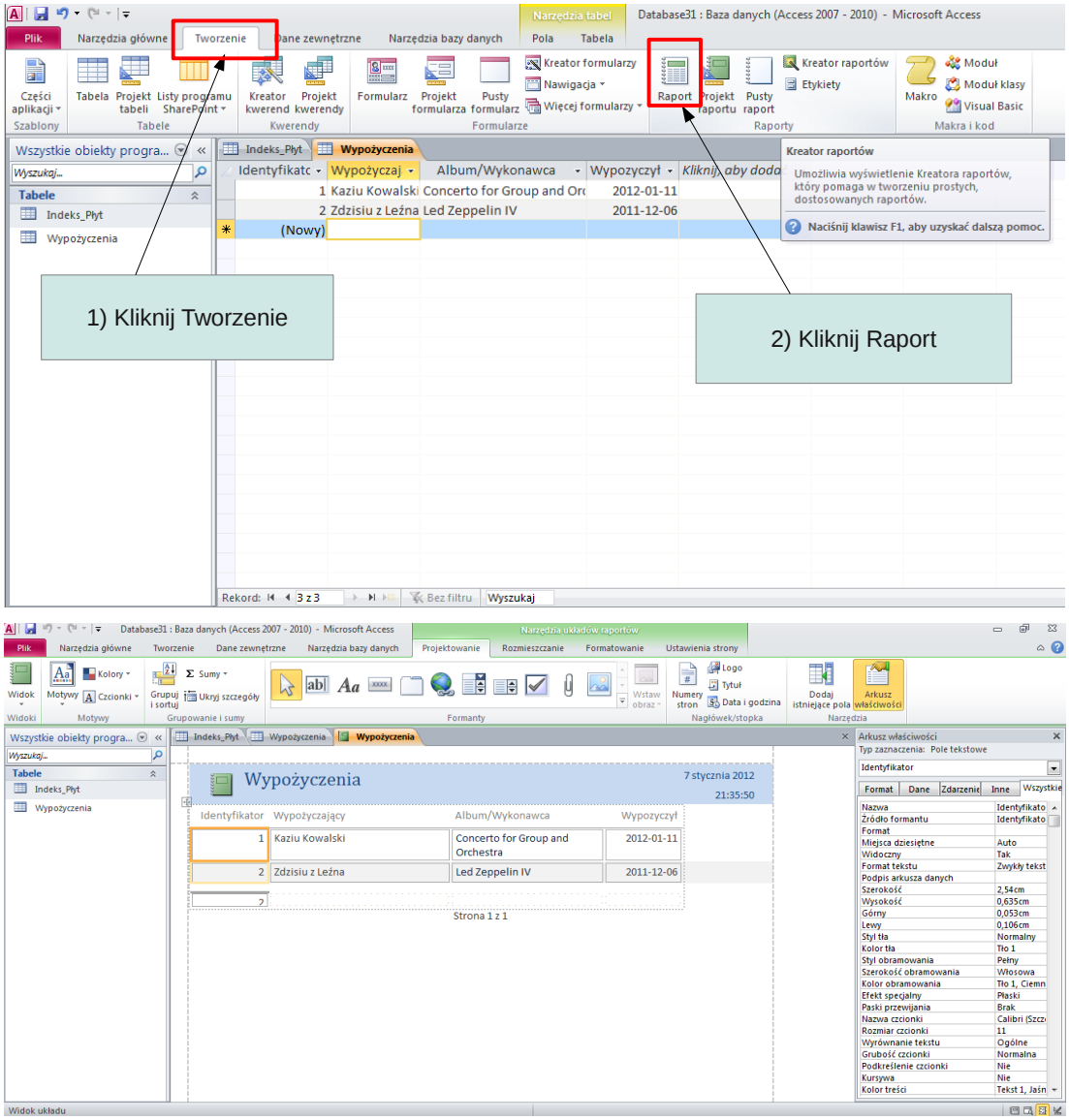
Rysunek 6.3. a) Wprowadzanie danych w widoku Arkusza Danych



b) Wprowadzanie danych do tabeli zależnej



Rysunek 6.4. Tworzenie raportów



Bibliografia

[1] Zestawienie systemów operacyjnych `http://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_operating_sys`
.

[2] General Public License GNU `http://www.gnu.org/licenses/gpl.html`

[3] PGP (*Pretty Good Privacy* `http://en.wikipedia.org/wiki/Pretty_Good_Privacy`)

[4] Dokumentacja dla GPG `http://www.gnupg.org/documentation/`

[5] John R. Taylor „Wstęp do analizy błędu pomiarowego" PWN (1995) Warszawa

[6] J. Nowacki „TEXnologia a typografia", Zeszyt 6. (1996) GUST

[7] Marcin Woliński „Polskie klasy dokumentów LATEX" Strona domowa

[8] Tobias Oetiker, Hubert Partl, Irene Hyna, Elisabeth Schlegl, Tomasz Przechlewski, Ryszard Kubiak Janusz Gołdasz „Nie za krótkie wprowadzenie do systemu LATEX2e"

[9] http://blogs.office.com/b/microsoft-word/...

[10] Jennifer Michelstein o centrowaniu i numerowaniu równań matematycznych w MS word 2010.