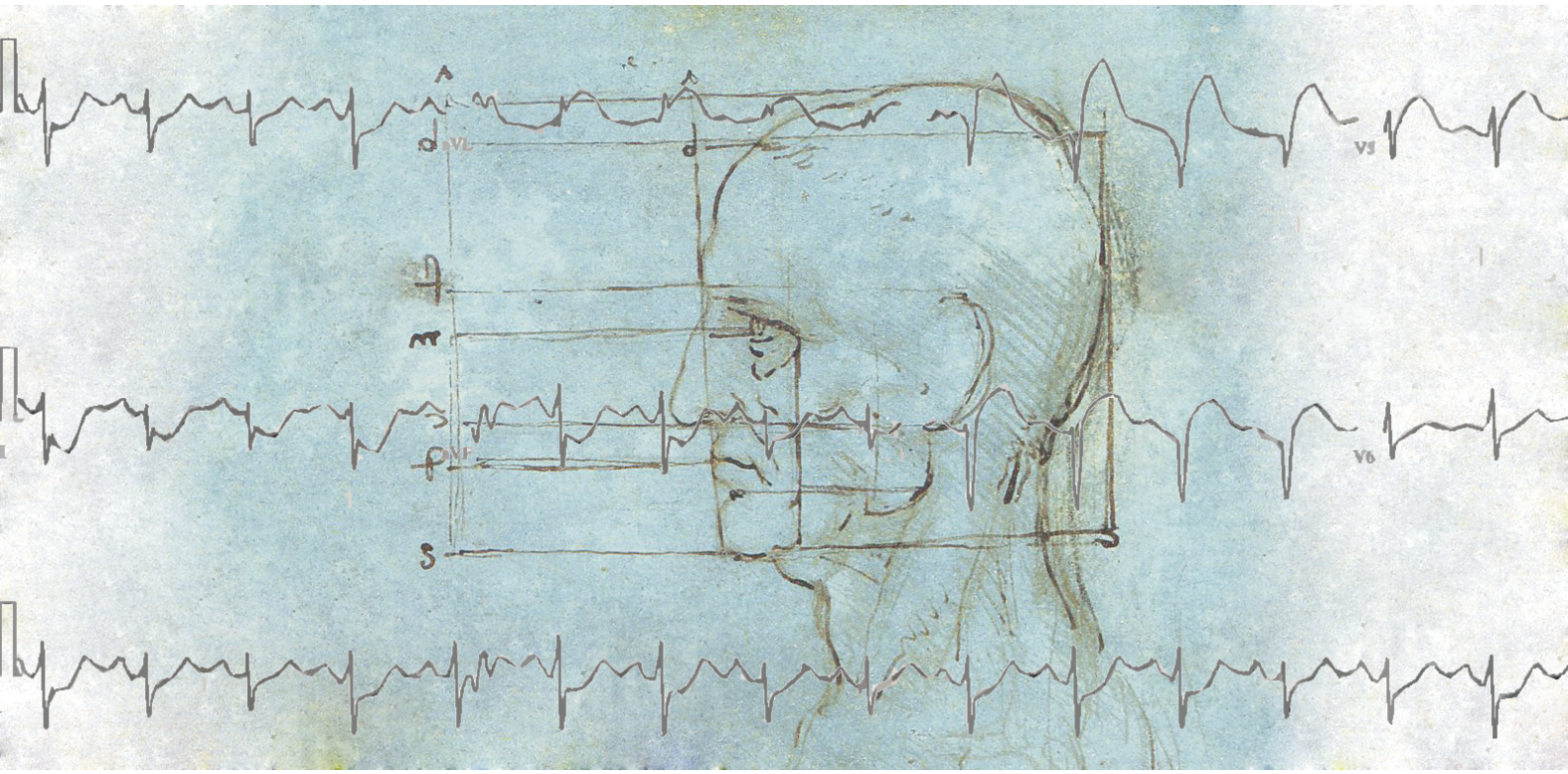


Repetytorium z matematyki

Andrzej Posiewnik

Gdańsk, 2011

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytetu Gdańskiego

Skrypt powstał w ramach projektu „Kształcimy profesjonalistów – kompleksowy program kształcenia skierowany do studentów, absolwentów oraz studentów niepełnosprawnych Uniwersytetu Gdańskiego” współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach środków Europejskiego Funduszu Społecznego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET GDAŃSKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Notacja logiczna

Będziemy używali następujących oznaczeń:

$\wedge$ będzie oznaczać: i

$\vee$ będzie oznaczać: lub

$\forall x$ będzie oznaczać: dla każdego x(kwantyfikator ogólny)

$\exists x$ będzie oznaczać: istnieje x (kwantyfikator szczegółowy)

$\neg$ lub $\tilde{}$ będzie oznaczać nie

$A \Rightarrow B$ będzie oznaczać: jeżeli A to B

$A \Leftrightarrow B$ będzie oznaczać: A wtedy i tylko wtedy gdy B

$:=$ będzie oznaczać: równe z defincji

Liczby naturalne

A) Liczby naturalne służą do liczenia przedmiotów. Liczenie przedmiotów jest najprostszą, a zarazem najbardziej rozpowszechnioną i najstarszą czynnością matematyczną.

B) Biorąc liczby naturalne jako punkt wyjścia można skonstruować wszystkie inne rodzaje liczb (liczby całkowite, wymierne, rzeczywiste, zespolone). Kolejny rodzaj liczb zawiera w sobie rodzaj poprzedni. Rodzaj następny dziedziczy wszystkie własności rodzaju poprzedniego.

Uwaga: dla liczb naturalnych **nie ma** takiego rodzaju poprzedniego.

C) Liczby naturalne musimy więc badać korzystając z tzw. metody aksjomatycznej. Jest to często stosowana w matematyce metoda, polegająca na przyjęciu bez dowodu pewnych (wewnętrznych) własności badanych przedmiotów (tutaj liczb naturalnych) i na wyprowadzeniu z nich innych własności za pomocą logicznie poprawnych rozumowań.

Wewnętrzne własności liczb naturalnych

Zbiór liczb naturalnych będziemy oznaczać literą N, a elementy tego zbioru – liczby naturalne symbolami 0,1,2,..... lub literami m,n,p.....

1. 0 jest liczbą naturalną (Uwaga: odkrycie zera przez Arabów było jednym z największych odkryć w matematyce)

2. Dla każdej liczby naturalnej istnieje większa od niej liczba naturalna, zwana jej następnikiem, tak że między nimi nie leży żadna inna liczba naturalna. A więc liczby naturalne można ustawić w ciąg: 0,1,2,3...., w którym bezpośrednio na prawo od danej liczby, leży jej następnik.

3. 0 nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej, a więc powyższy ciąg ma początek.

4. Dwie liczby naturalne o równych następnikach są równe.

5. Każdy zbiór, którego elementem jest 0 i który wraz z pewną liczbą naturalną zawiera jej następnik, zawiera wszystkie liczby naturalne. (zbiór ten jest nieskończony).

Następnik liczby naturalnej n będziemy oznaczać symbolem n*.

Pojawiły się tutaj tzw. pojęcia pierwotne. Są to pojęcia, których nie definiujemy, ale zwykle mamy pewne intuicje dotyczące ich.

Tymi pojęciami są:

a) zbiór
b) liczba naturalna
c) zero
d) następnik
e) większy.

Aksjomaty arytmetyki G.Peano

A1. $0 \in N$ (symbol $\in$ oznacza „należy do”)

A2. $n \in N \Rightarrow n^* \in N$

A3. $n \in N \Rightarrow n^* \neq 0$

A4. $n \in N \wedge m \in N \wedge n^* = m^* \Rightarrow n = m$

A5. Z – dowolny zbiór taki, że:
   a) $0 \in Z$
   b) $\forall n \in N \quad n \in Z\, n^* \Rightarrow Z$

Wtedy każda liczba naturalna należy do Z.

Działania

Algebra jest to nauka o strukturach algebraicznych tzn. pewnych zbiorach wraz z działaniami.

Dodawanie liczb naturalnych

Poznaliśmy już szczególny przypadek dodawania: następnik n^* można intuicyjnie określić jako dodawanie jedności do n .

Rozszerzając tę konstrukcję można dodawanie dwóch dowolnych liczb naturalnych określić w następujący sposób (korzystamy tu jedynie z pojęć pierwotnych):

Aksjomaty dodawania

D1. $n+0=n$

D2. $n+m^*=(n+m)^*$

a więc:

$$n+1=(n+0)^*=n^*$$

$$n+2=n+1^*=(n+1)^*$$

$$n+3=n+2^*=(n+2)^*$$

itd. Pojawia się tutaj tzw. procedura rekurencyjna: jeśli znamy wynik dodawania dwóch liczb naturalnych $n+m$ to znamy też wynik dodawania $n+m^*$.

Z aksjomatów tych wynikają następujące własności działania dodawania:

WD1. $\forall\, n\in N \qquad n+0=0+n=n$

WD2. $\forall\, n,m\in N \qquad n+m=m+m$ przemienność

WD3. $\forall\, n,m,k\in N \qquad n+(m+k)=(n+m)+k$ łączność

Mnożenie liczb naturalnych

Aksjomaty mnożenia (działanie mnożenia oznaczamy ·)

M1. $\forall\, n\in N \qquad n\cdot 0=0$

M2. $\forall\, n,m\in N \qquad n\cdot m^{*}=n\cdot m+n$

Stąd:

$$n\cdot 1=n\cdot 0^{*}=n\cdot 0+n=n$$

$$n\cdot 2=n\cdot 1^{*}=n\cdot 1+n=n+n$$

$$n\cdot 3=n\cdot 2^{*}=n\cdot 2+n=(n+n)+n$$

$$\vdots$$

$$n\cdot m=\underbrace{n+n+n+.....+n}_{m}$$

Własności mnożenia

WM1. $\forall n, m \in N$ $n \cdot m = m \cdot n$ przemienność

WM2. $\forall n, m, k \in N$ $n \cdot (m \cdot k) = (n \cdot m) \cdot k$ łączność

WM3. $\forall n, m, k \in N$ $(m+k) \cdot n = m \cdot n + k \cdot n$

rozdzielność mnożenia względem dodawania

Nierówności

Nierówność słaba: $m \leq n$ - czytamy: liczba naturalna n jest większa lub równa od liczby naturalnej m.

Nierówność ostra: $m < n$ **-** czytamy: liczba naturalna n jest większa od liczby naturalnej m.

Co to znaczy ?

Wiemy już, że liczby naturalne możemy uporządkować w postaci ciągu 0,1,2,3.....

Mówimy, że $m \leq n$, jeżeli n leży w powyższym ciągu na prawo od m lub $m = n$.

Mówimy, że $m < n$, jeżeli n leży na prawo od m i $m \neq n$.

Twierdzenie 1.1

1. $0 \leq n$
2. $n \leq n$ (zwrotność)
3. $n \leq m$ i $m \leq k \Rightarrow n \leq k$ (przechodniość)
4. $n \leq m$ lub $m \leq n$ (spójność)
5. $m \leq n \Leftrightarrow \exists k \in N : n = m + k$

Odejmowanie

Odjąć od liczby naturalnej n liczbę naturalną m oznacza znaleźć taką liczbę naturalną k, że zachodzi $m+k=n$.

Uwaga: Jeżeli $m>n$ to powyższe działanie jest niewykonalne.

Jeżeli istnieje takie k, to liczba ta nazywa się różnicą n i m piszemy $k=n-m$.

Dzielenie

Podzielić liczbę naturalną n przez liczbę naturalną m oznacza znaleźć taką liczbę naturalną k ,że zachodzi $n=m\cdot k$.

Działanie to oczywiście nie zawsze jest wykonalne. Jeżeli istnieje takie k to nazywamy je ilorazem n i m. Liczby m i k nazywamy dzielnikami liczby n.

$$k=\frac{n}{m} \quad , \quad m=\frac{n}{k}$$

Fakty

a) Jeżeli m jest dzielnikiem liczb n_1 i n_2 to m jest dzielnikiem ich sumy n_1+n_2.

$$n_1=m\cdot k_1 \quad , \quad n_2=m\cdot k_2$$

$$n_1+n_2=m\cdot k_1+m\cdot k_2=m\cdot(k_1+k_2)$$

b) Jeżeli m jest dzielnikiem liczb n_1 i n_2 i $n_1\geq n_2$ to m jest dzielnikiem różnicy n_1-n_2.

c) Jeżeli $m=n$ to $\forall k\in N \quad m+k=n+k$

d) Jeżeli $m=n$ to $\forall k\in N \wedge \forall m>l \quad m-l=n-l$

e) Jeżeli $m=n$ to $\forall k\in N \quad m\cdot k=n\cdot k$

f) Jeżeli $m=n$ $\forall k$ dzielnika m $\frac{m}{k}=\frac{n}{k}$

Uwaga problem !

A) Jest oczywiste, że liczb naturalnych jest więcej niż parzystych liczb naturalnych (bo są jeszcze nieparzyste liczby naturalne).

B) Łatwo widać, że liczb naturalnych jest dokładnie tyle samo co parzystych liczb naturalnych, bo formuła $2\cdot n$ przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej dokładnie jedną parzystą liczbę naturalną i odwrotnie.

Które stwierdzenie jest prawdziwe ?

Liczby pierwsze i złożone

Wprowadzimy oznaczenie: n, m - liczby naturalne

$$n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots\ldots \cdot n}_{m}$$

Definicja 1.1

Liczbą pierwszą nazywamy taką liczbę naturalną, której jedynymi dzielnikami są 1 i ona sama.

Twierdzenie 1.2

Każdą liczbę naturalną n można zapisać w postaci:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots\ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in N \qquad (*)$$

$p_1, p_2, \ldots, p_k$ - różne pierwsze dzielniki liczby n .

Rozkład (*) jest jedyny.

Twierdzenie 1.3

Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Dowód (nie wprost, a.a)

Załóżmy, że istnieje skończona ilość liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

Tworzymy liczbę $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots\ldots \cdot p_k + 1$.

Liczba ta jest większa od każdej z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$, a więc musi być liczbą złożoną.

Wynika stąd, że jest podzielna przez jedną z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$. To jest jednak niemożliwe, bo $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots\ldots \cdot p_k + 1$.

□

Cechy podzielności

Symbolem $\overline{a_n a_{n-1} .... a_2 a_1 a_0}$ będziemy oznaczać liczbę, której cyframi (od lewej do prawej) są odpowiednio $a_n, a_{n-1}, ... a_2, a_1, a_0$.

1. Liczba $n=\overline{a_n a_{n-1} .... a_2 a_1 a_0}$ dzieli się przez 2 wtw. gdy ostatnia cyfra tej liczby dzieli się przez 2.

   Dowód

   $\Rightarrow \quad n=a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$

   a więc $a_0 = n - a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10$

   Prawa strona tej równości oczywiście dzieli się przez 2 więc lewa też.

   $\Leftarrow \quad n=a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$

   a_0 a więc i prawa strona równości dzieli się przez 2 więc lewa też.

   □

2. Liczba $n=\overline{a_n a_{n-1} .... a_2 a_1 a_0}$ dzieli się przez 4 wtw. Gdy liczba $\overline{a_1 a_0}$ dzieli się przez 4.

   Dowód b. podobny do poprzedniego.

3. Liczba $n=\overline{a_n a_{n-1}....a_2 a_1 a_0}$ dzieli się przez 9 wtw. gdy suma cyfr liczby n dzieli się przez 9.

$\Rightarrow \; 10^k=\underbrace{\overline{9\cdot 9\cdot 9\cdot....\cdot 9}}_{k}+1$

Wobec tego:

$$n=a_n\underbrace{\overline{9\cdot 9\cdot...\cdot 9}}_{n}+a_{n-1}\underbrace{\overline{9\cdot 9\cdot...\cdot 9}}_{n-1}+...+\overline{9}\cdot a_1+a_0+a_1+....+a_n$$

$$a_0+a_1+....+a_n=n-a_n\underbrace{\overline{9\cdot 9\cdot...\cdot 9}}_{n}-a_{n-1}\underbrace{\overline{9\cdot 9\cdot...\cdot 9}}_{n-1}-\overline{9}\cdot a_1$$

Prawa strona dzieli się przez 9 więc i lewa też.

$$\Leftarrow \; n=a_n\underbrace{\overline{9\cdot 9\cdot...\cdot 9}}_{n}+a_{n-1}\underbrace{\overline{9\cdot 9\cdot...\cdot 9}}_{n-1}+...+\overline{9}\cdot a_1+a_0+a_1+....+a_n$$

Prawa strona dzieli się przez 9 więc i lewa też.

□

4. Identyczna cecha podzielności obowiązuje również dla 3.

5. Liczba naturalna n dzieli się przez 5 wtw. gdy ostatnią cyfrą jest 0 lub 5.

Indukcja matematyczna

Zasada indukcji zupełnej

Niech $T(n)$ będzie twierdzeniem dotyczącym liczby naturalnej n .

Zakładamy, że:

a) $T(n_0)$ jest prawdziwe dla $n_0 \in N$

b) jeżeli $T(k)$ jest prawdziwe, to $T(k+1)$ też jest prawdziwe $k \in N$ i $k \geq n_0$

Wtedy $T(n)$ jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$.

b) nazywamy krokiem indukcyjnym lub przesłanką indukcyjną.

Przykład 1.1

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość:

$$1+2+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2} \qquad (*)$$

a) Sprawdzamy, czy wzór jest prawdziwy dla $n_0=1$.
L=1, P = $\frac{1\cdot 2}{2}=1$, L=P

b) Zakładamy, że równość (*) jest prawdziwa dla $k\geq 1$ i udowadniamy, że jest prawdziwa dla $k+1$.

A więc $1+2+...+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2}$

Wtedy:

$$1+2+...+k+k+1=\frac{k\cdot(k+1)}{2}+k+1=$$
$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=$$
$$\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=T(k+1)$$

□

FUNKCJE

Definicja 2.1

Niech X i Y będą niepustymi zbiorami (podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$). Jeżeli każdemu elementowi zbioru X przyporządkowany został dokładnie jeden element zbioru Y, to mówimy, że zostało określone odwzorowanie (liczbowe) lub funkcja (liczbowa) zbioru X w zbiór Y.

Zbiór X nazywamy dziedziną tej funkcji.

Piszemy $f: X \to Y$.

Wykresem funkcji liczbowej nazywamy podzbiór płaszczyzny $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X, y = f(x)\}$.

Zbiór $D_f^{\leftarrow} = \{y \in Y : y = f(x), x \in X\}$ nazywamy zbiorem wartości lub przeciwdziedziną funkcji f.

Od tego momentu będziemy zajmować się wyłącznie funkcjami liczbowymi.

Definicja 2.2

Miejscem zerowym funkcji f nazywamy takie $x_0 \in X$, dla którego $f(x_0) = 0$.

Definicja 2.3

Funkcje $f: X \to Y$ i $g: Z \to Y$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $X = Z$ i $\forall x \in X \; f(x) = g(x)$.

Definicja 2.4

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy rosnącą (niemalejącą) jeżeli $\forall x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$ zachodzi:

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad (f(x_1) \leqslant f(x_2))$$

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy <u>malejącą</u> (<u>nierosnącą</u>) , jeżeli $\forall x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$ zachodzi:

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad (f(x_1) \geq f(x_2))$$

Funkcje rosnące, malejące, nierosnące i niemalejące nazywamy funkcjami <u>monotonicznymi</u>.

Funkcja malejąca lub rosnąca to funkcja ściśle <u>monotoniczna</u>.

<u>Definicja 2.5</u>

Funkcja <u>parzysta</u> to funkcja $f: X \to Y$ dla której:
$\forall x \in X \quad -x \in X \ \wedge \ f(-x) = f(x)$.

<u>Definicja 2.6</u>

Funkcja <u>nieparzysta</u> to funkcja $f: X \to Y$ dla której:
$\forall x \in X \quad -x \in X \ \wedge \ f(-x) = -f(x)$.

<u>Definicja 2.6</u>

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy <u>okresową</u> jeżeli $\exists T \in \mathbb{R}, T \neq 0$ i $x \in X \quad x+T \in X \ \wedge \ f(x+T) = f(x)$. Liczbę T nazywamy <u>okresem</u> funkcji f .

<u>Definicja 2.8</u>

<u>Superpozycją</u> funkcji $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$ nazywamy funkcję $h: X \to Z$ zdefiniowaną wzorem $h(x) = g(f(x))$. Superpozycję funkcji f i g oznaczamy $h = g \circ f$. A więc $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Definicja 2.9

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy funkcją różnowartościową (injekcją) jeżeli:

$$x_1, x_2 \in X \quad (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$$

Definicja 2.10

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy funkcją surjekcją (funkcją "na") jeżeli $D_f = Y$.

Definicja 2.11

Funkcję która jest jednocześnie injekcją i surjekcją nazywamy funkcją wzajemnie jednoznaczną (bijekcją).

Definicja 2.10

Niech $f: X \to Y$ będzie bijekcją. Funkcję $g: Y \to X$ nazywamy funkcją odwrotną do funkcji f jeżeli $\forall x \in X, y \in Y$ $g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$.

Funkcję g oznaczamy symbolem f^{-1} .

$$f^{-1} \circ f = Id_x \qquad f \circ f^{-1} = Id_y$$

SUMA

$$a_1+a_2+.....+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{j=1}^{n} a_j$$

Dolna granica sumowania - dowolna liczba całkowita.

Górna granica sumowania - dowolna liczba całkowita większa od dolnej.

Własności symbolu sumy:

1) $\sum_{p=m}^{n} a_p=\sum_{p=m}^{k} a_p+\sum_{p=k+1}^{n} a_p \qquad m\le k<n$

2) $\sum_{k=m}^{n} (a_k\pm b_k)=\sum_{k=m}^{n} a_k\pm\sum_{k=m}^{n} b_k$

3) $\sum_{i=m}^{n} c\,a_i=c\sum_{i=m}^{n} a_i$

4) $\sum_{i=m}^{n} c=(n-m+1)c$

5) $\sum_{j=m}^{n} a_j=\sum_{i=m-r}^{n-r} a_{i+r}$

x_{11}	x_{12}	.....	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$
x_{21}	x_{22}	.....	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$
.				
.				
.				
.				
x_{m1}	x_{m2}	.....	x_{mn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{mj}$
$\sum_{p=1}^{m} x_{p1}$	$\sum_{p=1}^{m} x_{p2}$	.....	$\sum_{p=1}^{m} x_{pn}$	

$$\sum_{p=1}^{m} x_{p1}+\sum_{p=1}^{m} x_{p2}+.....+\sum_{p=1}^{m} x_{pn}=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{p=1}^{m} x_{pj})$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}+.....+\sum_{j=1}^{n} x_{mj}=\sum_{p=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} x_{pj})$$

Więc:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} x_{pj}=\sum_{p=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{pj}$$

Zachodzą wzory:

a) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c\,a_{ik}=c\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}$$

b) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c=c\,m\,n$$

c) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_i b_k=\sum_{i=1}^{n} a_i\sum_{k=1}^{m} b_k$$

d) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_{ik}\pm b_{ik})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\pm\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{ik}$$

ILOCZYN

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

1) $\prod_{k=m}^{m} a_k = a_m \qquad m \geq 0$

2) $\prod_{k=m}^{n} a_k = \left(\prod_{k=m}^{n-1} a_k\right) a_n \qquad n > m \geq 0$

3) $\prod_{k=p}^{m-1} a_k \cdot \prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=p}^{n} a_k \qquad n \geq m \geq p+1 \geq 1$

4) $\prod_{k=m}^{n} a_k b_k = \prod_{k=m}^{n} a_k \cdot \prod_{k=m}^{n} b_k \qquad n \geq m \geq 0$

5) $\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m+r}^{n+r} a_{k-r} \qquad n \geq m \geq 0 \;\; ; \;\; r \geq 0$

6) $\prod_{k=m}^{m} a_k = \prod_{k=m}^{m} a_{n+m-k} \qquad n \geq m \geq 0$

Funkcja liniowa

Definicja 1

Funkcją liniową nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$f(x)=ax+b \quad a,b\in\mathbb{R}$$

a - współczynnik kierunkowy, b - wyraz wolny.

Wykresem funkcji liniowej jest linia prosta przechodząca przez punkty $(0,b)$ i $(-\frac{b}{a},0)$ dla $a\neq 0$ lub dla $a=0$ prosta równoległa do osi O_x przechodząca przez punkt $(0,b)$.

Funkcja liniowa jest:

1. dla $a>0$ rosnąca
2. dla $a<0$ malejąca
3. dla $a=0$ stała

Miejscem zerowym funkcji liniowej (dla $a\neq 0$) jest $x_0=-\frac{b}{a}$.

Funkcja kwadratowa

Definicja 2

Funkcją kwadratową nazywamy funkcję określoną wzorem:

$$f(x)=ax^2+bx+c \qquad a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$$

Funkcję tę nazywamy trójmianem kwadratowym.

Równanie $ax^2+bx+c=0$ nazywamy równaniem kwadratowym.

Równanie kwadratowe ma pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyróżnik $\Delta=b^2-4ac\geq 0$.

Pierwiastki te określone są wzorami:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

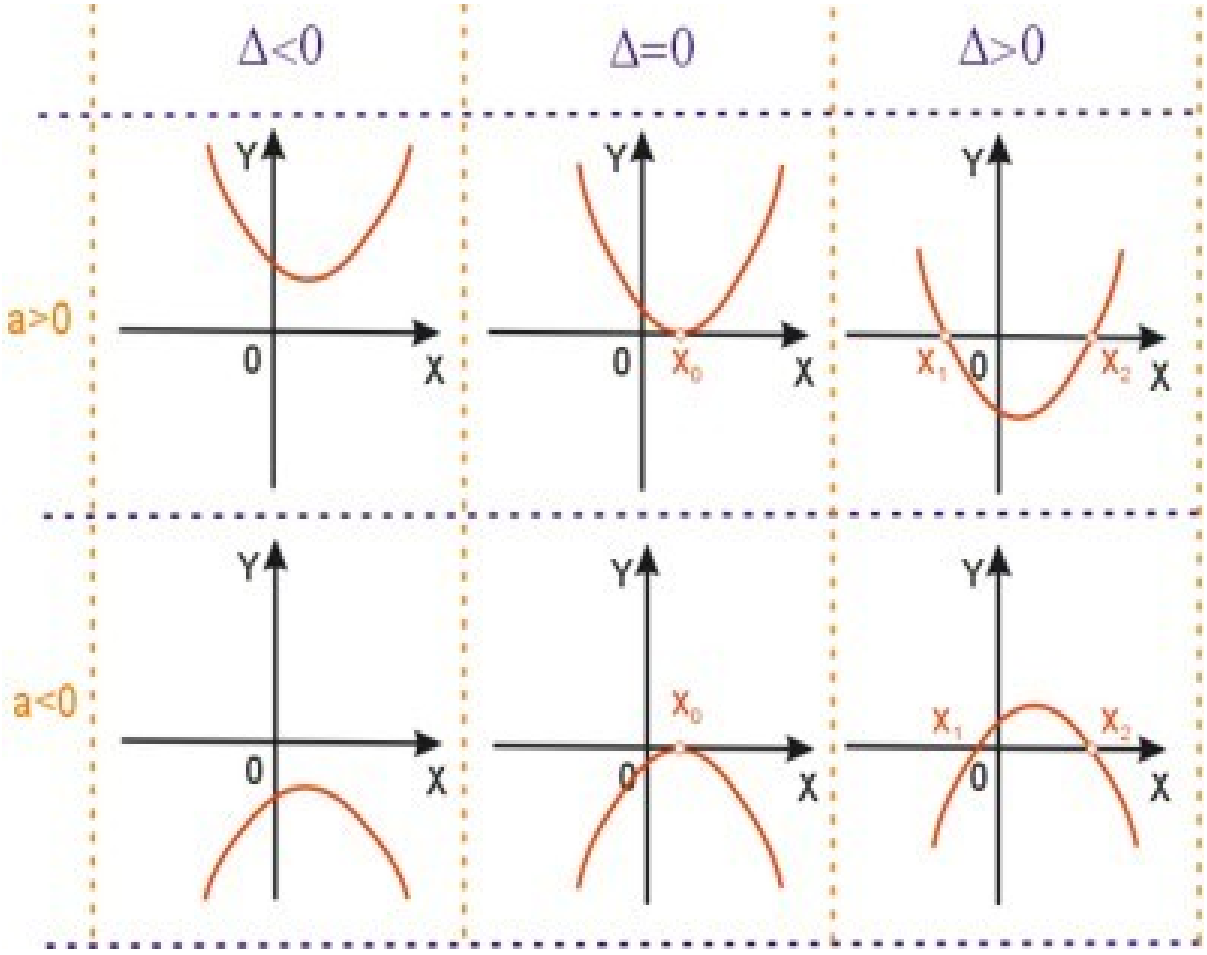
Jeżeli $\Delta=0$ to $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.

Jej wierzchołek ma współrzędne:

$$x_w=-\frac{b}{2a} \quad , \quad y_w=-\frac{\Delta}{4a}$$

Parabola $y=ax^2+bx+c$ przyjmuje sześć podstawowych położeń względem układu współżędnych w zależności od współczynnika a i wyróżnika Δ .



Wzory Viete'a

Dla pierwiastków równania kwadratowego zachodzą związki:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad , \qquad x_1\cdot x_2=-\frac{c}{a}$$

Wielomiany

Definicja 3

Wielomianem stopnia n zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję postaci:

$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ gdzie:

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ $a_n \neq 0$

Współczynnik a_0 nazywamy wyrazem wolnym.

Definicja 4

Dwa niezerowe wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i ich współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x są równe.

Działania na wielomianach

Wielomiany możemy dodawać, odejmować i mnożyć. Działania te wykonujemy tak jak odpowiednie działania na wyrażeniach algebraicznych.

Definicja 5

Dzielenie wielomianów.

Jeżeli $P(x)$ jest niezerowym wielomianem oraz $W(x)$ jest dowolnym wielomianem, to istnieją takie dwa wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$, że zachodzi równość:

$$W(x)=P(x)\cdot Q(x)+R(x)$$

Wielomiany $W(x)$, $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ nazywamy odpowiednio dzielną, dzielnikiem, ilorazem i resztą, a stopień wielomianu $R(x)$ jest mniejszy niż stopień wielomianu $P(x)$ lub $R(x)\equiv 0$.

Wielomiany

Zajmiemy się wielomianami od od wielu zmiennych.

Definicja 1

Jednomianem od wielu zmiennych $x, y, \dots, z$nazywamy wyrażenie składające się ze współczynnika liczbowego i iloczynu potęg tych zmiennych o naturalnych wykładnikach.

$$Ax^k y^l, \dots, z^q k, l, \dots, q \in \mathbb{N}$$

Jednomian jest najprostszym przykładem wielomianu.

1. Gdy$A \neq 0$wtedy wykładnik potęgi przy danym argumencie nazywa się stopniem jednomianu względem tego argumentu.

Dla $Ax^k y^l, \dots, z^q k, l, \dots, q \in \mathbb{N}$ (*)

k- stopień jednomianu (*) względem x
l- stopień jednomianu (*) względem y

Definicja 2

1. Suma wszystkich wykładników $k + l + \dots + q$nazywa się stopniem danego jednomianu.

2. Gdy A=0 – jednomian zerowy – nie ma żadnego stopnia.

Definicja 3

Dwa różne od zera jednomiany od tych samych zmiennych:

$$Ax^{k_1} y^{l_1}, \dots, z^{q_1} \text{i} Bx^{k_2} y^{l_2}, \dots, z^{q_2}$$

nazywają się podobnymi, jeżeli każda ze zmiennych wchodzi do każdego jednomianu w tej samej potędze:

$$k_1 = k_2, l_1 = l_2, \dots, q_1 = q_2$$

Uwaga:

Jednomian zerowy jest podobny do każdego jednomianu:

$Ax^k y^l, \dots, z^q \quad 0\mathrm{x}^k y^l, \dots, z^q$

„Redukcja wyrazów podobnych”

$$2\mathrm{x}^2 y^3 z - 3\mathrm{x}^2 y^3 z + 7\mathrm{x}^2 y^3 z = 6\mathrm{x}^2 y^3 z$$

Wielomian jest sumą jednomianów

Po redukcji wyrazów podobnych mamy dwie możliwości:

1. Wielomian ma postać sumy parami nie podobnych jednomianów:

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} \dots z^{q_1} + A_2 x^{k_2} y^{l_2} \dots z^{q_2} + \dots + A_3 x^{k_3} y^{l_3} \dots z^{q_3}$$

$x, y, \dots z$ - zmienne, $A_1, A_2, \dots, A_3$- współczynniki.

2. Współczynniki wszystkich jednomianów są równe 0.

$A_1 = A_2 = \dots = A_3 = 0$ - wielomian zerowy.

Definicja 3

Przedstawienie wielomianu w postaci sumy parami nie podobnych jednomianów albo w postaci wielomianu zerowego nazywa się postacią kanoniczną tego wielomianu.

$P(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^2 - 2\mathrm{y}^2 + x$ to nie jest suma wielomianów

Postać kanoniczna:

$$P(x, y) = 2\mathrm{x}^2 + x$$

Definicja 4

Stopniem wielomianu zadanego w postaci kanonicznej i różnego od wielomianu zerowego, nazywamy największy ze stopni jednomianów wchodzących w skład tego wielomianu.

Wielomian$x^2 + 3xy + y^2 + 2x + y + 1$ma stopień 2.

Definicja 5

Wielomian zadany w postaci kanonicznej:

$$P(x, y, \dots z) = A_1 x^{k_1} y^{l_1} \dots z^{q_1} + A_2 x^{k_2} y^{l_2} \dots z^{q_2} + \cdots$$

nazywa się wielomianem jednorodnym albo formą stopnia n jeżeli wszystkie jego wyrazy mają ten sam stopień n:

$$k_1 + l_1 + \cdots + q_1 = k_2 + l_2 + \cdots + q_2 = \cdots = n$$

Każdy jednomian jest jednorodnym wielomianem:

$$x^3, x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, x^2y + y^2x + z^2y$$

wielomiany jednorodne stopnia 3 – go.

Twierdzenie

Jeżeli w jednorodnym wielomianie stopnia n argumenty $x, y, \dots, z$zastąpimy argumentami $tx, ty, \dots, tz$to wielomian zostanie pomnożony przez t^n:

$$P(tx, ty, \dots tz) = t^n P(x, y, \dots z)$$

Dowód:

$A_1 x^k y^l \dots z^q$- jeden ze składników wielomianu P.

$$k + l + \cdots q = n$$

$$x, y, \dots, q \to tx, ty, \dots, tz$$

$$A(tx)^k(ty)^l \dots (tz)^q = At^{k+l+\dots+q}x^k y^l \dots z^q = t^n A x^k y^l \dots z^q = t^n A x^k y^l \dots z^q$$

i to zachodzi dla każdego składnika wielomianu P.

cbdo.

Funkcja Wykładnicza

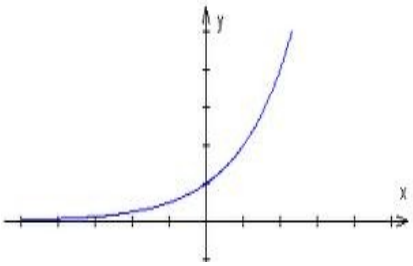
Definicja 1

Niech $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ i $a \neq 1$.
Funkcję określoną wzorem $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ nazywamy funkcją wykładniczą o podstawie a .

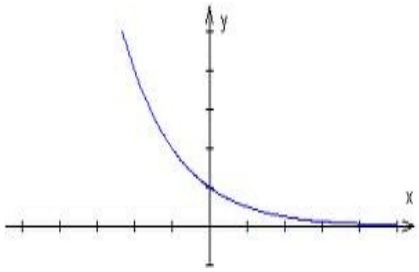
Dziedziną funkcji wykładniczej jest $\mathbb{R}$, przeciwdziedziną zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

Wykres funkcji wykładniczej nazywamy krzywą wykładniczą.

$a > 1$



$0 < a < 1$



Własności funkcji wykładniczej

1. Funkcja wykładnicza jest funkcja różnowartościową.

2. Funkcja wykładnicza jest rosnąca dla $a > 1$ i malejąca dla $0 < a < 1$

Logarytm

Definicja

Dla $a \neq 1$, $a > 0$ i $y > 0$.

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Liczbę a nazywamy podstawą logarytmu.

Najważniejsze podstawy logarytmu to:

1. $a = 10$ -logarytm o podstawie dziesięć nazywamy logarytmem dziesiętnym.

2. $e = 2{,}7182818284 \ldots\ldots$. Liczbę e nazywa się liczbą Eulera. Logarytm o podstawie e nazywa się logarytmem naturalnym i stosujemy oznaczenie $\log_e x = \ln x$.

Własności logarytmów

1. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a (\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a (x^p) = p \cdot \log_a x$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

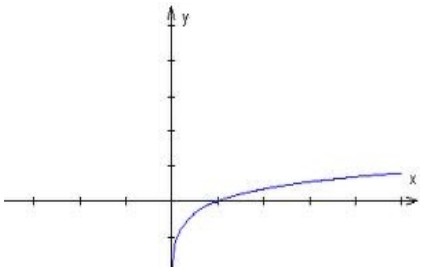
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

W szczególności $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

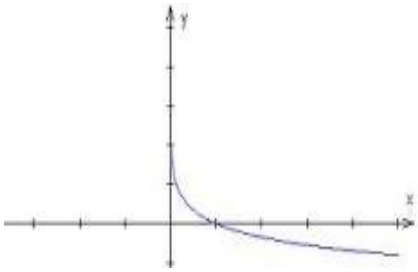
Funkcja logarytmiczna

Funkcję $f(x)=\log_a x$, $a>0$ i $a\neq 1$, $x>0$ nazywamy funkcją logarytmiczną o podstawie a.

$a>1$



$0<a<1$



Własności funkcji logarytmicznej

1. Funkcja logarytmiczna jest funkcją różnowartościową.
2. Funkcja logarytmiczna jest rosnąca dla $a>1$ i malejąca dla $0<a<1$.
3. Funkcja logarytmiczna $y=\log_a x$ jest funkcją odwrotną do funkcji $y=a^x$.

Ciągi liczbowe

Definicja 1

Ciągiem liczbowym (rzeczywistym) nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych.

Będziemy zajmować się tylko ciągiem arytmetycznym i geometrycznym.

Definicja 2

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg, w którym każdy wyraz (oprócz pierwszego) dostajemy przez dodanie do wyrazu poprzedniego ustalonej liczby r zwanej różnicą ciągu.

Wobec tego $a_{n+1}=a_n+r \quad n=1,2,\ldots$.

Stąd $a_n=a_1+(n-1)r$ i $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \qquad n=2,3,...$

– każdy wyraz ciągu arytmetycznego jest średnią arytmetyczną wyrazów poprzedniego i następnego.

Ciąg arytmetyczny o różnicy r jest rosnący dla $r>0$ i malejący dla $r<0$.

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n=a_1+a_2+.....+a_n$$

$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ lub $S_n=\frac{2a_1+(n-1)r}{2}\cdot n$

Ciąg geometryczny

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg, w którym każdy wyraz (za wyjątkiem pierwszego) dostajemy przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez ustaloną liczbę q , zwaną ilorazem ciągu.

Stąd $a_{n+1}=a_n\cdot q \qquad n=1,2,\ldots$

a więc $a_n=a_1 q^{n-1} \qquad n=1,2,\ldots$

i $a_n=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}} \qquad n=2,3,\ldots$

– dowolny (za wyjątkiem pierwszego) wyraz ciągu geometrycznego jest średnią geometryczną wyrazów poprzedniego i następnego.

Ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie dodatnim i ilorazie q jest:

- rosnący gdy $q>1$
- malejący gdy $0<q<1$
- stały gdy $q=1$

Ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie ujemnym i ilorazie q jest:

- rosnący gdy $0<q<1$
- malejący gdy $q>1$
- stały gdy $q=1$

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

$$S_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{dla} \quad q\neq 1$$

$$S_n=n\cdot a_1 \quad \text{dla} \quad q=1$$

Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

$$S=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

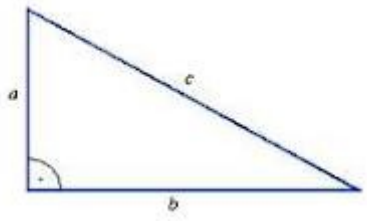
Jeżeli $|q|<1$ to suma S jest skończona i

$$S=\frac{a_1}{1-q}$$

PLANIMETRIA

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

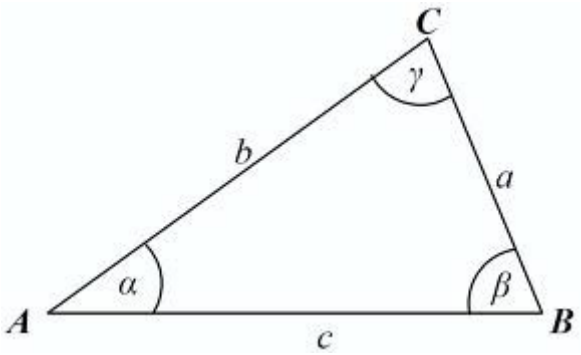


$$a^2 + b^2 = c^2$$

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli w trójkącie suma kwadratów długości dwóch boków jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to ten trójkąt jest prostokątny.

Twierdzenie sinusów



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\gamma} = 2R$$

R - promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

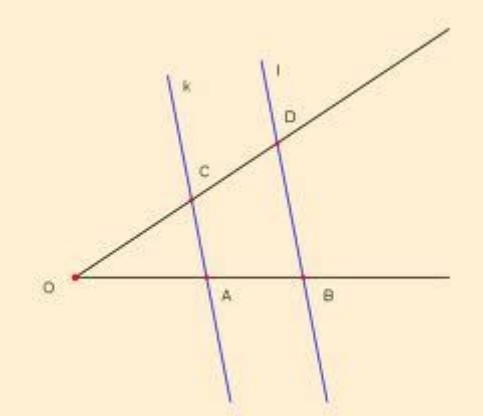
Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Twierdzenie Talesa



Proste k i l są równoległe.

Wtedy OC:OD=OA:OB=AC:BD

Oprócz tego kąt OAC równa się kątowi OBD.

Okrąg wpisany w czworokąt

W czworokąt można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

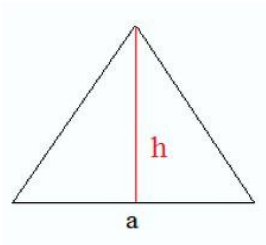
Okrąg opisany na czworokącie

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych kątów tego czworokąta są równe.

Pola figur płaskich

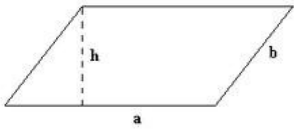
Pole trójkąta

$S=\frac{1}{2}a\,h$, h - wysokość tego trójkąta poprowadzona do boku a .



Pole równoległoboku

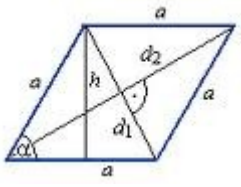
$$S=a\,h$$



Pole rombu

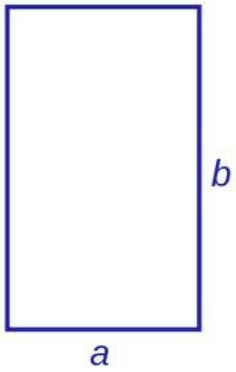
$$S=a\,h=\frac{1}{2}d_1 d_2$$

d_1, d_2 - przekątne rombu.



Pole prostokąta

$$S = a\,b$$



Pole koła

$$S = \pi r^2$$

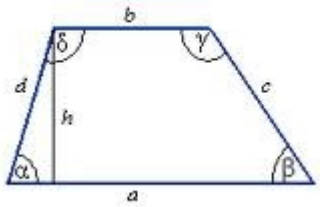
r - promień koła.

Obwód koła

$$O = 2\pi r$$

Pole trapezu

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h$$



Geometria analityczna na płaszczyźnie

Na płaszczyźnie dane są dwa punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_1, y_1)$.

Odległość tych punktów (długość odcinka AB) liczymy według wzoru:

$$d(A, B)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Prosta na płaszczyźnie

Równanie ogólne prostej

$Ax+By+C=0$ i $A^2+B^2>0$

Równanie kierunkowe prostej

$y=mx+b$ $m, b\in\mathbb{R}$

Parametr m nazywa się współczynnikiem kierunkowym prostej i jest równy tangensowi kąta nachylenia tej prostej do dodatniego kierunku osi Ox.

Prosta o danym współczynniku kierunkowym m i przechodząca przez punkt $P(x_0, y_0)$ ma równanie:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

Prosta nie prostopadła do osi Ox i przechodząca przez punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_1, y_1)$ ma równanie:

$$y-y_1=\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}(x-x_1)$$

Dane są dwie proste o równaniach:

$y=m_1x+b_1$ i $y=m_2x+b_2$

Kąt ostry α pod którym przecinają się te proste obliczamy ze wzoru:

$$tg\,\alpha=\left|\frac{(m_2-m_1)}{(1+m_1m_2)}\right|$$

Dostajemy stąd:

a) warunek równoległości prostych:

$$m_1 = m_2$$

b) warunek prostopadłości prostych:

$$m_1 m_2 = -1$$

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Okrąg

Równanie okręgu o środku $S(a, b)$ i promieniu r .

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Koło
(otwarte)

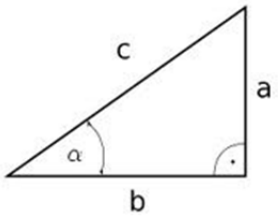
Koło o środku $S(a, b)$ i promieniu r jest to zbiór punktów płaszczyzny leżących wewnątrz okręgu o środku $S(a, b)$ i promieniu r .

Współrzędne punktów tego koła spełniają nierówność:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$$

Trygonometria

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego.



Trójkąt o bokach a, b, cjest trójkątem prostokątnym.

Definicja

Funkcje trygonometryczne kąta αokreślamy następującymi równościami:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ tg\alpha = \frac{a}{b},\ ctg\alpha = \frac{b}{a}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych dla najważniejszych kątów:

α	0	30	45	60	90
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$ctg\alpha$	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Miara łukowa kąta

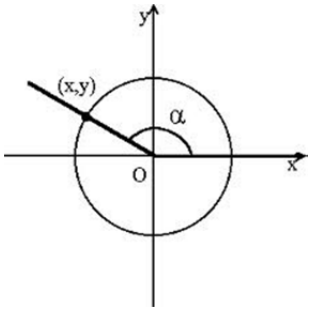
Definicja

Miarą łukową kąta w kole o promieniu 1 jest długość łuku, na którym oparty jest ten kąt.

Jednostką miary łukowej jest radian.

$1^o = \frac{\pi}{180}$rad $\approx$ 0,017453 rad. 1 rad $= \frac{\pi}{180}$

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta



$\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$, $tg\alpha = \frac{y}{x}$, $ctg\alpha = \frac{x}{y}$

Okresowość funkcji trygonometrycznych

1. $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$
2. $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$
3. $tg(\alpha + k\pi) = tg\alpha$
4. $ctg(\alpha + k\pi) = ctg\alpha$

Parzystość funkcji trygonometrycznych

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$,
$tg(-\alpha) = -tg(\alpha)$, $ctg(-\alpha) = -ctg(\alpha)$

	I ćwiartka	II ćwiartka		II ćwiartka		IV ćwiartka	
ϕ	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3}{2}\pi - \alpha$	$\frac{3}{2}\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$
	$90^o - \alpha$	$90^o + \alpha$	$180^o - \alpha$	$180^o + \alpha$	$270^o - \alpha$	$270^o + \alpha$	$360^o - \alpha$
$\sin\phi$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\phi$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\phi$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$ctg\phi$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Tożsamości trygonometryczne

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$tg\alpha + ctg\alpha = 1$ $\quad \alpha \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

Równania trygonometryczne

Definicja

Równaniem trygonometrycznym nazywamy równanie w którym niewiadome występują wyłącznie w argumentach funkcji trygonometrycznych.

Aby rozwiązać równanie trygonometryczne musimy poprzez odpowiednie przekształcenia i podstawienia doprowadzić je do jednego lub alternatywy kilku równań postaci $f(x) = f(a)$gdzie $f$jest jedną z funkcji trygonometrycznych.

Wówczas rozwiązania wyglądają następująco:

a) $\sin x = \sin a$ $a \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

$x = a + 2k\pi$lub $x = \pi - a + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = \cos a$

$x = \pm a + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$,$a \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

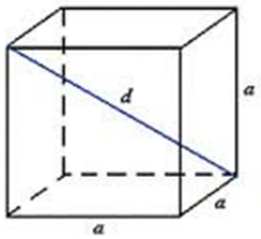
c) $tgx = tga$

$tgx = tga$ $x = a + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

STEREOMETRIA

Podstawowe własności brył

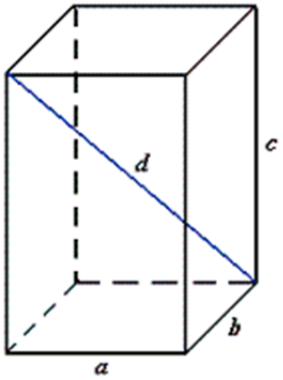
Sześcian



$V = a^3$

$d = a\sqrt{3}$

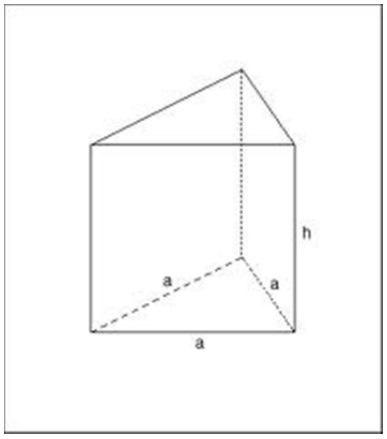
Prostopadłościan



$V = abc$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

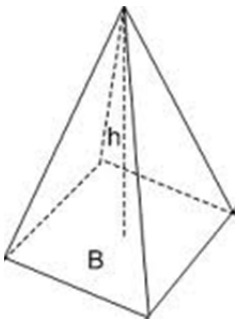
Graniastosłup prosty



$V = P_{podst.}h$

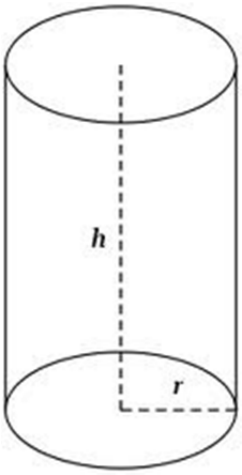
$P_{podst.}$- pole podstawy

Ostrosłup



$V = \frac{1}{3}P_{podst.}h$

Walec

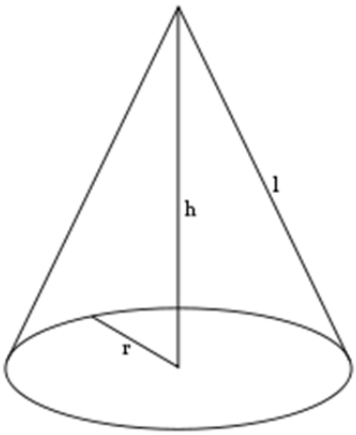


$V = \pi r^2 h$

Pole powierzchni bocznej

$P = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Stożek

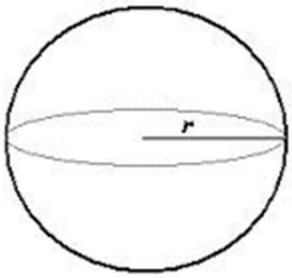


$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Pole powierzchni bocznej

$P = \pi rl + \pi r^2$

Kula



$V = \pi r^2 h$

$P = 4\pi r^2$