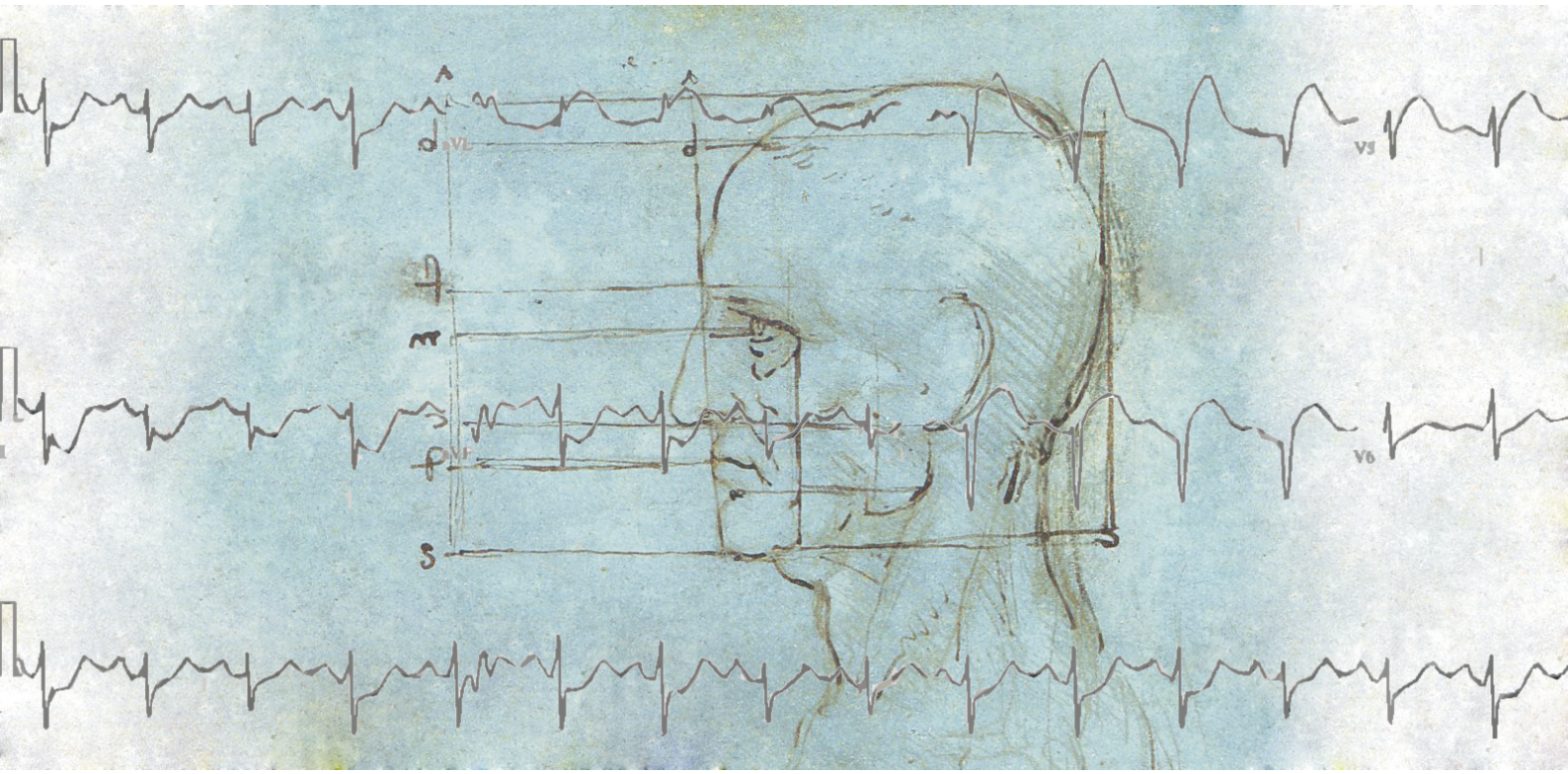


Podstawy fizyki dla fizyki medycznej I

wykład

Piotr Bojarski

Gdańsk, 2011

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytetu Gdańskiego

Skrypt powstał w ramach projektu „Kształcimy profesjonalistów – kompleksowy program kształcenia skierowany do studentów, absolwentów oraz studentów niepełnosprawnych Uniwersytetu Gdańskiego” współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach środków Europejskiego Funduszu Społecznego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET GDAŃSKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Podstawy fizyki dla fizyki medycznej I – mechanika

Wykład: Prof. dr hab. Piotr Bojarski

ćwiczenia : Prof. UG dr hab. A. Kubicki, dr Anna Synak

konsultacje (wykład): pokój 248, wtorek, godz.14.15-16.15 ,
zasady konsultacji, informacje o egzaminie

Literatura do wykładu:

A. K. Wróblewski, J. Zakrzewski, *Wstęp do fizyki*, tom 1, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1984.
C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, *Mechanika*, PWN, Warszawa, 1973.
B. Jaworski, A. Dietłaf, L. Miłkowska, G. Siergiejew, *Mechanika, podstawy fizyki cząsteczkowej i termodynamiki*, kurs fizyki, tom 1, PWN, Warszawa 1968.
R. Resnick, D. Halliday, *Fizyka*, Tom 1, PWN, 1994.
P. Davidovits, „*Physics in Biology and Medicine*", Academic Press, 2008.
A. McCormick, A. Elliot, "*Health Physics*", Cambridge University Press, 2001.
M. Hollins, "*Medical Physics*", M. Hollins, 1990.
D. Halliday, R. Resnick, J.Walker, „*Podstawy Fizyki*", Tom 1, PWN, 2003.
J. Orear, „*Fizyka"*, Tom 1, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1979.
H. Szydłowski, „*Pracownia fizyczna*", PWN, 1997.

Przedmiot badań fizyki

Fizyka jest nauką przyrodniczą , której przedmiotem badań są uniwersalne i fundamentalne własności materii oraz wzajemne oddziaływania składników materii, które prowadzą do tych własności.

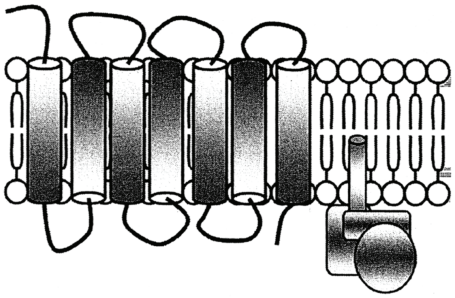
Fizyka to nauka ścisła, w której definiuje się wielkości fizyczne a wyniki badań ujmuje się w postaci liczbowej (np. wyniki pomiarów) oraz praw o charakterze matematycznym. Można też powiedzieć, że nasze odczucia, wrażenia o otaczającej rzeczywistości, skali zachodzących zjawisk i procesów obiektywizuje się poprzez opis ilościowy.

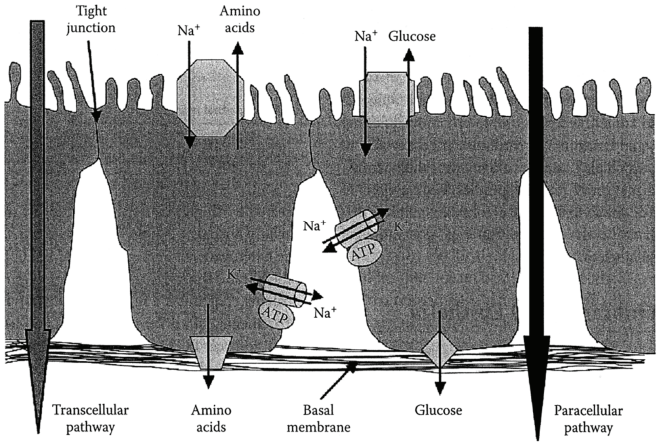
Wielkości fizyczne – takie właściwości ciał lub zjawisk, które można porównywać w stosunku do innych ciał czy zjawisk. Za pomocą wielkości fizycznych wyrażamy *prawa fizyki*.

Przykłady wielkości fizycznych: długość, prędkość, przyspieszenie, czas, energia, masa, pęd, ładunek.

Fizyka a inne nauki:
Między fizyką a innymi naukami przyrodniczymi nie musi występować wyraźna granica co do przedmiotu badań. Jednak większe różnice występują zwykle jeśli chodzi o cele badawcze i stosowane metody. Np. do opisu procesu dysocjacji czy elektrolizy fizyk wprowadzi pojęcia stopnia dysocjacji, ruchliwości jonów, natężenia pola elektrycznego i sformułuje ogólne prawa rządzące przebiegiem tych procesów. W mniejszym stopniu interesować go będzie sama substancja. Dla chemika najważniejsze będą zachodzące reakcje chemiczne w konkretnym środowisku. Mamy tu inne choć uzupełniające się spojrzenia na ten sam problem.
Współcześnie w dziedzinach interdyscyplinarnych jak chemia fizyczna, biofizyka, fizyka biomedyczna, nanotechnologie coraz częściej jednak dochodzi do częściowego zatarcia różnic w stosowanych metodach a wspólnym celem panelu ekspertów o kompetencjach z różnych dziedzin jest rozwiązanie ogólnego problemu wykraczającego poza jedną dziedzinę nauki.

-pogranicza fizyki i biologii
Np. modele membran biologicznych, opis zjawisk transportu substancji przez membrany czy dyfuzji materialnej w płaszczyźnie membrany, opis zjawiska fotosyntezy, określanie objętości komórek, modelowanie własności elektrycznych błon komórkowych i wiele innych.





[Splinter]

- *Fizyka a matematyka*

Matematyka tworzy język formalny fizyki. Aparat matematyczny pozwala na opis ilościowy zjawisk i procesów, na tworzenie ich modeli fizycznych. Pozwala też na analizę danych doświadczalnych.

- *Fizyka a astronomia*

Zasady dynamiki Newtona pozwalają (przy zastosowaniu komputerów) przewidywać ruch układów złożonych z wielu składników np. gwiazd, planet, komet itd. Analiza takich układów doprowadza do odkrywania nowych obiektów w przestrzeni kosmicznej, przewidywania toru ich ruchu. Łącznie z prawami promieniowania sformułowanymi przez fizyków kwantowych uzyskuje się wiedzę o wcześniejszych etapach rozwoju wszechświata czy znajduje się związki między masą a własnościami promieniowania gwiazd czy wiedzę o atmosferze planet.

- *Fizyka a nauki techniczne*

Nauki techniczne to pochodne fizyki, występuje sprzężenie zwrotne w dziedzinie aparatury pomiarowej np. dzięki rozwojowi elektroniki, telekomunikacji, nanotechnologii umożliwiające dalszy rozwój metod pomiarowych fizyki. Powstawanie nowoczesnych materiałów funkcjonalnych, badania obiektów w skali nanometrów i mniejszych są możliwe dzięki aplikacji praw fizycznych zwłaszcza w dziedzinie mechaniki i optyki kwantowej, metod matematycznych i nowoczesnych metod pomiarowych.

Fizyka a medycyna

Fizyka percepcji (słuch, wzrok, dotyk, smak, zapach) – wyróżniamy cztery mechanizmy percepcji: chemiczny, mechaniczny, optyczny, termiczny; np. podejmowanie decyzji medycznej następuje na podstawie badań wizualnych, fizycznych i biochemicznych. Aparatura medyczna (np. pomiar ciśnienia, określanie rytmu serca, jądrowy rezonans magnetyczny, tomografia optyczna, diagnostyka molekularna, rentgenografia, mikroskopia optyczna, lasery w chirurgii, medycynie kosmetycznej, pozytronowy tomograf emisyjny itd.) może być konstruowana dzięki aplikacjom praw fizycznych i fachowo obsługiwana przez osoby rozumiejące fizykę. Modelowanie pracy organów wewnętrznych np. serca, mechanizm skurczu mięśni i wiele innych wykonuje się we współpracy z fizykami.

Cel badań fizycznych:
poznanie praw fizyki jako związków i korelacji między faktami i zjawiskami fizycznymi wyrażonych w postaci wzorów matematycznych.

Przykłady szczególnie ważnych praw fizycznych : zasady zachowania (np. energii czy pędu).

Szczególna cecha praw fizycznych : uniwersalność i niezmienniczość (np. wykonanie tego samego eksperymentu w różnych laboratoriach powinno dać identyczny wynik w tych samych warunkach).

Oddziaływania fundamentalne – wyróżniamy cztery typy oddziaływań: grawitacyjne, elektromagnetyczne, słabe, silne.

Oddziaływanie fundamentalne	Względne natężenie
Grawitacyjne	$5.9\ 10^{-39}$
Elektromagnetyczne	$7.3\ 10^{-3}$
Silne	1
Słabe	10^{-9}

Oddziaływanie grawitacyjne - umożliwia opis ruchu planet, gwiazd itd. oraz umożliwia opis wielu zjawisk okołoziemskich np. spadek swobodny, ruch satelitów, rakiet kosmicznych...
Oddziaływanie to opisuje tzw. prawo powszechnego ciążenia Newtona :

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

gdzie F oznacza siłę oddziaływania mas m_1 i m_2 będących w odległości r zaś G jest stałą uniwersalną $G = 6.672 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}$

Ogólniejszy opis zjawisk grawitacji daje ogólna teoria względności.

Oddziaływania w przestrzeni przenoszą się za pośrednictwem pól fizycznych. Istnienie pola oznacza, że stan przestrzeni ulega takiej zmianie, że gdy umieścimy w nim cząstkę obdarzoną odpowiednią własnością (np. ładunkiem czy masą) to na cząstkę tę podziała siła. Źródłem pola grawitacyjnego jest masa zaś źródłem pola elektromagnetycznego – ładunek.

Pole grawitacyjne $\mathbf{g}$ „czeka”
na masę grawitacyną m,
by działać siłą $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$



Pole elektrostatyczne $\mathbf{E}$ „czeka”
na ładunek elektryczny Q,
by działać siłą $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$

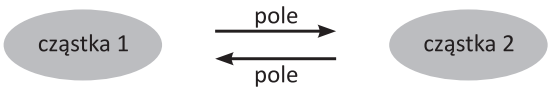


Natężenie $\mathbf{g}$ pola grawitacyjnego
źródła o masie grawitacyjnej m

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

Natężenie $\mathbf{E}$ pola elektrostatycznego
źródła o ładunku elektrycznym Q

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q}$$



[Wróblewski]

Oddziaływanie elektromagnetyczne

Pozwala opisywać np. procesy absorpcji i emisji , rozpraszania światła, podstawy zjawisk i procesów biologicznych czy chemicznych np. fotosyntezy, pozwala opisywać oddziaływanie ładunków elektrycznych, momentów magnetycznych i wiele innych. Przejawem oddziaływania elektromagnetycznego jest prawo Coulomba opisujące oddziaływanie dwóch nieruchomych punktowych ładunków q_1 i q_2 znajdujących się w odległości r od siebie:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

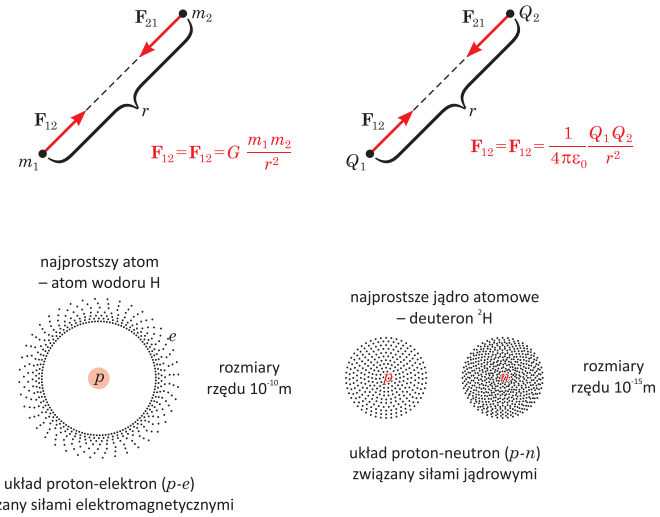
Oddziaływanie grawitacyjne jest wiele rzędów wielkości słabsze od elektromagnetycznego i obserwujemy je tylko w makroświecie.

Przykład – obliczyć jak ma się wielkość oddziaływania grawitacyjnego w stosunku do elektrostatycznego dla pary elektronów w stałej odległości r).

$m_1 = m_2 = 9 \times 10^{-31}$ kg , $q_1 = q_2 = e = 1.6 \times 10^{-19}$ C. Dzielimy wzory na oddziaływanie elektrostatyczne i grawitacyjne przez siebie :

$$F_{el} / F_{gr} \approx k\frac{e^2}{Gm^2} = 4 \cdot 10^{42}$$

Oddziaływanie silne (jądrowe)
Jest odpowiedzialne za wiązanie nukleonów i tworzenie jąder atomowych oraz za reakcje między cząstkami elementarnymi. Oddziaływanie silne ma charakter krótkozasięgowy (do ok. 10^{-15} m)
Trwałość układów nukleonów związanych jest naruszana przez ostatnie z oddziaływań fundamentalnych czyli *oddziaływanie słabe*. W wyniku oddziaływania słabego jądra podlegają np. spontanicznemu rozpadowi beta. Według obecnej wiedzy ma ono także charakter krótkozasięgowy (co najwyżej 10^{-18} m).
Od długiego czasu trwają w fizyce prace nad unifikacją wszystkich typów oddziaływań.



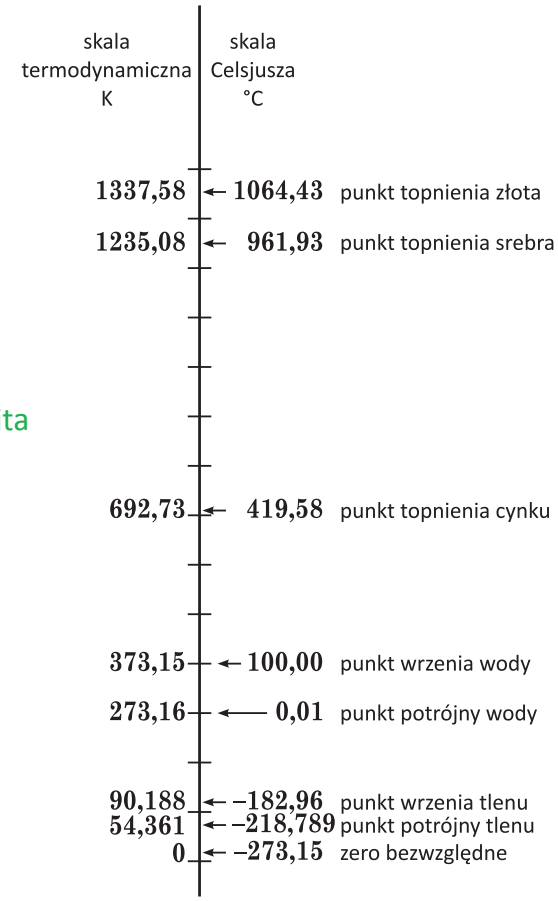
[Wróblewski]

Wielkości podstawowe i pochodne. Jednostki i wzorce. Układy jednostek. Układ SI.

Wielkości podstawowe to takie, których nie definiuje się przy pomocy innych wielkości fizycznych. Zwykle są one łatwo dostępne z pomiaru. Wszystkie inne wielkości zdefiniowane za pomocą wielkości podstawowych nazywa się wielkościami pochodnymi.
Przykład: wielkości podstawowe : długość i czas (jednostki odpowiednio metr i sekunda) , wielkość pochodna: prędkość (metr/sekunda).

Jednostki wielokrotne i podwielokrotne:

atto	10^{-18}	deka	10^{1}
femto	10^{-15}	hekto	10^{2}
piko	10^{-12}	kilo	10^{3}
nano	10^{-9}	mega	10^{6}
mikro	10^{-6}	giga	10^{9}
mili	10^{-3}	tera	10^{12}
centy	10^{-2}	peta	10^{15}
decy	10^{-1}	exa	10^{18}



…a Skala Fahrenheita
$T_F = 32 + 9/5 \cdot T_C$

Przykłady układów jednostek:

Stary - Układ CGS – (centymetr , gram, sekunda – oparty na 3 jednostkach podstawowych). Kłopotem były ułamkowe, niewygodne jednostki w elektryczności i magnetyzmie. Układ ten jest już dawno nieaktualny.

Obowiązujący układ SI (z francuskiego Systéme International) oparty jest na 7 jednostkach podstawowych:

Metr – jednostka długości [m]
Kilogram – jednostka masy [kg]
Sekunda – jednostka czasu [s]
Amper – jednostka natężenia prądu [A]
Kelwin – jednostka temperatury termodynamicznej [K]
Kandela – jednostka światłości (natężenia światła)
Mol – jednostka ilości materii [mol]

Omówienie każdej z jednostek i jej wzorca:

Jednostka długości - 1 metr – wzorzec związany z długością fali linii widmowej czystego izotopu kryptonu o liczbie masowej 86 pobudzanego wyładowaniem elektrycznym. 1 metr = 1 650 763,73 λ (przejście między poziomami 2p10 i 5d5). Uprzednio obowiązywał wzorzec mechaniczny (sztaba stopu platyny z irydem).

Jednostka masy – 1 kilogram – masa wzorcowego walca wykonanego ze stopu platyny z irydem.

Jednostka czasu – sekunda –czas trwania 9 192 631 770 okresów promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma poziomami tzw struktury nadsubtelnej stanu podstawowego atomu cezu 133 (atomowy zegar cezowy).
Uprzednio jednostkę czasu wiązano z ruchem obrotowym Ziemi i jej ruchem orbitalnym wokół Słońca.

Jednostka natężenia prądu - amper – jest to natężenie prądu, który płynąc w dwóch nieskończenie długich i znikomo cienkich przewodach umieszczonych w próżni w odległości 1m od siebie wywoływałby między nimi siłę 2 x 10^{-7} N na każdy metr długości. W praktyce korzysta się z tzw. wagi prądowej

Jednostka temperatury termodynamicznej – Kelwin – 1/273,16 część temperatury punktu potrójnego wody. Temperatura zera bezwzględnego T=0K odpowiada t= - 273.15 ^{0}C w skali Celsjusza.

Jednostka natężenia światła – (światłość) – kandela – światłość , którą ma w kierunku prostopadłym pole 1/600 000 m^2 powierzchni ciała doskonale czarnego, promieniującego w temperaturze krzepnięcia platyny pod ciśnieniem 101 325 niutonów na metr kwadratowy.

Jednostka ilości (liczności) materii – mol – ilość materii występująca gdy liczba cząstek jest równa liczbie atomów zawartych w masie 0.012 kg (kilograma) ^{12}C (węgla 12).

Szczegółowe relacje między podstawowymi a pochodnymi jednostkami wielkości fizycznych można znaleźć w tablicach.

Wielkość	Oznaczenie	Jednostki miary		Zależności między jednostkami w różnych układach
		SI	CGS	
długość	l	m	cm	$1m = 100cm$
masa	m	kg	g	$1kg = 10^3 g$
czas	t	s	s	
pole powierzchni	S	m^2	cm^2	$1m^2 = 10^4 cm^2$
objętość	V	m^3	cm^3	$1m^3 = 10^6 cm^3$
gęstość	ρ	kg/m^3	g/cm^3	$1kg/m^3 = 10^{-3} g/cm^3$
kąt	φ	rad	rad	
prędkość	v	m/s	cm/s	$1m/s = 100\ cm/s$
przyspieszenie	a	m/s^2	cm/s^2	$1m/s^2 = 100\ cm/s^2$
prędkość kątowa	ω	rad/s	rad/s	
przyspieszenie kątowe	ε	rad/s^2	rad/s^2	
okres	T	s	s	
częstotliwość	ν	$Hz\ (herc)$	Hz	
siła	F	$N\ (niuton)$	$dyna$	$1N = 10^5 dyn$
ciężar właściwy	D	N/m^3	$dyna/cm^3$	$1N/m^3 = 0{,}1 dyn/cm^3$
pęd	$p; mv$	$\frac{kg \cdot m}{s}$	$\frac{g \cdot cm}{s}$	$1\frac{kg \cdot m}{s} = 10^5 \frac{g \cdot cm}{s}$
praca i energia	W, E	$J\ (dżul)$	erg	$1J = 10^7 ergów$
moc	P	$W\ (Wat)$	erg/s	$1W = 10^7 erg/s$
moment siły	M	$N \cdot m$	$dyna \cdot cm$	$1N \cdot m = 10^7\ dyna \cdot cm$
moment bezwładności	I	$kg \cdot m^2$	$g \cdot cm^2$	$1kg \cdot m^2 = 10^7 g \cdot cm^2$
kręt (moment pędu)	K	$\frac{kg \cdot m^2}{s}$	$\frac{g \cdot cm^2}{s}$	$\frac{1kg \cdot m^2}{s} = 10^7 \frac{g \cdot cm^2}{s}$
ciśnienie	p	N/m^2	$dyna/cm^2$	$1N/m^2 = 10\ dyn/cm^2$ pozaukładowa: $1\ bar = 10^5 N/m^2 = 10^6 dyn/cm$

Dlaczego dziś często używa się innych jednostek niż w układzie SI?
Z powodów praktycznych i zakorzenionej tradycji :
Przykłady: stopa, funt, skala temperatury Fahrenheita – kraje anglosaskie.
Z powodów praktycznych często używa się wielokrotnych bądź podwielokrotnych jednostek: np. nanometr [nm], decybel , gram czy zwyczajowo - cm^{-1} (jednostka liczby falowej).

Pomiary wielkości fizycznych i błędy pomiarowe

Pomiar wielkości fizycznej polega na jej porównaniu z wielkością jednostkową tego samego rodzaju.
Planowanie pomiaru - przykład:
- operacja przeprowadzenia kabla elektrycznego przez Atlantyk – Thomson, 1827. Zlekceważenie obliczeń naukowych Thomsona przez zarząd firmy doprowadziło do opóźnień i znacznego zwiększenia kosztów przedsięwzięcia.

Pomiary fizyczne dzielimy na *bezpośrednie i pośrednie*. Pomiary bezpośrednie polegają na prostym porównaniu mierzonej wielkości z miarą wzorcową (pomiar długości przedmiotu za pomocą suwmiarki, pomiar czasu np. okresu drgań wahadła za pomocą stopera).

Pomiary pośrednie wymagają uprzedniego pomiaru kilku wielkości i powiązania ich z wielkością przez nas określaną za pomocą konkretnych związków matematycznych.

Przykład : pomiar przyspieszenia ziemskiego za pomocą pomiaru okresu wahadła.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad , \quad g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \qquad (3)$$

Aby wyznaczyć g należy uprzednio zmierzyć l oraz T.

Przykład prostego pomiaru bezpośredniego z różną dokładnością:

- pomiar długości:

a) przymiar (linijka) – dokładność ±1mm (milimetr)
b) suwmiarka - dokładność ±0.1mm
c) śruba mikrometryczna - dokładność ±0.01mm
d) metody optyczne – dokładność ± 10^{-6} – 10^{-10} m , np. przy pomiarach grubości nanowarstw (pytanie czy to jest wciąż prosty pomiar???)

Błędy pomiarów: *grube, systematyczne i przypadkowe*.

Błędy grube to pomyłki - eksperymentatora (zagapił się, źle odczytał wyniki itd…) bądź powstające wskutek złego skalibrowania przyrządów (rozogniskowanie obrazu w przyrządach optycznych) czy zmiany warunków zewnętrznych (zmiana temperatury podczas pomiaru, wstrząs itd…).

Wyniki obarczone błędami grubymi należy odrzucać.

Błędy systematyczne:
powtarzają się przy wykonywaniu doświadczenia daną metodą (pomiar czasu podczas biegu w reakcji na odgłos strzału – dźwięk dochodzi z opóźnieniem). Błąd systematyczny może ujawnić się też przy korzystaniu ze wzorów, przy których wyprowadzeniu poczyniono założenia, które nie są spełnione podczas przeprowadzania pomiarów, np. okres drgań wahadła wyznaczany ze wzoru (3) wyznaczany jest prawidłowo tylko dla wychyleń < 5 stopni.

Błędy przypadkowe: są popełniane zawsze i uwzględnia się je korzystając z rachunku błędów. O istnieniu błędów przypadkowych świadczy niepowtarzalność kolejnych wyników pomiaru w ich serii np. nieco różne zmierzone okresy drgań wahadła.

Gdyby znać wartość prawdziwą X mierzonej n krotnie wielkości to moglibyśmy wyznaczyć błędy przypadkowe każdego pomiaru jako:

$$x_1 = X - X_1$$

$$x_2 = X - X_2$$

….. (4)

$$x_n = X - X_n$$

Ponieważ nie znamy wartości prawdziwej X, to za wartość jej najbliższą przyjmujemy średnią arytmetyczną wszystkich pomiarów:

$$X \approx \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i X_i \qquad (5)$$

Stwierdzenie to jest tym bliższe prawdy im liczba pomiarów jest większa. Gdy n zmierza do nieskończoności wartość średnia arytmetyczna dąży do wartości prawdziwej.
Dla każdego pomiaru można więc obliczyć błąd przypadkowy jako:

$$x_1 = \overline{X} - X_1$$

$$x_2 = \overline{X} - X_2$$

…… (6)

$$x_n = \overline{X} - X_n$$

Błędy przypadkowe są zarówno dodatnie jak i ujemne. Rozrzut wartości pomiarowych charakteryzuje się za pomocą błędu standardowego pojedynczego pomiaru w serii pomiarowej:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(X - X_1)^2 + ... + (X - X_n)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X - X_i)^2}{n}} \qquad (7)$$

Dla skończonej liczby pomiarów:

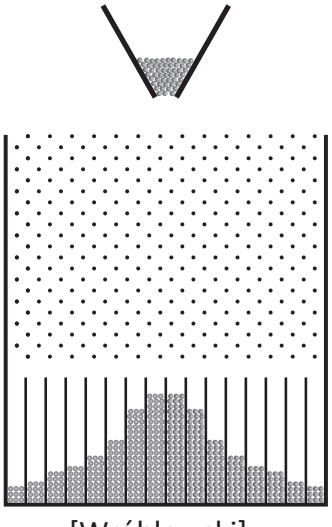
$$\sigma = \sqrt{\frac{(\overline{X} - X_1)^2 + ... + (\overline{X} - X_n)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\overline{X} - X_i)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n-1}} \qquad (8)$$

Natomiast średni błąd wyniku (wartości średniej $\overline{X}$

$$\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n(n-1)}} \qquad (9)$$

Błędy przypadkowe wykazują pewną szczególną cechę.

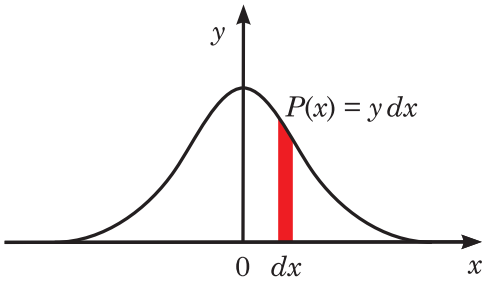
Przykład: deska Galtona

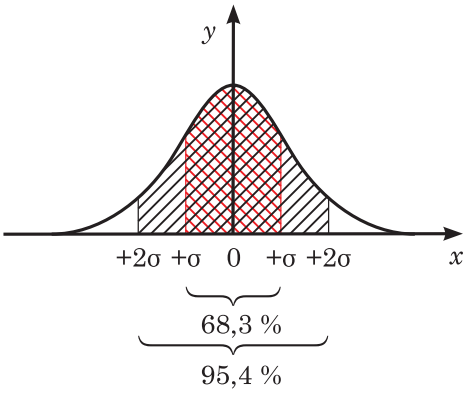


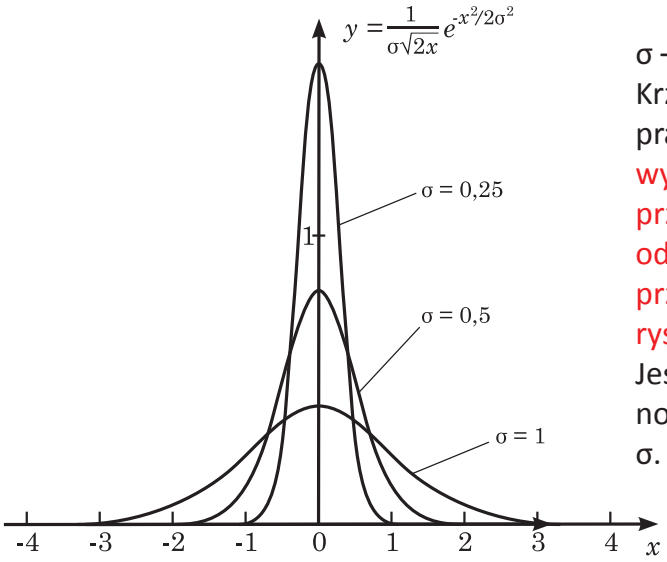
[Wróblewski]

Przyrząd ten składa się z wielu rzędów kołków nad zespołem przegródek (rysunek).
Na kołki sypiemy z ustalonego miejsca dużą ilość małych kuleczek, które odbijając się wielokrotnie od kołeczków trafiają przypadkowo do różnych przegródek. Największa ilość kuleczek wpada do przegrody centralnie umieszczonej pod zsypem, zaś po obu stronach symetrycznie liczba kuleczek jest tym mniejsza im dalej od centralnej przegrody. Uzyskany rozkład kulek przypomina histogram tzw. rozkładu normalnego.

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-x^2 \Big/ 2\sigma^2\right)$$

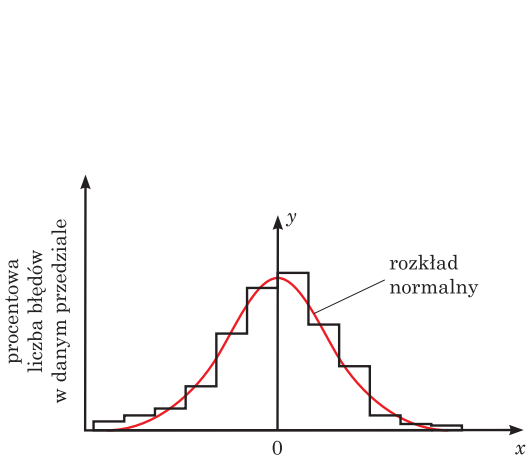


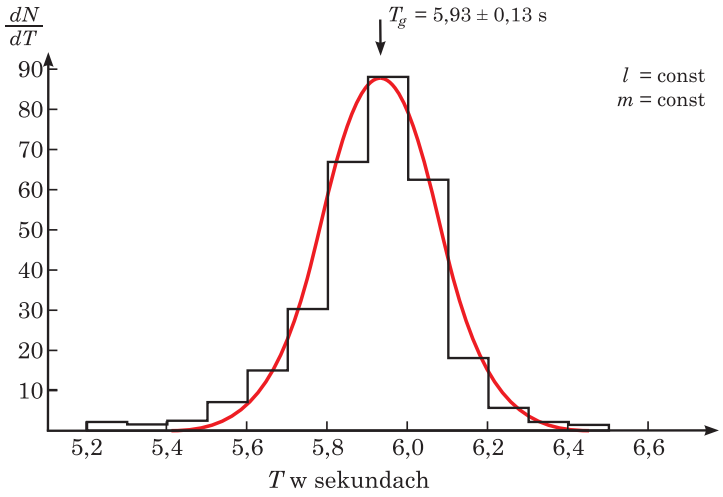




σ – uprzednio wspomniany błąd standardowy. Krzywa rozkładu normalnego opisuje gęstość prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo wystąpienia błędu przypadkowego w zadanym przedziale jest równe iloczynowi wartości odczytanej z rozkładu normalnego i szerokości przedziału (por. zaznaczona powierzchnia na rysunku). (czy to jest do końca prawda ???)
Jeśli błąd przypadkowy jest niewielki to rozkład normalny jest wąski, co oznacza małą wartość σ.

Przykład – rozrzut danych pomiarowych dla pomiaru okresu drgań wahadła (300 pomiarów, l=900±20 cm, m=900±1g, dokładność stopera 0.01 s, błąd czasu reakcji 0.04 s). Średnia arytmetyczna dla T=5.93 s, błąd (standardowy) =0.13 s. Rozrzut danych opisano przy pomocy tych parametrów za pomocą rozkładu normalnego.
W rzeczywistości często wykonujemy pomiary pośrednie. O wyznaczaniu błędów pomiarów pośrednich – ćwiczenia + I pracownia fizyczna.





[Wróblewski]

Ważna klasyfikacja wielkości fizycznych

Wielkości fizyczne mogą być a) **skalarami** b) **wektorami** c) **tensorami**

Wielkości skalarne (liczbowe) : np. masa, objętość, gęstość, czas, praca, temperatura.

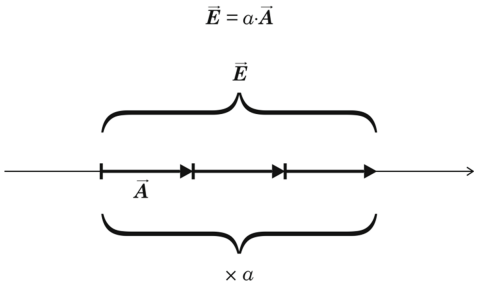
Wielkości wektorowe: (oprócz wartości także kierunek i zwrot) np. siła, prędkość, przyspieszenie, pęd, moment siły, moment pędu itd.

Wielkości tensorowe: (najbardziej złożone, wielkości używane do opisu zjawisk i obiektów o cechach anizotropowych. Przedstawiamy je za pomocą tablicy liczb, np. w postaci macierzy) np. moment bezwładności bryły sztywnej , polaryzowalność itd.

Wektory	Skalary
Prędkość, siła, pęd, moment magnetyczny	*Masa, czas, temperatura, praca*

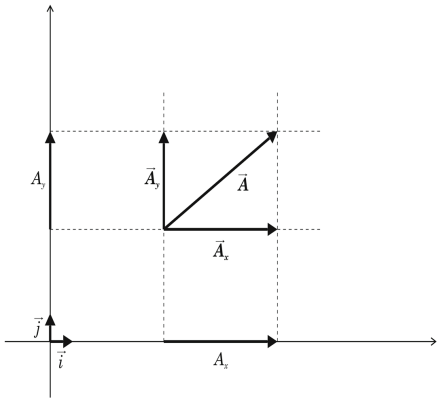
WEKTOR- uporządkowana para punktów z których jeden jest początkiem a drugi końcem wektora, skierowany odcinek. Cechy wektora: kierunek, zwrot, długość, punkt zaczepienia.

Wektor jednostkowy – wersor.



$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$

$|\hat{i}| = 1$



Wektor można określić, przez podanie składowych X i Y:

$\vec{A} = [X, Y]$

$A_x = X * \vec{i} \qquad A_y = Y * \vec{j}$

$\vec{A} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y}$

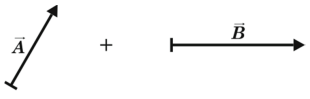
$\vec{A} = A_x * \hat{x} + A_y * \hat{y}$

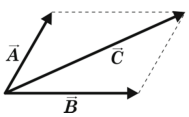
Długość wektora: $\left|\vec{A}\right| = A = \sqrt{X^2 + Y^2}$

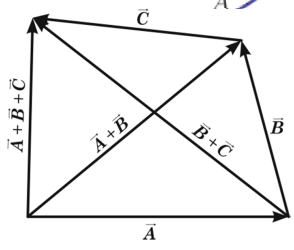
$$\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \hat{A}$$

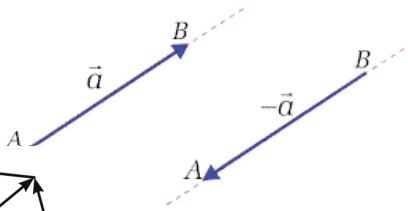
$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C} \qquad \vec{C} = [X_c, Y_c] = [X_A + X_B, Y_A + Y_B]$

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$



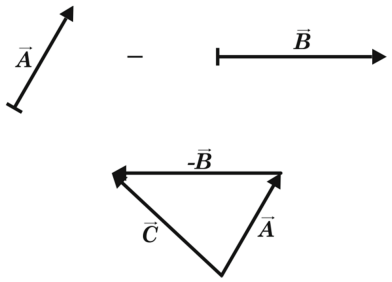






Wektor i wektor przeciwny

Wektor nazywamy **swobodnym**, jeśli jego początek nie jest umiejscowiony w określonym punkcie przestrzeni. Wektor taki nie ulega zmianie jeśli jego początek zostanie przesunięty pod warunkiem, że jego długość, kierunek i zwrot nie zmieniają się. W niektórych przypadkach położenie początku wektora jest istotne. Takie wektory nazywamy **zaczepionymi**, np. wektor, którego początek znajduje sie w punkcie **A**, jest wektorem zaczepionym w tym punkcie.



Geometryczna ilustracja odejmowania wektorów

Prawo przemienności dodawania wektorów $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

Prawo łączności dodawania wektorów $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$

Dla mnożenia wektora przez liczbę zachodzą następujące prawa:

$$\alpha\vec{A}=\overrightarrow{A\alpha}$$
$$\alpha(\beta\vec{A})=(\alpha\beta)\vec{A}=\alpha\beta\vec{A}$$
$$\alpha(\vec{A}+\vec{B})=\alpha\vec{A}+\alpha\vec{B}$$
$$(\alpha+\beta)\vec{A}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{A}$$
$$\alpha\vec{0}=\vec{0}$$

Iloczyn skalarny

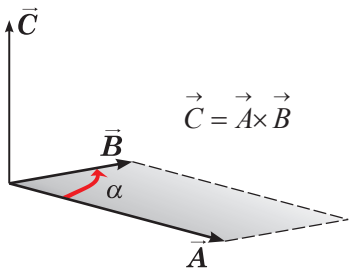
$$\vec{A}*\vec{B}=|\vec{A}|*|\vec{B}|*cos\alpha \qquad W=\vec{F}*\vec{S}$$

Iloczyn wektorowy

$$\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}|\times|\vec{B}|*sin\alpha \qquad \vec{M}=\vec{R}\times\vec{F}$$

Źle!
To jest tylko długość wektora $|\vec{A}\times\vec{B}|$

$$\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A}$$



$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$

ILOCZYN SKALARNY WEKTORÓW

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{b} * \vec{a}$$

Jeżeli

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} * \vec{b} = 0$$

$$|\vec{a}|, |\vec{b}| \neq 0$$

$$|\vec{z}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$$\vec{\imath} * \vec{j} = |\vec{\imath}| * |\vec{j}| * cos\sphericalangle(\vec{\imath}, \vec{j}) = 0$$

$$\vec{\imath} * \vec{j} = \vec{j} * \vec{k} = \vec{k} * \vec{z} = 0$$

$$\vec{\imath} * \vec{\imath} = |\vec{\imath}| * |\vec{\imath}| cos\sphericalangle(\vec{\imath}, \vec{\imath}) = 1$$

$$\vec{\imath} * \vec{\imath} = \vec{j} * \vec{j} = \vec{k} * \vec{k} = 1$$

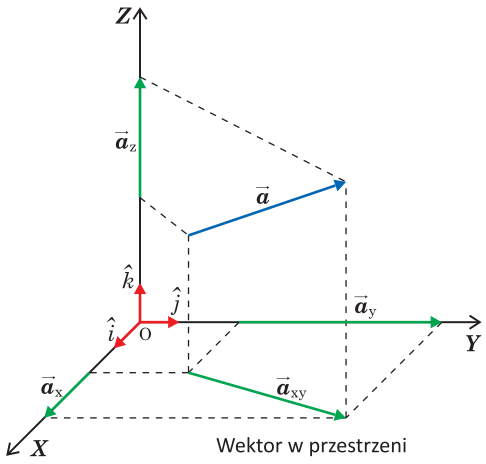
$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

$$\vec{a} * \vec{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} * \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$



Wektor w przestrzeni

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{a} * \vec{\imath} = a_x$$

$$\vec{a} * \vec{j} = a_y$$

$$\vec{a} * \vec{k} = a_z$$

Wektor jednostkowy: $\vec{e}, |\vec{e}| = 1$

$$\vec{e} = e_x\vec{\imath} + e_y\vec{j} + e_z\vec{k}$$

$$\vec{e} * \vec{\imath} = (e_x\vec{\imath} + e_y\vec{j} + e_z\vec{k}) * \vec{\imath} = e_x$$

$$\vec{e} * \vec{\imath} = |\vec{e}||\vec{\imath}| cos\sphericalangle(\vec{e}, \vec{\imath}) = cos\alpha = e_x$$

$$\vec{e} * \vec{j} = cos\beta = e_y$$

$$\vec{e} * \vec{k} = cos\gamma = e_z$$

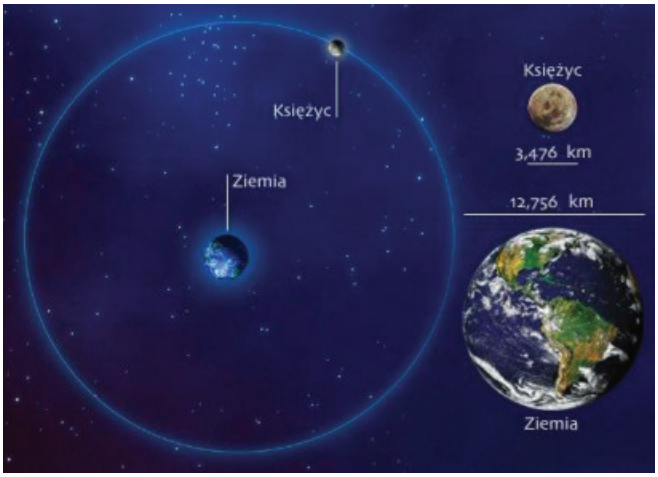
$$\vec{e} = [e_x, e_y, e_z] = [cos\alpha, cos\beta, cos\gamma]$$

Współrzędnymi wektora jednostkowego są jego cosinusy kierunkowe.

Mechanika – teoria, która formułuje ogólne prawa i zasady ruchu ciał. Obecnie zajmiemy się mechaniką klasyczną (nie kwantową).
Kinematyka - opis przestrzennych i czasowo zależnych własności ruchu, bez głębszego odnoszenia się do przyczyn wywołujących ruch
Dynamika – bada ruch z uwzględnieniem jego przyczyn.

Układy odniesienia . Układ współrzędnych
Mówimy, że ciało jest w ruchu, jeśli jego położenie względem innego ciała zmienia się w czasie. To inne ciało (układ ciał) nazywamy układem odniesienia. Jeśli położenie badanego ciała nie zmienia się względem układu odniesienia, to ciało pozostaje w spoczynku.

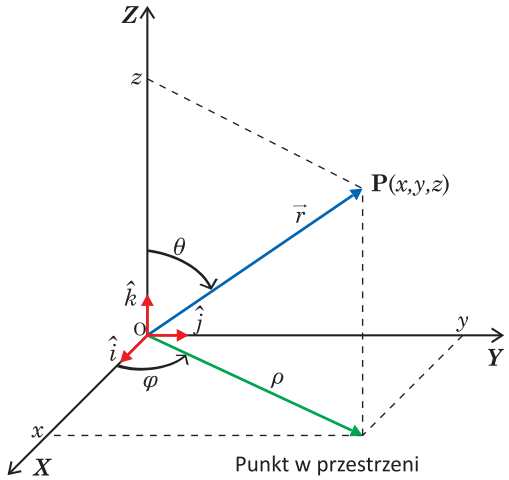
Przykład: ruch Księżyca względem Ziemi



Źródło: http://adk.astronet.pl/images/ks_wi.jpg

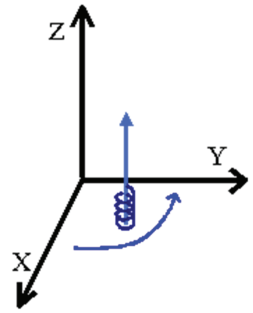
Zwykle z układem odniesienia wiążemy pewien układ współrzędnych np. kartezjański. Opis ruchu polega na przyporządkowaniu danemu punktowi P zbioru liczb określających w każdej chwili czasu w jednoznaczny sposób jego położenie w przestrzeni oraz kierunek i wartość jego prędkości i przyspieszenia. Wybór układu odniesienia oraz odpowiedniego układu współrzędnych zależy od rodzaju opisywanego ruchu.

Na poniższym rysunku przedstawiono wielkości określające położenie punktu w przestrzeni trójwymiarowej za pomocą *wektora położenia* ***r*** (zwanego też *wektorem wodzącym*). Początek tego wektora określa początek układu współrzędnych (punkt o współrzędnych (0,0,0) a koniec zadany punkt w przestrzeni. Na czerwono zaznaczono wektory jednostkowe ***i, j, k*** czyli *wersory*, położone wzdłuż kierunków osi układu współrzędnych.



Punkt w przestrzeni

Położenie ciała w układzie współrzędnych prostokątnych określone jest przez podanie trzech liczb określających współrzędne wektora położenia (x,y,z) względem początku układu (0,0,0) – punkcie przecięcia 3 prostopadłych do siebie osi układu X, Y i Z. Przedstawiony układ współrzędnych jest prawoskrętny, tzn. obrót osi x w kierunku osi y wyznacza kierunek osi ***z*** zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.



Wektor położenia $\vec{r}$ w układzie prostokątnym można wyrazić jako sumę wektorową wersorów $\vec{i}\ \ \vec{j}\ \ \vec{k}$ pomnożonych przez odpowiadające im składowe promienia wodzącego:

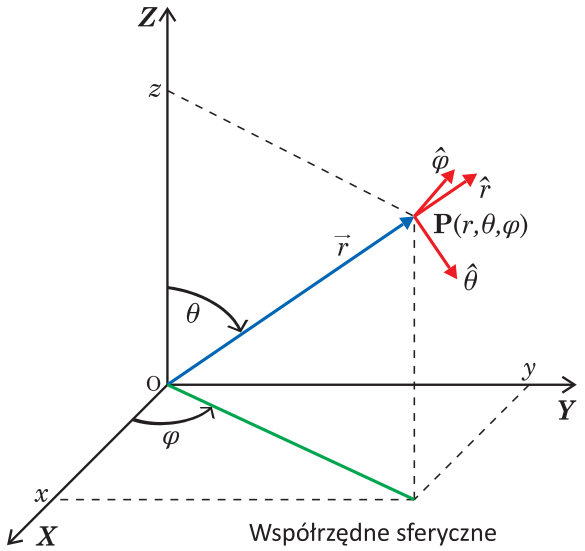
$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

Długość wektora położenia oblicza się jako:

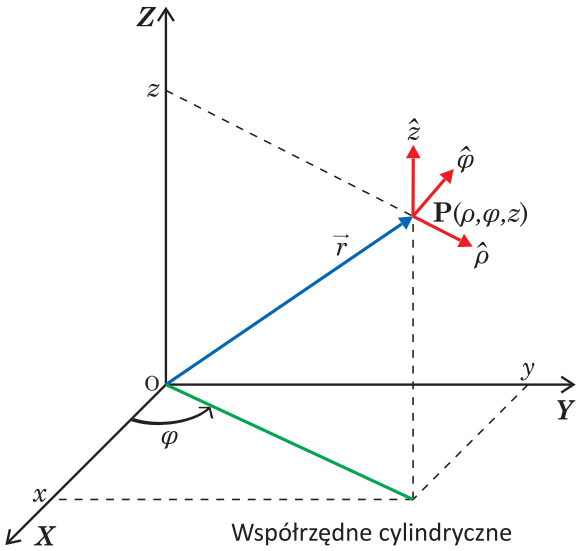
$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Położenie punktu określone jest przez podanie długości promienia wodzącego r oraz dwóch kątów θ i φ, jakie promień $\vec{r}$ tworzy z osią z układu współrzędnych (θ) i rzut promienia r na płaszczyznę (x,y) z osią x (φ). Wersor wektora $\vec{r}$ skierowany jest zawsze wzdłuż promienia wodzącego, a wersory obu kątów skierowane są jak na rysunku – poprzedni slajd).

W praktyce często używamy także innych układów współrzędnych, najbardziej popularne to układ sferyczny i cylindryczny. Wybór konkretnego typu układu współrzędnych zależy od zadania, problemu które chcemy rozwiązać . W wielu przypadkach to co łatwo rozwiązać w jednym układzie współrzędnych znacznie trudniej rozwiązuje się w innym. Zagadnienia, w których obiekty czy charakter oddziaływania wykazuje symetrię sferyczną bądź osiową łatwiej powinno się rozwiązywać odpowiednio w układzie sferycznym czy cylindrycznym. Rysunki poniżej ilustrują układ współrzędnych sferycznych i cylindrycznych.

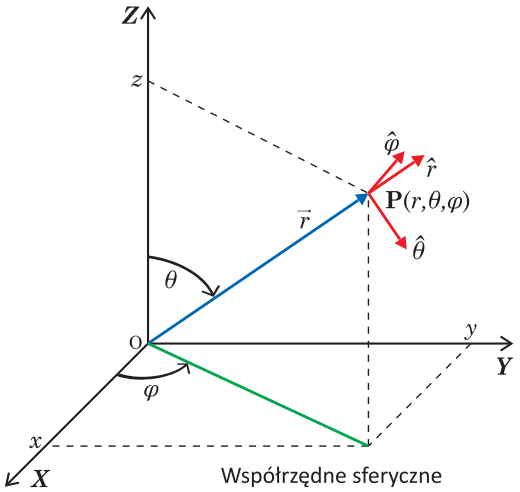


Współrzędne sferyczne



Współrzędne cylindryczne

Współrzędne w układzie prostokątnym wyrażone przez współrzędne sferyczne:



Współrzędne sferyczne

$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$$

$$z = r \cdot \cos\theta$$

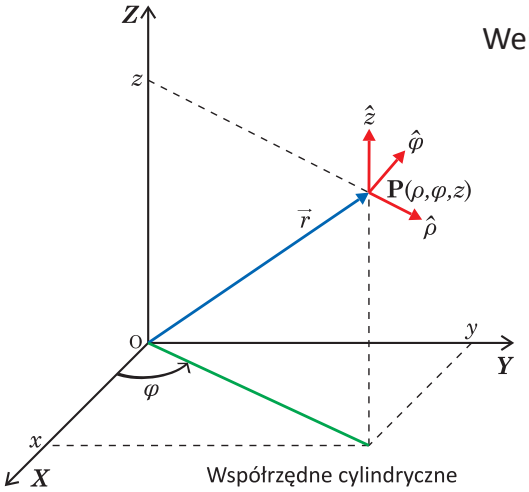
Współrzędne w układzie sferycznym wyrażone przez współrzędne prostokątne:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\theta = \arctan\frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z} \qquad tg\theta = \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z}$$

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} \qquad tg\varphi = \frac{y}{x}$$

Układ współrzędnych sferycznych będziemy stosować do opisu ruchu ciał wokół zadanego punktu w przestrzeni trójwymiarowej i w przypadkach, kiedy siły działające w przestrzeni mają symetrię sferyczną.
W układzie tym położenie ciała definiowane jest przez podanie długości rzutu ρ promienia wodzącego na płaszczyznę (x,y) , kąta φ jaki tworzy ten rzut z osią x oraz współrzędnej z, zatem wersor wektora ρ skierowany jest zawsze wzdłuż kierunku rzutu promienia wodzącego na płaszczyznę (x,y), kierunek wersora kąta φ określony jest przez aktualny kierunek zmiany tego kąta, zaś wersor współrzędnej z zachowuje stały kierunek, podobnie jak w układzie współrzędnych kartezjańskich .



Współrzędne cylindryczne

Wektor położenia w układzie współrzędnych cylindrycznych:

$$\vec{r} = \rho \cdot \hat{\rho} + z \cdot \hat{z}$$

$\hat{\rho}$, $\hat{z}$ oznaczają odpowiednie wersory .

Współrzędne w układzie kartezjańskim można wyrazić przez współrzędne cylindryczne jako:

$$x = \rho \cdot \cos\varphi$$

$$y = \rho \cdot \sin\varphi$$

$$z = z$$

Współrzędne w układzie cylindrycznym wyrażone przez współrzędne prostokątne:

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x} \qquad z = z$$

Dla opisu ruchu dwuwymiarowego często stosowny jest układ biegunowy współrzędnych

Wektor położenia w układzie współrzędnych biegunowych:

$$\vec{r} = r \cdot \hat{r}$$

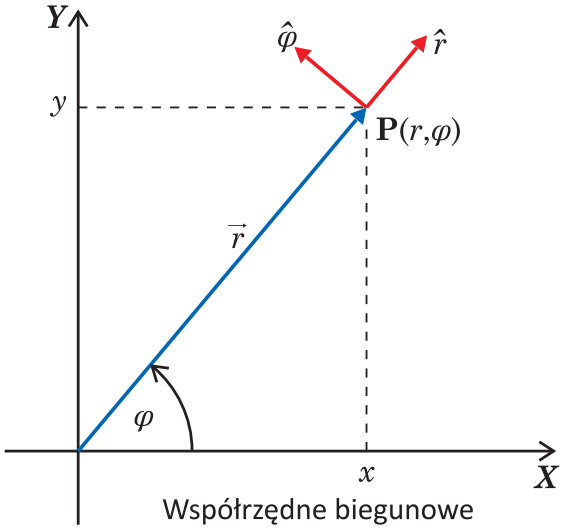
Współrzędne w dwuwymiarowym układzie kartezjańskim (prostokątnym) można wyrazić następująco przez współrzędne biegunowe:

$$x = r \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

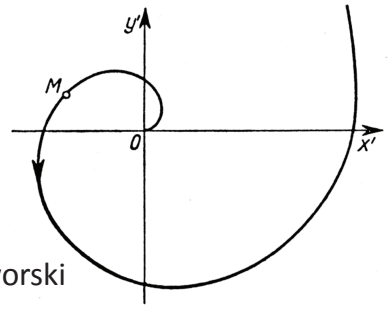
Współrzędne w układzie biegunowym wyrażone przez współrzędne prostokątne:

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

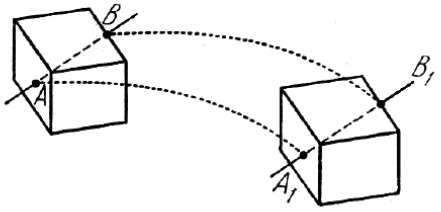


Współrzędne biegunowe

Pojęcie punktu materialnego – rozmiary badanego ciała są zaniedbywalne w porównaniu do rozmiarów rozpatrywanego obszaru. Punkt materialny ma masę, lecz jego położenie opisuje się tak jak położenie punktu geometrycznego (współrzędne x,y,z). Punkt materialny jest przykładem modelu matematycznego rzeczywistego ciała materialnego.
np. mucha w laboratorium, piłka na powierzchni morza, opis położenia samochodu za pomocą gps na drodze...
Kontrprzykłady – kiedy nie można stosować pojęcia punktu materialnego i zaniedbać wymiarów obiektu, np ruch piłki na boisku w pobliżu bramki, opór powietrza podczas jazdy samochodem na drodze (ważny kształt i rozmiary auta)…,
Ciała poruszające się jedynie ***ruchem postępowym*** zachowują się jak punkty materialne. W tym przypadku wszystkie punkty ciała zmieniają swoje położenie tak samo w jednostce czasu. Tor ruchu może być reprezentowany przez dowolną krzywą, nie musi być to ruch prostoliniowy. warunek ruchu postępowego - ciało rozciągłe poruszające się po dowolnej krzywej, osie układu współrzędnych x',y',z' związanego z ciałem są w dowolnym miejscu toru i czasie równoległe do osi zadanego innego układu współrzędnych x,y,z (układu odniesienia).
Ciało doskonale sztywne – ciało, którego odkształcenia są nieistotne. Ruch ciał można w ogólności traktować jako *złożenie ruchu postępowego i obrotowego*

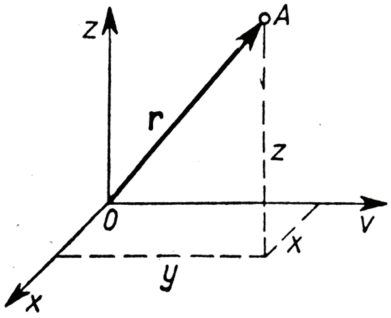


Jaworski



Położenie i tor ruchu

Położenie ciała w danej chwili czasu wyznacza jego odległość od początku przyjętego układu współrzędnych (np. położenie muchy od wybranego narożnika pokoju).



Ruch punktu określa następujące równanie wektorowe:

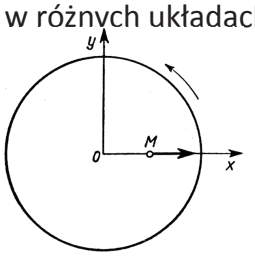
$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

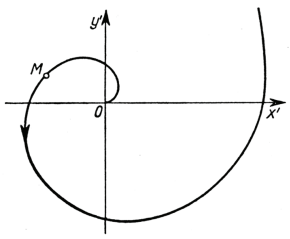
gdzie $\vec{r}$ jest promieniem wodzącym

Ruch można też określić z trzech następujących równań:

$$x = f_1(t) \qquad y = f_2(t) \qquad z = f_3(t)$$

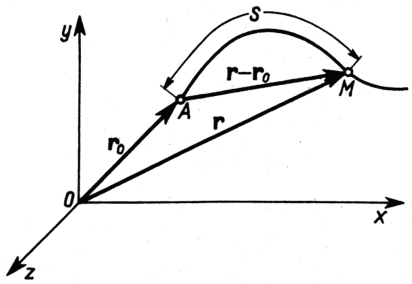
Eliminacja czasu z tych równań pozwala uzyskać równanie toru ruchu punktu materialnego. Torem ruchu jest po prostu krzywa wytyczana przez ten punkt w przestrzeni podczas ruchu. Ruch polega na wzajemnym przemieszczaniu się ciał (ruch względny). Tor ruchu może być inny w różnych układach odniesienia:





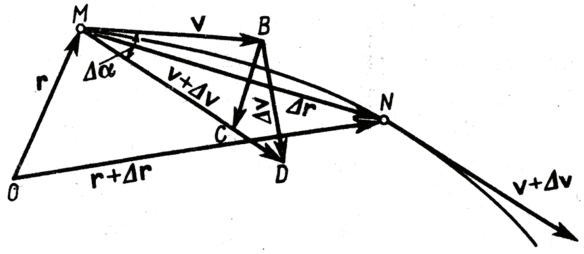
Punkt M porusza się jednostajnie wzdłuż promienia tarczy obracającej się dookoła osi symetrii. W układzie odniesienia związanym z tarczą tor jak na rys. po lewej, z osią jak na rys. po prawej stronie

Rysunek poniżej ilustruje pojęcia długości przebytej drogi, *s* =*f*(*t*) oraz wektora przemieszczenia $\vec{r} - \vec{r}_0$



Prędkość

Niech punkt materialny porusza się po torze MN



w chwili t przyjmujemy, że jest on w punkcie M, w chwili późniejszej *t*+ Δ*t* w punkcie N. Promienie wodzące punktów M i N są równe odpowiednio $\vec{r}$ oraz $\vec{r} + \Delta\vec{r}$

Długość łuku MN wynosi Δs

Wektor prędkości średniej definiujemy jako:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$\vec{v}_{sr}$ ma więc kierunek taki jak $\Delta\vec{r}$

Prędkość chwilowa:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Wektor $d\vec{r}$ oraz $\vec{v}$ są więc skierowane stycznie do toru w kierunku ruchu.

Ponieważ $\left|d\vec{r}\right| = ds$ to $v = \frac{ds}{dt}$

czyli wartość prędkości punktu materialnego jest równa pochodnej długości drogi po czasie.

Długość drogi jaką przebył punkt materialny w czasie Δt można obliczyć jako:

$$\Delta s = \int_{t}^{t+\Delta t} v dt$$

Przypadek szczególny: kierunek wektora prędkości nie zmienia się w trakcie ruchu. Taki ruch nazywa się *prostoliniowym*. Jeśli ponadto wartość v nie zmienia się w trakcie ruchu, to mamy *ruch prostoliniowy jednostajny*.
Wtedy:

$$\Delta s = \int_{t}^{t+\Delta t} v dt = v \int_{t}^{t+\Delta t} dt = v \cdot \Delta t$$

Przyspieszenie

W ogólności wektor prędkości podczas ruchu może zmieniać się co do wartości i kierunku.
W celu opisu takich zmian wprowadza się pojęcie przyspieszenia.
Załóżmy, że podczas ruchu od punktu M do N nastąpiła zmiana wektora prędkości o $\Delta \vec{v}$

Średnie przyspieszenie definiujemy jako:

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{3.19}$$

Kierunek wektora średniego przyspieszenia jest więc ten sam co kierunek zmiany wektora prędkości. Przyspieszenie (przyspieszenie chwilowe) natomiast określa się jako:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{3.20}$$

W celu określenia wartości i kierunku przyspieszenia rozpatrzmy ruch punktu materialnego po pewnej krzywej w zaznaczonym przedziale MN. Ponieważ

$$\Delta \vec{v} = \vec{BD} \tag{3.21}$$

to

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{BD}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{BC} + \vec{CD}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{BC}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{CD}}{\Delta t} \tag{3.22}$$

$\vec{a}_{st} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{CD}}{\Delta t}$ nazywamy przyspieszeniem stycznym (wektor $\vec{CD}$ w granicy dąży do stycznej do toru w punkcie M).

Wartość liczbowa przyspieszenia stycznego:

$$a_{st} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{CD}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \tag{3.23}$$

(dowód tego faktu można przeprowadzić na ćwiczeniach)

Przyspieszenie styczne przedstawia szybkość zmiany wartości prędkości ruchu. Gdy ruch jest jednostajny, to $a_{st}=0$. Dla $a_{st}>0$ mamy ruch przyspieszony, zaś dla $a_{st}<0$ mamy ruch opóźniony. Z kolei składową

$$\vec{a}_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{BC}}{\Delta t} \tag{3.24}$$

nazywa się przyspieszeniem normalnym, gdyż ma ono kierunek prostopadłej do stycznej w punkcie M. Wektor $\vec{a}_n$ nazywa się też często przyspieszeniem dośrodkowym.

Podobnie jak poprzednio wartość liczbowa wektora $\vec{a}_n$ wynosi :

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{BC}{\Delta t} \tag{3.25}$$

(3.26)

Z uwagi na mały kąt $\Delta\alpha$, uzasadnione jest przyjęcie, że:

$$BC=MB\ \Delta\alpha=v\ \Delta\alpha$$

Stąd

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\Delta\alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[v \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[v \frac{\Delta\alpha}{R\Delta\alpha}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right] = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta s}{\Delta t}\right] = \frac{v^2}{R} \tag{3.27}$$

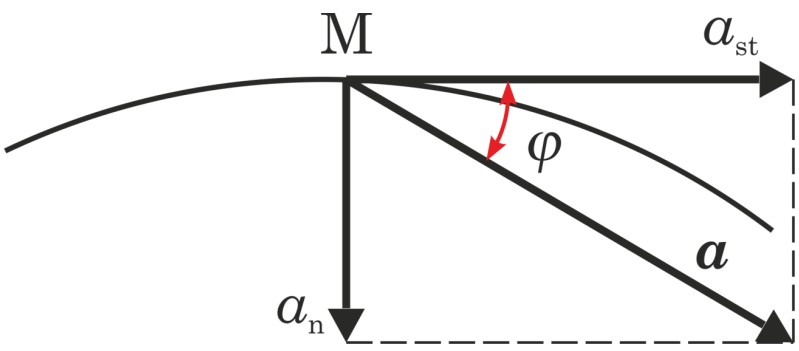
Δs - długość łuku MN.

Przyspieszenie normalne przedstawia szybkość zmiany kierunku prędkości ruchu.
Oczywiście w ruchu prostoliniowym $a_n= 0$.
Całkowite przyspieszenie jest więc sumą przyspieszenia stycznego i normalnego:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_{st} \tag{3.28}$$

Wartość przyspieszenia:

$$a = \left(a_{st}^2 + a_n^2\right)^{1/2} \tag{3.29}$$



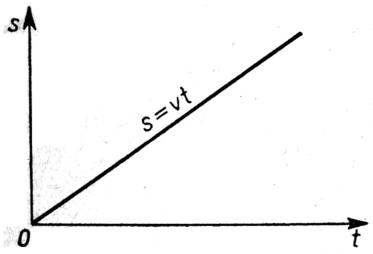
Kąt φ między wektorami $\vec{a}_n$ i $\vec{a}_{st}$ określa kierunek wypadkowego przyspieszenia. Z rysunku wynika, że $tg\varphi=a_n/a_{st}$.

Przykłady ruchu wykonywanego przez punkt materialny

Ruch jednostajny prostoliniowy:

$a_n = a_{st} = 0$ wobec tego $\vec{v} = const$ oraz $s = vt$ (3.30)

zależność drogi od czasu dla tego przykładu przedstawia rysunek:



Ruch prostoliniowy niejednostajny

$a_n = 0$ *ale* $a_{st} \neq 0$. (3.31)

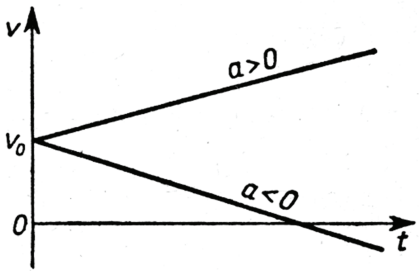
Wektor prędkości ma stały kierunek ale jego wartość zmienia się.
Np. gdy ruch prostoliniowy jest *jednostajnie zmienny* to $a = a_{st}$=const.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v - v_0}{t} \tag{3.32}$$

v_0 – prędkość początkowa (dla t=0), v – oznacza prędkość w dowolnej chwili t.

$$v = v_0 + a \cdot t \tag{3.33}$$

gdzie a>0 w ruchu przyspieszonym, a<0 w ruchu opóźnionym.

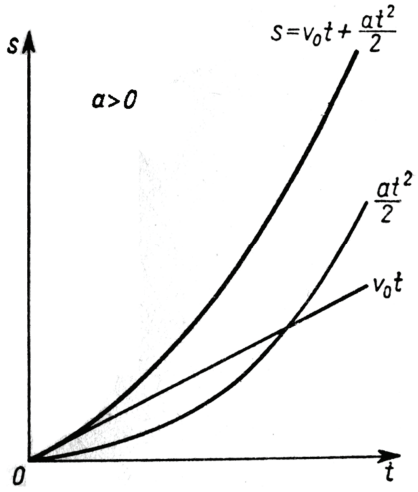


Długość drogi przebytej w ciągu czasu t ruchem prostoliniowym jednostajnie zmiennym wynosi:

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{a \cdot t^2}{2} \tag{3.34}$$

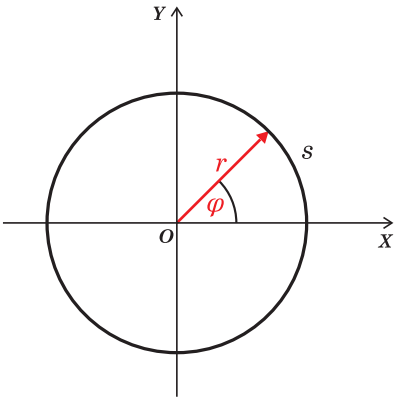
Gdy prędkość początkowa v_0=0 mamy

$$s = \frac{a \cdot t^2}{2} \tag{3.35}$$



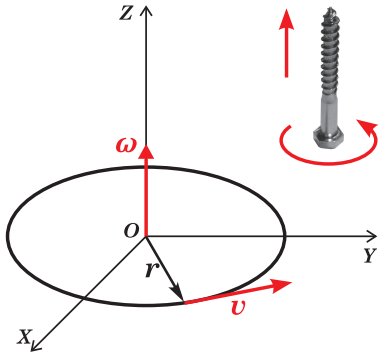
Przykładem takiego ruchu jest spadek swobodny ciał (stałe przyspieszenie ziemskie g jednakowe dla wszystkich ciał, $g \approx 9.81$ m/s^2 w naszych warunkach geograficznych). Przy danej wysokości h z której następuje spadek $v = gt$ a $h = gt^2/2$. Eliminując czas mamy $v = (2gh)^{1/2}$.

Ruch jednostajny punktu materialnego po okręgu



Przyjmijmy, że promień okręgu wynosi r.
Początek układu współrzędnych jest w środku okręgu.
Położenie dowolnego punktu na okręgu określamy podając kąt φ.
Ruch punktu materialnego określa więc funkcja $\varphi(t)$.
φ nazywa się też drogą kątową, mierzymy ten kąt w *radianach*.
Niech s będzie długością drogi przebytą na okręgu odpowiadającą drodze kątowej φ. Wtedy:

$$s = \varphi \cdot r \qquad (3.36)$$



Różniczkowanie obu stron tego związku po czasie prowadzi do:

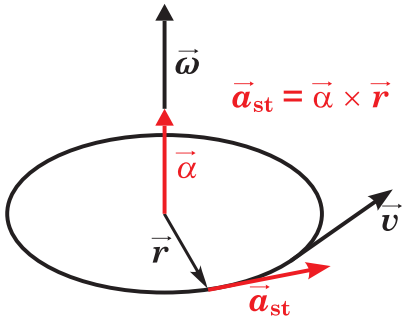
(promień okręgu jest stały!)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot r \qquad (3.37)$$

Inaczej:

$$v = \frac{d\varphi}{dt} \cdot r = \omega \cdot r \qquad (3.38)$$

Gdy ω jest stałe to ruch po okręgu nazywa się ruchem jednostajnym po okręgu.
Przyspieszenie kątowe – pochodna prędkości kątowej po czasie:

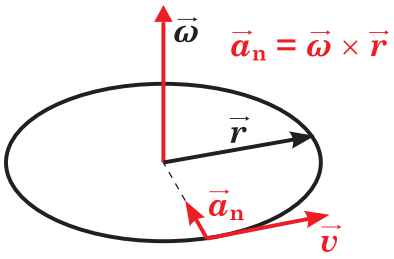


$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot r \qquad (3.39)$$

Czyli

$$a_{st} = \alpha \cdot r \qquad (3.40)$$

przyspieszenie styczne



$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r \qquad (3.41)$$

przyspieszenie normalne (dośrodkowe)

Prędkość kątowa ω to wektor skierowany prostopadle do płaszczyzny okręgu, jego zwrot można określić np. z reguły śruby prawoskrętnej. Pomiędzy prędkością liniową, kątową a promieniem zachodzi następujący związek:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (3.42)$$

Zatem przyspieszenie obliczymy różniczkując ostatni wzór po czasie:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{3.43}$$

Wektor $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ to wektor przyspieszenia kątowego skierowany podobnie jak $\vec{\omega}$

prostopadle do płaszczyzny ruchu. Zatem pierwszy składnik po prawej stronie ma kierunek prostopadły do $\vec{\omega}$ i do $\vec{r}$, a więc styczny do okręgu. Jest to wektor przyspieszenia stycznego:

$$\vec{a}_{st} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\alpha} \times \vec{r} \tag{3.44}$$

Drugi składnik przedstawia wektor przyspieszenia normalnego (dośrodkowego):

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} \tag{3.45}$$

Wykorzystując następującą tożsamość wektorową:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \tag{3.46}$$

Można ostatni związek przekształcić do postaci:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r} = -\omega^2 \vec{r} \tag{3.47}$$

Ze wzoru tego wynika natychmiast, że przyspieszenie normalne jest skierowane ku środkowi okręgu.
Jeżeli ruch po okręgu jest jednostajny, to ω = const, α = 0 i a_{st} = 0. Wtedy całkowite przyspieszenie a = a_n ! (mimo, że wartość prędkości jest stała, to zmienia się jej kierunek).

Okresem T w ruchu jednostajnym po okręgu jest czas potrzebny do przebycia drogi kątowej 2π (pełny kąt obrotu). Zatem:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{3.48}$$

Często prędkość kątową nazywa się też częstością kołową lub pulsacją.

Odwrotność okresu T nazywa się częstością υ

$$\upsilon = \frac{1}{T} \tag{3.49}$$

Ruch harmoniczny

Jest to bardzo ważny przypadek ruchu drgającego, w którym punkt materialny zmienia okresowo położenie pozostając stale w pobliżu położenia równowagi. Mówimy, że ciało wykonuje ruch harmoniczny wokół położenia równowagi x_0=0, jeśli jego wychylenie z tego położenia można zapisać jako:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{3.50}$$

gdzie jest amplitudą (maksymalnym wychyleniem z położenia równowagi) zaś *ωt+φ* nazywa się fazą, *φ* nazywa się fazą początkową (czyli w chwili *t*=0).
Jedno i dwukrotne różniczkowanie po czasie ostatniego wzoru daje:

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \tag{3.51}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \tag{3.52}$$

W ruchu harmonicznym zatem przyspieszenie jest proporcjonalne do wychylenia.

Ostatni wzór 3.52 zapisany w postaci:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{3.53}$$

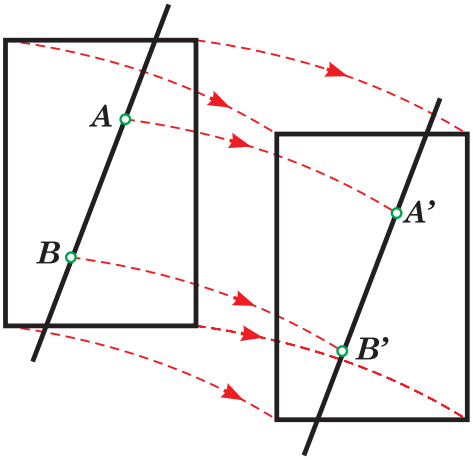
nazywa się *równaniem oscylatora harmonicznego (jednowymiarowym)*. Przykładem ruchu harmonicznego jest ruch wahadła dla małych wychyleń z położenia równowagi, ruch kulki na sprężynie czy ruch jaki wykonuje rzut punktu obiegającego okrąg ruchem jednostajnym na średnicę tego okręgu.

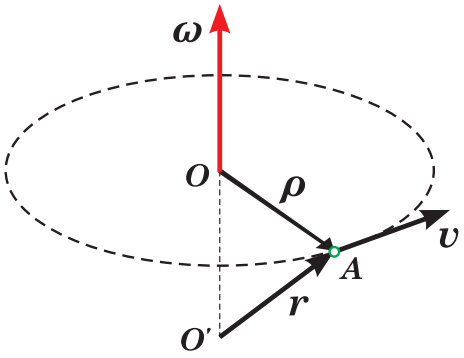
$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$	Drgania w kierunku osi x
$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$	Drgania w kierunku osi y
$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0$	Drgania w kierunku osi z
$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega^2\vec{r} = 0$	Postać wektorowa

Pokazy różnych rodzajów ruchu

Kinematyka ciała doskonale sztywnego

Ciało doskonale sztywne to takie ciało, w którym odległość między dwoma dowolnymi punktami jest stała niezależnie od sił działających na to ciało, czyli kształt i wymiary takiego ciała pozostają niezmienne (co najmniej w trakcie pomiaru). Ciało doskonale sztywne może wykonywać ruch postępowy i obrotowy. W ruchu postępowym ciała doskonale sztywnego tory AA' i BB' dowolnych dwóch punktów A i B są identyczne (por. rys.)





Natomiast w ruchu obrotowym ciała doskonale sztywnego wszystkie jego punkty zataczają okręgi o środkach leżących na jednej prostej zwanej osią obrotu. Oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzn tych okręgów. Przykłady: ruch koła zamachowego, samolot wykonujący pętlę, ruch obrotowy karuzeli itd.

Punkty ciała sztywnego położone w różnych odległościach od osi obrotu mają różne prędkości liniowe, jednak ich prędkości kątowe są takie same (te same kąty odmierzane w jednostce czasu przez różne punkty ciała)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{3.54}$$

Wektor prędkości kątowej określa położenie osi obrotu, kierunek i szybkość obrotu ciała. Gdy ω = const to ruch obrotowy ciała jest jednostajny.

Związek prędkości liniowej i kątowej dowolnego punktu ciała doskonale sztywnego łatwo uzyskać w następujący sposób:

Niech punkt A przebywa w czasie *dt* drogę wzdłuż łuku o długości:

$$ds = vdt \tag{3.55}$$

Zaś promień wodzący *ρ* obraca się o kąt *dφ*. Z uwagi na:

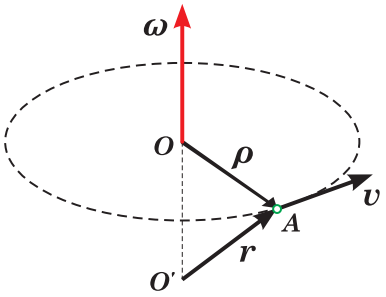
$$ds = \rho d\varphi \tag{3.56}$$

stąd

$$vdt = \rho d\varphi \tag{3.57}$$

$$v = \rho \frac{d\varphi}{dt} = \rho\omega \tag{3.58}$$

Z ostatniego związku i rysunku wynika, że $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ (3.59)



Jeśli położenie punktu A obracającego się ciała określamy za pomocą promienia wodzącego *r* jak na rysunku to

$$\vec{\rho} = \vec{r} - k \cdot \vec{\omega} \tag{3.60}$$

Gdzie $k \cdot \vec{\omega}$ to wektor $\vec{O'O}$

i stąd łatwo widać

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{3.61}$$

Czas, w ciągu którego obracające się ciało wykonuje jeden pełny obrót nazywa się okresem obrotu *T*. Ponieważ

$$d\varphi = \omega dt \tag{3.62}$$

to

$$\int_0^T \omega dt = 2\pi \tag{3.63}$$

Liczbę obrotów na jednostkę czasu nazywa się częstością obrotu $n=1/T$.
Dla ruchu obrotowego jednostajnego

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n \tag{3.64}$$

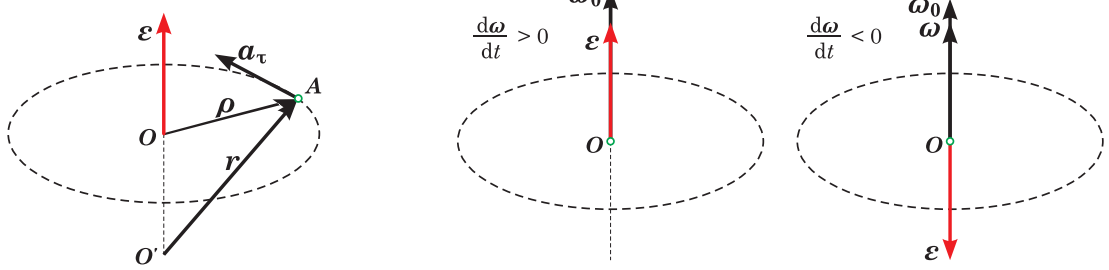
Dla opisu ruchu obrotowego zmiennego wprowadza się przyspieszenie kątowe:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{3.65}$$

W najprostszym przypadku obrotu ciała względem nieruchomej osi:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \tag{3.66}$$

Orientacje odpowiednich wektorów pokazuje rysunek:



Przyspieszenie styczne i normalne punktu A obracającego się ciała doskonale sztywnego:

$$a_{st} = \frac{d\,v}{dt} = \frac{d\,(\omega\rho)}{dt} = \rho\frac{d\,\omega}{dt} = \rho\varepsilon \tag{3.67}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2\rho = \frac{4\pi^2}{T^2}\rho = 4\pi^2 n^2\rho \tag{3.68}$$

Wektor przyspieszenia stycznego i kątowego łączy następująca relacja (por. rysunek i wzór 3.67):

$$\vec{a}_{st} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \tag{3.69}$$

Dla ruchu obrotowego jednostajnego: *ε=0, ω=const, $\omega=\omega_0+\varepsilon t$.*

Na ogół ruch ciała sztywnego jest znacznie bardziej złożony, niektóre przypadki zostaną rozpatrzone w dalszym ciągu wykładu.

Zasady dynamiki Newtona – ruch postępowy

Zadaniem dynamiki jest badanie związków między oddziaływaniem ciał i zmianami ich ruchu. Podstawą dynamiki są zasady Newtona. Są to zasadnicze prawa nierelatywistycznej mechaniki klasycznej. Zostały one sformułowane w wyniku uogólnień licznych wyników doświadczalnych.

I zasada Newtona

Jeżeli wypadkowa sił działających na dane ciało jest równa zero, to porusza się ono ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostaje w spoczynku.

Pierwszą zasadę dynamiki Newtona nazywa się też *zasadą bezwładności*.

Każdy ruch mechaniczny jest względny a jego opis zależy od układu odniesienia. Pasażer na fotelu samochodu pozostaje w spoczynku względem siedzenia pojazdu jednak wykonuje ruch łącznie z samochodem względem Ziemi, przy czym ruch ten może być niejednostajny i krzywoliniowy. Nasuwa się więc pytanie o jakim spoczynku czy ruchu prostoliniowym mowa jest w pierwszej zasadzie dynamiki Newtona? W jakim układzie odniesienia można się nią posługiwać?

Zasady dynamiki działają dobrze gdy obserwator znajduje się w układzie odniesienia nie wykazującym przyspieszenia. Układy odniesienia do których odnoszą się zasady dynamiki nazywa się *inercjalnymi.*

Praktycznie, to czy dany układ odniesienia jest dostatecznie dobrym przybliżeniem układu inercjalnego czy nie zależy od konkretnego zadania. Np. dla wielu zjawisk Ziemia jest dostatecznie dobrym przybliżeniem takiego układu, o ile nie ma znaczenia dobowy obrót Ziemi dookoła jej osi.

Obecnie zajmiemy się układami inercjalnymi. Opis ruchu w nieinercjalnych układach odniesienia zostanie omówiony nieco później.

II zasada dynamiki Newtona

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{4.1}$$

Wypadkowa siła działająca na ciało jest równa iloczynowi jego masy i przyspieszenia lub

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{4.2}$$

Przyspieszenie nadane ciału jest wprost proporcjonalne do siły działającej na to ciało i odwrotnie proporcjonalne do masy tego ciała.

Z powyższego zapisu wynika, że im większa masa, tym większą siłą trzeba działać by nadać mu przyspieszenie $\vec{a}$

zatem masa jest miarą bezwładności ciała w ruchu postępowym.

Drugą zasadę dynamiki można zapisać też w postaci:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \tag{4.3}$$

Wektor $\vec{p} = m\vec{v}$ nazywamy pędem zaś $d(m\vec{v})$ oznacza elementarną zmianę wektora pędu (różniczkę wektora pędu). Ostatnie równanie można więc zapisać jako:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \tag{4.4}$$

Rozpatrzmy szczególny przypadek $\vec{F} = const$ (na ciało działa stała siła). Wtedy

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} = const$$

Skąd wynika

$$m\vec{v} = \vec{F}t + p_0$$

- pęd jest liniową funkcją czasu. Dla zadanych chwil czasu t_1 i t_2

$$m\vec{v}_1 = \vec{F}t_1 + p_0$$
$$m\vec{v}_2 = \vec{F}t_2 + p_0$$

Czyli po odjęciu stronami $m\Delta\vec{v} = \vec{F}\Delta t$

W szczególności, gdy na ciało nie działa żadna siła, pęd ciała pozostaje stały podczas jego ruchu.

Powyższe rozważania łatwo jest uogólnić gdy na ciało działa zespół wielu sił (zasada niezależności działania sił):

$$\vec{a} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{m} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$\vec{F}$ jest sumą wektorową wszystkich sił działających na dane ciało (siła wypadkowa).

III zasada dynamiki (zasada akcji i reakcji)
Działanie na siebie dwóch ciał jest zawsze wzajemne, przy czym siła $\vec{F}_{12}$ wywierana przez ciało 1 na ciało 2 jest równa co do wartości i przeciwnie skierowana do siły $\vec{F}_{21}$ wywieranej przez ciało 2 na ciało 1:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Należy przy tym pamiętać, że obie siły są przyłożone do różnych ciał i dlatego nie można mówić , że wzajemnie się równoważą.
Prostą ilustracją III zasady dynamiki Newtona stanowi sytuacja, gdy rybak wyskakuje z łódki na pomost – przeskokowi człowieka w kierunku pomostu towarzyszy przeciwny ruch łódki.

W ruchu po okręgu na ciało X działa ciało Y znajdujące się w geometrycznym środku tego okręgu siłą dośrodkową

$$\vec{F}_{YX} = m\vec{a}_n$$

przy czym wartość siły dośrodkowej

$$F_{YX} = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

Na ciało Y działa podobnie ciało X z siłą

Dynamometry

$$\vec{F}_{XY} = -\vec{F}_{YX}$$ (siłą odśrodkową).

Okazuje się, że w układzie odosobnionym spełniona jest *zasada zachowania pędu*.
Niech układ odosobniony tworzy n punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \ldots, m_n$ poruszających się odpowiednio z prędkościami $v_1, v_2, \ldots v_n$. Przez $\vec{F}_{ik}$ oznaczmy siłę, z którą punkt materialny *k* działa na punkt materialny *i*. Ruch układu opisuje następujący zespół równań:

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \ldots + \vec{F}_{1n}$$

$$\frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_2) = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{24} + \ldots + \vec{F}_{2n}$$

.....

$$\frac{d}{dt}(m_n\vec{v}_n) = \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \vec{F}_{n3} + \ldots + \vec{F}_{n(n-1)}$$

Sumowanie stronami i pogrupowanie parami wyrazów indeksowanych wskaźnikami *ik* oraz *ki* daje natychmiast:

$$\sum_i \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + \ldots + (\vec{F}_{(n-1)n} + \vec{F}_{n(n-1)})$$

Ale z uwagi na III zasadę dynamiki Newtona każda z par po prawej stronie daje 0, stąd:

$$\sum_i \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = 0$$

lub

$$\sum_i \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \frac{d}{dt}\sum_i (m_i \vec{v}_i) = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

zatem

$$\vec{p} = const$$

czyli wektor pędu całego układu odosobnionego jest stały.

Jeśli układ nie jest odosobniony, to należy uwzględnić po prawej stronie układu równań także siły zewnętrzne. Jeśli $\vec{F}_i$ będzie wypadkową siłą zewnętrzną działającą na ity punkt materialny układu to:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}$$

$\vec{F}$ wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych działających na wszystkie punkty materialne (ciała) układu.

Środek masy układu punktów materialnych definiujemy jako punkt, którego promień wodzący:

$$\vec{r}_K = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \qquad M \text{ – masa układu}$$

Relacja miedzy współrzędnymi środka masy i wszystkich punktów układu:

$$x_K = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i$$

$$y_K = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i$$

$$z_K = \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i$$

Pęd środka masy:

$$\vec{p} = \frac{d}{dt}(M \vec{r}_K) = M \frac{d}{dt}\vec{r}_K = M \vec{v}_K$$

Zatem równanie ruchu środka masy układu przyjmuje postać:

$$M \vec{a}_K = \vec{F}$$

ze względu na:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_K}{dt} = M \vec{a}_K = \vec{F}$$

Środek masy układu punktów materialnych definiujemy jako punkt, którego promień wodzący:

$$\vec{r}_K = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \qquad M \text{ – masa układu}$$

Relacja miedzy współrzędnymi środka masy i wszystkich punktów układu:

$$x_K = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i$$

$$y_K = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i$$

$$z_K = \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i$$

Pęd środka masy:

$$\vec{p} = \frac{d}{dt}(M\,\vec{r}_K) = M\frac{d}{dt}\vec{r}_K = M\,\vec{v}_K$$

Zatem równanie ruchu środka masy układu przyjmuje postać:

$$M\,\vec{a}_K = \vec{F} \qquad \text{ze względu na:}$$

$$\frac{d\,\vec{p}}{dt} = M\frac{d\,\vec{v}_K}{dt} = M\,\vec{a}_K = \vec{F}$$

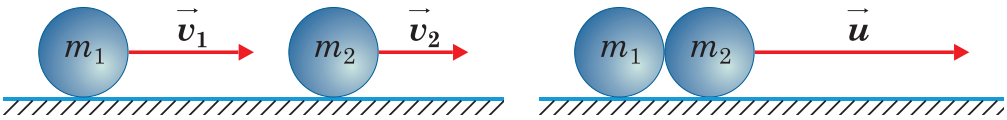
Zatem środek masy porusza się jak punkt materialny, w którym skupiona byłaby całkowita masa układu i na który działa wypadkowa całkowita siła zewnętrzna.

W szczególności, gdy układ jest odosobniony to

$$\vec{F} = 0 \qquad \text{i} \qquad \vec{v} = const$$

Jako przykład zasady zachowania pędu rozważmy centralne proste doskonale niesprężyste zderzenie 2 ciał.
Zderzenie jest idealnie niesprężyste gdy po zderzeniu ciała poruszają się tak jak jedno złączone ciało (np. zderzenie dwóch kul z plasteliny). Niech

$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ prędkości kul przed zderzeniem, $\vec{u}$ prędkość wspólna po zderzeniu,
m_1,m_2 – masy kul. Wtedy:

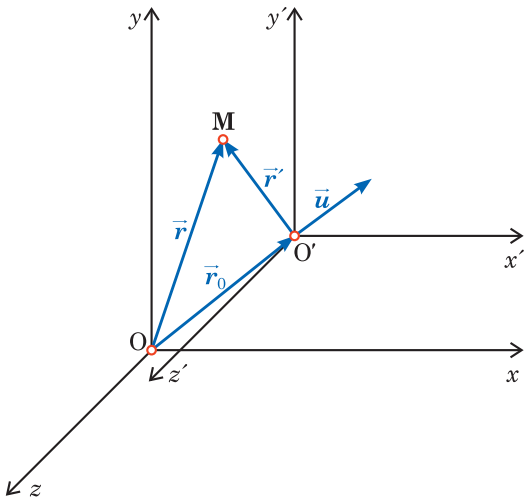


$$m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{u}$$

Transformacja Galileusza

Z definicji inercyjnego (inercjalnego) układu odniesienia wynika, że we wszystkich tego typu układach punkt materialny porusza się bez przyspieszenia. Oznacza to, że dwa dowolne układy inercjalne mogą się względem siebie poruszać tylko ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Rozpatrzmy 2 układy odniesienia xyz oraz $x'y'z'$ poruszający się ze stałą prędkością $\vec{u}$



Załóżmy, że w chwili $t = 0$ oba układy pokrywają się. Położenie dowolnego punktu M w układzie xyz oraz $x'y'z'$:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 = \vec{r}' + \vec{u}\,t$$

Składowe wektora $\vec{r}$:

$$x = x' + u_x t \qquad y = y' + u_y t \qquad z = z' + u_z t$$

W mechanice newtonowskiej obiekty poruszają się z prędkościami $v<<c$ i efekty relatywistyczne są pomijalne, wobec tego:

$$t = t'$$

Podobnie zależność między prędkościami w obu układach po zróżniczkowaniu po czasie

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

Podobnie zależność między przyspieszeniami w obu układach po zróżniczkowaniu po czasie

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Analogicznie w inercyjnych układach odniesienia także siły działające na punkt materialny są jednakowe a masa punktu materialnego nie ulega zmianie.

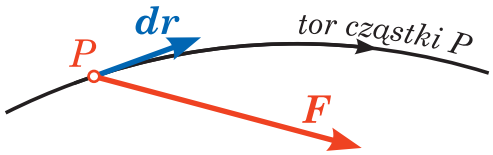
Mówimy, że zasady dynamiki Newtona dla punktu materialnego bądź układu tych punktów są niezmiennikami transformacji Galileusza (mają tą samą postać w dowolnych układach inercyjnych).

Zasady dynamiki Newtona obowiązują gdy prędkości ciał $v«c$ (prędkości światła w próżni). Gdy prędkość v jest znacząca wobec c będziemy stosować prawa dynamiki relatywistycznej. Zagadnienia te omówione zostaną pokrótce w dalszej części wykładu.

Energia, praca i moc

Siła, którą przykładamy do ciała tylko wtedy wykonuje pracę, gdy ciało zmienia położenie. Praca elementarna wykonana przy infinitezymalnym (nieskończenie małym) przesunięciu ciała:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{5.1}$$



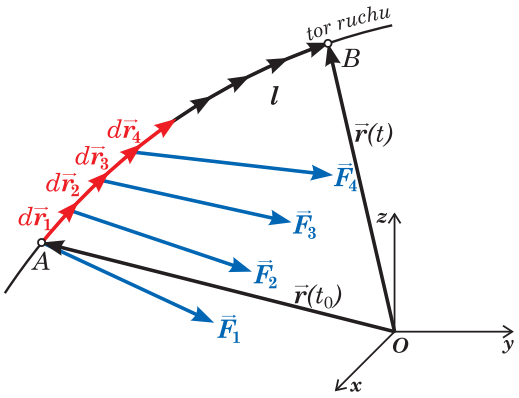
Gdzie $\vec{r}$ promień wodzący poprowadzony z punktu przyłożenia siły,

$\vec{dr}$ - wektor przesunięcia.

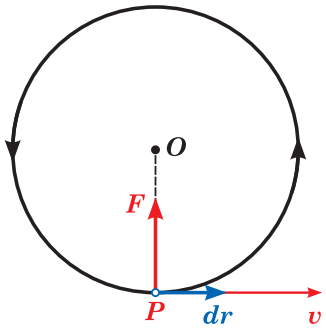
Praca wykonana przez siłę $\vec{F}$ na skończonej drodze s jest sumą prac elementarnych wykonanych na nieskończenie małych odcinkach tej drogi, co możemy zapisać jako:

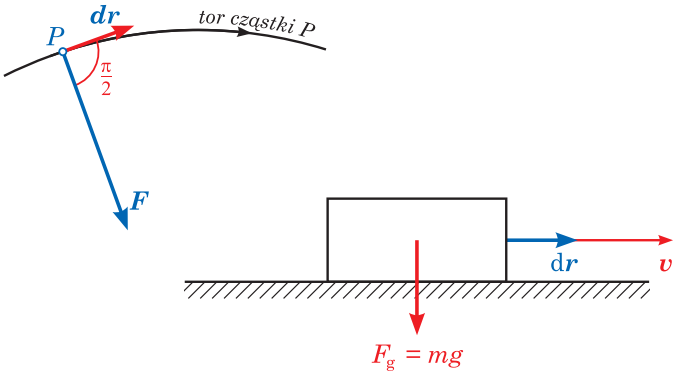
$$W = \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2 + \ldots + \vec{F}_n d\vec{r}_n + \ldots = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{5.2}$$

nieskończenie wiele wyrazów



Siła $\vec{F}$ prostopadła do przesunięcia $d\vec{r}$ nie wykonuje pracy, gdyż $dW = F\cos(\vec{F}; d\vec{r})dr$ dla kąta prostego. Przykłady: siła dośrodkowa w ruchu po okręgu, siła grawitacji przy ruchu po powierzchni Ziemi





Oznaczając wartość wektora $|d\vec{r}| = ds$ dla podkreślenia, że chodzi o infinitezymalny odcinek drogi mamy:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos\theta ds = F_s ds \tag{5.3}$$

Jednostką pracy jest 1J (dżul) 1J=1N 1m= 1kg m^2/s^2 .

1J - jest to praca jaką wykonuje siła 1 N wzdłuż kierunku przesunięcia równoległego do kierunku siły o 1 m.

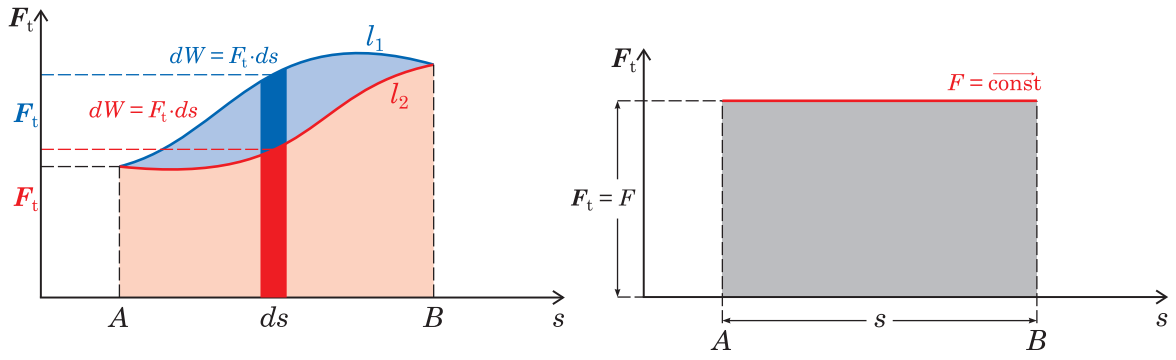
Całka $$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

wyrażająca pracę wykonywaną na drodze AB jest *całką krzywoliniową*.
Jej wartość zależy na ogół od kształtu drogi między punktami A i B. Aby obliczyć tę całkę musimy znać zależność funkcyjną $\vec{F}(\vec{r})$ i równanie drogi $\vec{r} = \vec{r}(t)$ lub umieć wyrazić siłę i $\vec{r}$ jako funkcje pewnego parametru np. długości łuku.

Niech np. punkty A i B będą połączone dwiema drogami o długościach l_1 i l_2. Siłę F i drogę l przedstawiamy jako funkcję długości łuku s (parametr):

$$\vec{F} = \vec{F}(s)\ ,\ \vec{r} = \vec{r}(s) \tag{5.4}$$

Zależność W od drogi odzwierciedla zależność składowej stycznej siły F_t do toru od długości łuku s . Praca tej siły odpowiada polu pod odpowiednią krzywą l_1 (różowy+niebieski) lub l_2 (różowy)



Z rysunku widać, że prace te są różne. W szczególności, gdy siła jest stała na drodze AB to :

$$W = \int_A^B F_s ds = \int_A^B F\, ds = F \int_A^B ds = Fs \tag{5.5}$$

Siłę $\vec{F}$ działającą na punkt materialny poruszający się ruchem postępowym nazywamy *zachowawczą* (konserwatywną, potencjalną) jeżeli praca wykonana przy przesunięciu punktu materialnego z położenia A do B nie zależy od toru tego przesunięcia.
Wynika z tego w szczególności, że praca wykonana przez siłę zachowawczą po zamkniętym dowolnym torze (A-B-A)

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{AB} - W_{BA} = 0 \tag{5.6}$$

Przykłady sił zachowawczych: siła powszechnego ciążenia, siła sprężystości.

Przykład sił niezachowawczych: siła tarcia.

Moc charakteryzuje nam szybkość, z którą siła wykonuje pracę:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{5.7}$$

Jeśli znamy zależność $P(t)$ to z poprzedniego związku możemy określić pracę wykonaną w przedziale czasu <t_0;t> jako:

$$W = \int_{t_0}^{t} P(t)dt \tag{5.8}$$

Jednostką mocy jest 1W (wat) – jest to taka moc która odpowiada wykonanej pracy 1 J w ciągu 1s. Niekiedy ważna jest też średnia moc wydatkowana w pewnym przedziale czasu:

$$< P >= \frac{\int_{t_0}^{t} \vec{F} \cdot \vec{v} dt}{t - t_0} \tag{5.9}$$

Pojęcie mocy jest szczególnie ważne przy konstrukcji i określaniu parametrów urządzeń, gdzie bardziej liczy się zdolność do szybkiego wykonania jakiejś pracy niż całkowita praca, którą urządzenie jest w stanie wykonać.

Energia kinetyczna:

Rozpatrzmy ponownie relację:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = m \cdot \vec{v}\, d\vec{v} = md\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \tag{5.10}$$

Wielkość

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

nazywa się energią kinetyczną ciała. W innej postaci

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

Energie kinetyczną mierzymy w jednostkach pracy czyli J.

Z ostatnich przekształceń 5.10 (lewa i prawa strona) wynika, że:

$$dW = dE_k \tag{5.11}$$

Scałkowanie obustronne w granicach od A do B, gdzie A i B są pewnymi punktami przestrzeni danymi przez wektory odpowiednie wodzące daje:

$$\int_A^B dW = \int_A^B dE_k \tag{5.12}$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B dE_k \tag{5.13}$$

$$W = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} = \frac{mv_B^{\,2}}{2} - \frac{mv_A^{\,2}}{2} \tag{5.14}$$

Z ostatniego zapisu wynika, że przyrost energii kinetycznej cząstki w pewnym przedziale czasu jest równy pracy jaką wykonuje siła $\vec{F}$ na pewnej drodze $l = AB$ przebytej przez ciało w tym czasie.

Niezależnie od kształtu drogi l praca W tej siły jest zawsze równa przyrostowi energii kinetycznej pomiędzy punktami B i A.

Z kolei z definicji mocy:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) \tag{5.15}$$

Szybkość zmiany energii kinetycznej ciała w czasie jest równa mocy P siły działającej na ciało w tym czasie.

Energia potencjalna

W fizyce istnieje szerokie spektrum sił dla których można obliczyć pracę W całkując względem drogi bez znajomości funkcji

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Takie siły nazywamy zachowawczymi lub konserwatywnymi.
Inaczej mówiąc, siły są zachowawcze, jeśli są one funkcją jedynie położenia ciała (punktu materialnego) $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ taką, że pracę tej siły przy przesunięciu ciała o wektor d$\vec{r}$ można wyrazić w następującej formie:

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr} = -dE_p \tag{5.16}$$

gdzie E_p jest jednoznaczną , niezależną od czasu, ciągłą i mającą ciągłe pochodne funkcją skalarną położenia $E_p = E_p(r)$. Taką wielkość nazywamy energią potencjalną ciała w położeniu $\vec{r}$ w polu siły zachowawczej $\vec{F}(\vec{r})$

Energię potencjalną mierzymy w J.
Scałkujmy wyrażenie (5.16) wzdłuż drogi l od punktu początkowego A do punktu końcowego B tej drogi:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dE_p = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = (E_{p,A} - E_{p,B}) \tag{5.17}$$

Zatem praca W jest równa różnicy energii potencjalnych W punktach A i B. Zauważmy, że praca ta nie zależy od kształtu drogi miedzy punktami A i B. W szczególnym przypadku drogi zamkniętej (powrót do punktu A) $W = 0$.
Omawianą całkę krzywoliniową nazywa się cyrkulacją (krążeniem) wektora
wzdłuż krzywej zamkniętej. Cyrkulacja siły zachowawczej:

$$W_0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{5.18}$$

Równanie to przyjąć też można za definicję siły zachowawczej , z której wynika istnienie energii potencjalnej.
Z (5.17) wynika , że praca wykonywana począwszy od ustalonego punktu A przez siłę zachowawczą zależy tylko od wyboru położenia końcowego punktu B (nie od kształtu drogi).

Zatem energia potencjalna $E_p(r)$ ciała w punkcie B zależy od wyboru punktu odniesienia A.

Na przykład przyjmijmy punkt A' jako punkt odniesienia zamiast punktu A, wtedy:

$$W = \int_{A'}^{B} \vec{F} d\vec{r} = \int_{A'}^{A} \vec{F} d\vec{r} + \int_{A}^{B} \vec{F} d\vec{r} = -(E_{p,A} - E_{p,A'}) - (E_{p,B} - E_{p,A}) = -E_{p,B} + E_{p,A'} =$$

$$= -E_{p,B} + const = -E_p(\vec{r}) + const \tag{5.19}$$

Przy czym odpowiednio we wzorach (5.17) i (5.19) *const* = E_{pA} lub *const* = $E_{pA'}$.

Zatem energia potencjalna jest zawsze określona z dokładnością do stałej addytywnej zależnej od wyboru punktu odniesienia.

Stąd energię potencjalną ciała P można obliczać jako:

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{r_0}^{r} \vec{F} d\vec{r} + E_p(\vec{r})_0 = -\int \vec{F} d\vec{r} + const \tag{5.20}$$

Proszę zwrócić uwagę, że w przypadku nierelatywistycznym wzór na energię kinetyczną $E_k = mv^2/2$ obowiązuje niezależnie od tego czy siła powodująca ruch jest zachowawcza czy nie, ale w przypadku energii potencjalnej związek (5.16) obowiązuje tylko dla sił zachowawczych.

Dobrze znany nam poniżej związek możemy zapisać w nowej postaci:

$$dW = \vec{F} d\vec{r} = F ds \cos \sphericalangle(\vec{F}, d\vec{r}) = -dE_p \tag{5.21}$$

Skąd

$$F \cos\theta = -\frac{dE_p}{ds} \tag{5.22}$$

Wielkość $F\cos\theta = F_S$ jest po prostu składową styczną siły $\boldsymbol{F}$ wzdłuż kierunku przesunięcia $d\boldsymbol{r}$. Wielkość dE_p/ds nazywa się pochodną kierunkową E_p w kierunku $\boldsymbol{i}_s$.

Wektor o takiej własności, że jego składowa w dowolnym kierunku $\boldsymbol{i}_s$ jest równa pochodnej kierunkowej funkcji E_p w tym kierunku nosi nazwę ***gradientu funkcji*** E_p:

$$\vec{F} = -gradE_p \tag{5.23}$$

Zatem siła zachowawcza jest równa gradientowi energii potencjalnej ze znakiem"-".
W układzie kartezjańskim składowe x, y, z (5.21) mają postać:

$$\begin{aligned} F_x &= \overrightarrow{F}\vec{\imath}_x = F\cos\sphericalangle\left(\vec{F},\vec{\imath}_x\right) = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y &= \overrightarrow{F}\vec{\imath}_x = F\cos\sphericalangle\left(\vec{F},\vec{\imath}_y\right) = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z &= \overrightarrow{F}\vec{\imath}_z = F\cos\sphericalangle\left(\vec{F},\vec{\imath}_z\right) = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{aligned} \tag{5.24}$$

Przy czym wykorzystaliśmy symbol pochodnej cząstkowej by zaznaczyć, że funkcja $E_p(\boldsymbol{r}) = E_p(x,y,z)$ (funkcja trzech zmiennych x,y,z). Ostatecznie mamy:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\imath}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{\imath}_z\right) \tag{5.25}$$

Wyrażenie to można również przyjąć za równoważną do poprzedniej definicję siły zachowawczej.

Przykład:

Sprawdzić czy siła centralna jest siłą zachowawczą.
Siła centralna to taka siła, której wartość zależy tylko od odległości ciała od ustalonego centrum siły a jej kierunek leży na prostej łączącej ciało z tym punktem:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Obliczmy pracę tej siły wzdłuż dowolnej drogi l między punktami A i B, których położenia określają wektory wodzące r i r_0 :

$$W = \int_A^B \vec{F}d\vec{r} = \int_A^B \frac{F(r)}{r}\vec{r}d\vec{r} = \int_A^B F(r)dr = \Phi(r) - \Phi(r_0)$$

Przy czym wykorzystaliśmy równość $\boldsymbol{rdr} = rdr$, a $\Phi(r)$ jest funkcją, dla której $d\Phi/dr = F(r)$. Zatem istotnie praca nie zależy od drogi całkowania l ale tylko od punktu początkowego A i końcowego B. Oznacza to że siła centralna F jest zachowawcza przy czym jej energia potencjalna jest równa:

$$E_p(\vec{r}) = E_p(r) = -\Phi(r) = -\int_A^B \vec{F}d\vec{r} = -\int F(r)dr + \mathrm{const}$$

Na przykład dla siły sprężystej:

$$\vec{F} = -kr\frac{\vec{r}}{r}$$

a wartość siły $F = -kr$. Stąd:

$$E_p(r) = -\int_{r_0}^{r} F(r)dr = k\int_{r_0}^{r} rdr = \frac{kr^2}{2} - \frac{kr_0^2}{2}$$

Jeśli zażądamy, by $E_p(r) = 0$ dla $r \to 0$ to stała addytywna jest równa 0 gdyż $r_0 = 0$. Zatem energia potencjalna liczona względem centrum siły:

$$E_p(r) = \frac{kr^2}{2}$$

Zwróćmy dalej uwagę, że jeżeli ruch zachodzi pod wpływem siły zachowawczej to

$$dW = \vec{F}d\vec{r} = dE_k = -dE_p$$

Skąd dostajemy

$$d\left(E_k + E_p\right) = 0$$

:

A po scałkowaniu po czasie:

$$E_k + E_p = const$$

Ten sam wynik uzyskujemy ze wzorów całkowych

$$W = \int_A^B \vec{F}d\vec{r} = E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

Czyli

$$(E_k + E_p)_B = (E_k + E_p)_A = E_k + E_p = const$$

Gdyż punkty A i B są wybrane dowolnie. Powyższe wyrażenie nazywa się często całką energii.
Wielkość fizyczną

$$E = E_k + E_p$$

nazywamy energią mechaniczną ciała.
Zatem podczas ruchu wywołanego siłą zachowawczą energia mechaniczna ciała pozostaje stała.
Całka energii pozwala określić wartość prędkości ciała nawet bez rozwiązywania równań ruchu. Mamy bowiem:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_p(r)\right]}$$

Przykład: ruch pod działaniem siły sprężystej $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}\boldsymbol{i}_r$ o energii potencjalnej $E_p = kr^2/2$.
Z zasady zachowania energii wynika:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kr^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{kr_0^2}{2} = E = \text{const}$$

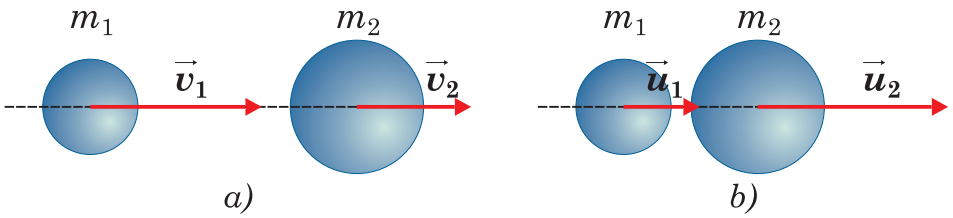
Gdzie r_0 i v_0 – wartość odpowiednio prędkości początkowej i położenia początkowego. Stąd:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m}(r_0^2 - r^2)}$$

Inny przykład zastosowania zasad zachowania energii i pędu:

proste centralne zderzenie doskonale sprężyste dwóch kul.

Znajdźmy prędkości kul po zderzeniu. Załóżmy, że kule poruszają się w płaszczyźnie poziomej. Jako zderzenie doskonale sprężyste rozumiemy takie zderzenie, w rezultacie którego energia mechaniczna układu zderzających się ciał nie zamienia się w inne rodzaje energii.



zasada zachowania energii

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + E_{p1} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + E_{p2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + E'_{p1} + \frac{m_2 u_2^2}{2} + E'_{p2}$$

Dla kul poruszających się poziomo ich energia potencjalna nie zmienia się podczas zderzenia w polu sił ciężkości, zatem

$$E_{p1} + E_{p2} = E'_{p1} + E'_{p2}$$

Stąd

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \qquad (*)$$

Z zasady zachowania pędu:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

Wszystkie wektory prędkości w tym typie zderzenia skierowane są w jednym kierunku, stąd

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \qquad (**)$$

(*) i (**) tworzą układ 2 równań z dwiema niewiadomymi, który łatwo rozwiązać
(proszę to przećwiczyć samodzielnie!!!)

$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{(m_1 + m_2)} \qquad u_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{(m_1 + m_2)}$$

W szczególności, gdy $m_2 >> m_1$, oraz $v_2 = 0$ to $u_1 = -v_1$ oraz $u_2 = 0$ co oznacza odbicie pierwszej kuli od drugiej i ruch pierwszej kuli w przeciwnym kierunku, kula 2 pozostaje nieruchoma

Rozpatrzmy teraz przypadek ruchu cząstki pod działaniem siły niezachowawczej np. podlegającej oporom ruchu.

W ośrodkach ciekłych i gazowych przy niewielkich prędkościach można przyjąć, że na ciało działa siła oporu o postaci:

$$\overrightarrow{F_0} = -k\vec{v}$$

Obliczmy pracę tej siły oporu przy infinitezymalnym przesunięciu:

$$dW = \overrightarrow{F_0} d\vec{r} = k\vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt}dt = -k\vec{v}\vec{v}dt = -kv^2 dt$$

Z tego wyrażenia wynika natychmiast, że rozpatrywana siła jest niezachowawcza, gdyż praca tej siły zależy od drogi i nie jest zerowa gdy droga jest zamknięta

Moc tej siły:

$$P = \frac{dW}{dt} = -kv^2$$

Dla niezachowawczej siły oporu ośrodka:

$$dW_{nz} = -kv^2 dt$$

i

$$E - E_0 = \int_{t_0}^{t} \overrightarrow{F_{nz}}\vec{v}dt = -\int_{t_0}^{t} k\vec{v}\vec{v}dt = -k\int_{t_0}^{t} v^2 dt < 0$$

Zatem energia mechaniczna ciała poruszającego się w ośrodku działającym na nią siłą oporu stale maleje.

Proces malenia energii mechanicznej ciała nazywa się dyssypacją lub rozpraszaniem energii. Malenie tej energii oznacza, że jest ona zamieniana w inne formy energii np. energię termiczną cząsteczek ośrodka.

Dynamika ruchu obrotowego ciała doskonale sztywnego

Masę makroskopowego ciała możemy uznać za sumę mas układu n składników tego ciała (punktów materialnych). Rozpatrzmy ruch ciała sztywnego obracającego się wokół nieruchomego punktu O (środka obrotu ciała sztywnego). Załóżmy, że O jest początkiem nieruchomego układu współrzędnych. Wtedy położenie dowolnego punktu ciała wyznaczone jest przez wektor wodzący r poprowadzony z punktu O do danego punktu ciała. Niech $\vec{F}_{ik}$ będzie siłą z jaką *k*-ty punkt ciała działa na punkt *i* zaś $\vec{F}_i$ wypadkowa sił zewnętrznych działających na punkt *i*. Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona:

$$\frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i$$

Pomnóżmy wektorowo obie strony równania przez *i*-ty wektor wodzący:

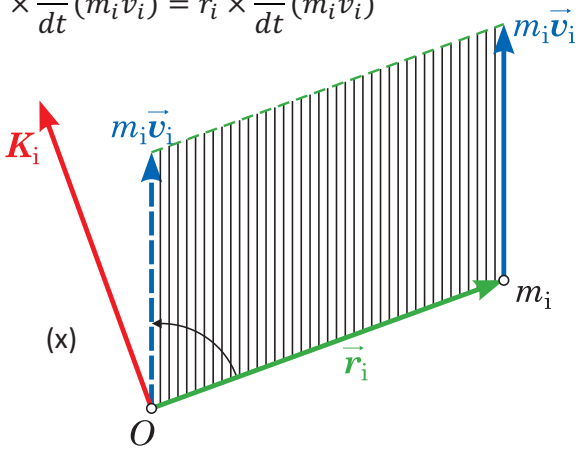
$$\vec{r}_i \times \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i = \vec{r}_i \times \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n} \vec{F}_{ik} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Zauważmy, że:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \vec{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i)$$

Gdyż

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times (m_i \vec{v}_i) = \vec{v}_i \times (m_i \vec{v}_i) = 0$$



Stąd

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \vec{r}_i \times \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n} \vec{F}_{ik} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad (x)$$

Iloczyn wektorowy pod znakiem pochodnej po lewej stronie nazywa się momentem pędu (albo krętem *i*-tego punktu materialnego względem punktu O).

$$\vec{K}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

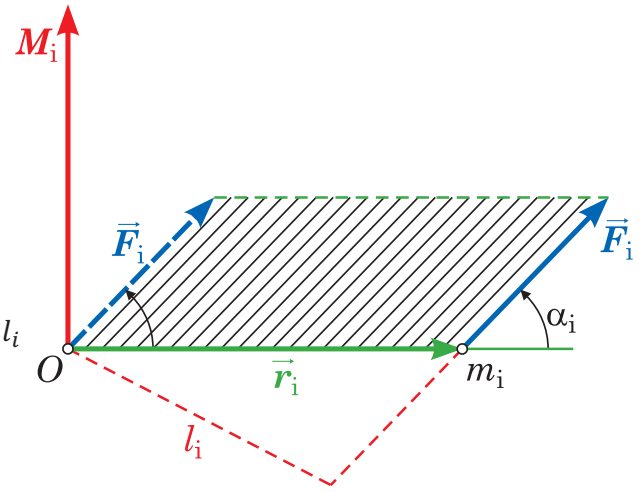
Wektor ten jest oczywiście położony w płaszczyźnie prostopadłej do wektora wodzącego i wektora pędu. Orientację wektora momentu pędu wyznaczamy w zwykły sposób.

Podobnie dla siły $\vec{F}_i$ iloczyn wektorowy

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

definiuje moment tej siły względem punktu O.

Te trzy wektory tworzą prawoskrętną trójkę wektorów, których wzajemną orientację przedstawia rysunek:



Długość wektora momentu siły :

$$M_i = F_i r_i sin\alpha_i = F_i l_i$$

Gdzie α_i kąt między wektorami $\vec{r}_i$ oraz $\vec{F}_i$ zaś l_i długość odcinka o początku w punkcie O i końcu na przecięciu pod kątem prostym z kierunkiem działania siły F_i $(rysunek)$. Odcinek ten nazywa się *ramieniem siły*.

Równanie (x) można przedstawić po prostym podstawieniu w postaci:

$$\frac{d\vec{K}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq i)}}^{n} \vec{F}_{ik} + \vec{M}_i$$

Sumując stronami takie równania odpowiadające wszystkim punktom materialnym mamy:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{K}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq i)}}^{n} \vec{F}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$$

Sumę wektorową momentów $\vec{M}_i$ wszystkich sił zewnętrznych oddziałujących na ciało nazywamy momentem głównym (wypadkowym) $\vec{M}$ tych sił względem punktu O:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

Sumę wektorową momentów pędu $\vec{K}_i$ wszystkich punktów materialnych ciała nazywamy momentem pędu (wypadkowym) $\vec{K}$ ciała względem punktu O:

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

Ze względu na to, że pochodna sumy równa jest sumie pochodnych:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{K}_i}{dt}$$

Ponadto z III zasady dynamiki Newtona wynika, że suma wektorowa momentów wszystkich sił wewnętrznych liczona względem punktu O:

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq i)}}^{n} \vec{F}_{ik}) = 0$$

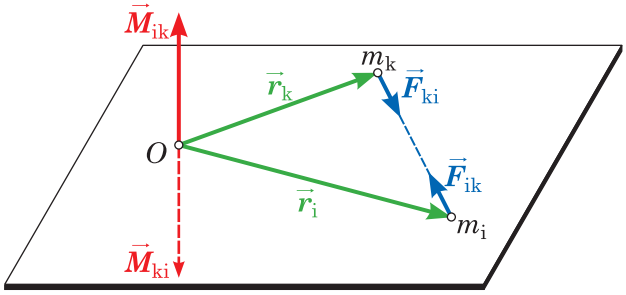
gdyż dowolne punkty *i* oraz *k* działają na siebie siłami równymi co do wartości i o przeciwnym zwrocie, zatem ich momenty:

$$\vec{M}_{ik} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}$$

oraz

$$\vec{M}_{ki} = \vec{r}_k \times \vec{F}_{ki}$$

są też równe co do wartości i przeciwnie skierowane



Niech $\vec{r}_{ki}$ oznacza wektor o początku w punkcie m_i i końcu w m_k

$$\vec{M}_{ki} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ki} + \vec{r}_{ki} \times \vec{F}_{ki} = -\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} = -\vec{M}_{ik} \tag{6.15}$$

ze względu na

$$\vec{r}_k = \vec{r}_i + \vec{r}_{ki}$$

oraz równoległość $\vec{r}_{ki}$ *i* $\vec{F}_{ki}$.

Zatem ostatecznie:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M} \tag{6.16}$$

Ostatnia równość oznacza, że szybkość zmiany momentu pędu ciała obracającego się wokół nieruchomego punktu jest równa wypadkowemu momentowi sił zewnętrznych przyłożonych do ciała (względem tego punktu).

Przyjmijmy teraz, że ciało sztywne jest zaczepione w dwóch stałych punktach O i O1, oraz że może obracać się wokół osi Oz przechodzącej przez oba te punkty. Wtedy składowe momentu siły $\vec{\boldsymbol{M}}$ względem punktu O skierowane wzdłuż osi OX i OY są zrównoważone przez odpowiednie momenty sił reakcji w punkcie O1. Stąd obrót ciała wokół osi OZ odbywa się tylko za sprawą składowej $\vec{\boldsymbol{M}}_z$ momentu sił zewnętrznych względem punktu O. Z (6.16) wynika zatem:

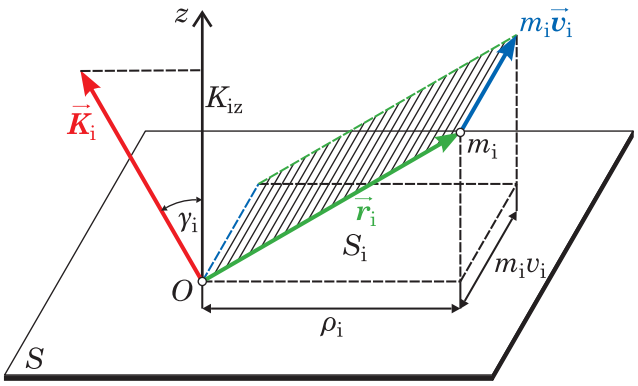
$$\frac{d\vec{K}_z}{dt} = \vec{M}_z \tag{6.17}$$

Równość ta powiada, że szybkość zmiany momentu pędu ciała względem nieruchomej osi obrotu jest równa wypadkowemu momentowi sił zewnętrznych działających na to ciało (względem tej osi)

Moment pędu ciała – podstawowa charakterystyka dynamiczna ciała obracającego się wokół nieruchomej osi.

Wprowadzimy teraz pojęcie momentu bezwładności. W tym celu rozważmy rzut wektora $\vec{\boldsymbol{K}}$ na oś z jako sumę algebraiczną rzutów wektorów składowych:

$$K_z = \sum_{i=1}^{n} K_{iz} \tag{6.18}$$



Zgodnie z definicją iloczynu wektorowego wartość wektora $\vec{K}_i$ jest polem równoległoboku o bokach r_i oraz m_iv_i , zaś rzut $\vec{K}_{iz}$ to pole rzutu na płaszczyznę *S* tego równoległoboku.

$$K_{iz} = K_i cos\gamma_i \tag{6.19}$$

Wektor prędkości *i*-tego punktu materialnego ciała jest równoległy do płaszczyzny *S* zatem wynosi v_i . Rzut wektora $\boldsymbol{r}_i$ na płaszczyznę *S* jest natomiast odległością tego punktu od osi obrotu OZ.

Zatem zrzutowane pole równoległoboku na płaszczyznę *S*:

$$K_{iz} = \rho_i m_i v_i = \omega m_i \rho_i^2 \tag{6.20}$$

Zaś moment pędu całego ciała względem osi obrotu OZ:

$$K_z = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i^2 \tag{6.21}$$

Sumę iloczynów wszystkich mas i kwadratów odległości punktów materialnych od osi obrotu nazywa się momentem bezwładności *I* ciała względem tej osi.

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i^2 \tag{6.22}$$

czyli

$$K_z = I_z \omega \tag{6.23}$$

Moment pędu ciała względem osi obrotu to iloczyn momentu bezwładności ciała i jego prędkości kątowej względem tej samej osi.
W przypadku, gdy ciało ma ciągły rozkład masy :

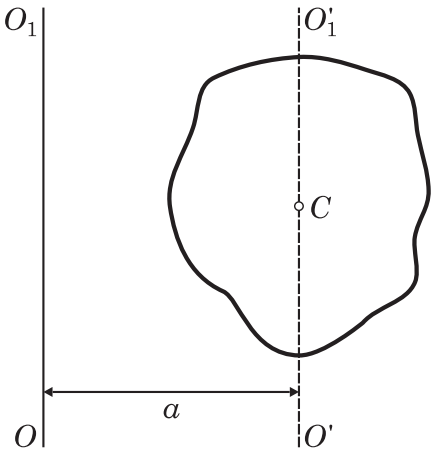
$$I_z = \int_0^m \rho^2 dm \tag{6.24}$$

ρ – odległość masy elementarnej *dm* od osi OZ.

Przy obliczaniu momentów bezwładności różnych ciał bardzo przydatne okazuje się twierdzenie Steinera:

$$I_z = I_z' + ma^2 \tag{6.25}$$

Moment bezwładności I_z ciała względem dowolnej osi OO_1 równa się sumie momentu bezwładności I_z' tego ciała względem osi $O'O_1'$ przechodzącej przez środek masy C ciała i równoległej do OO_1 i iloczynu masy ciała i kwadratu odległości tych osi od siebie.



Moment bezwładności ciała zależy nie tylko od samej masy ciała, ale i od jej rozkładu względem osi obrotu.

Np. moment bezwładności pustego walca o promieniu podstawy *R* i o masie *m*, o bardzo cienkich ściankach (względem osi symetrii walca OZ):

$$I_z = mR^2 \tag{6.26}$$

Ale dla pełnego walca (względem osi symetrii OZ) :

$$I_z = \frac{1}{2}mR^2 \tag{6.27}$$

Kula pełna o promieniu *R* i masie *m* (oś obrotu przechodzi przez środek kuli)

$$I_z = \frac{2}{5}mR^2 \tag{6.28}$$

Kula pełna o promieniu *R* i masie *m* (ale oś obrotu w odległości *a* od środka kuli)

$$I_z = \frac{2}{5}mR^2 + ma^2 \tag{6.29}$$

Dalsze przykłady na ćwiczeniach

Z zależności $K_z = I_z\omega$ wynika, że podstawowe równanie dynamiki dla ruchu obrotowego można przedstawić w postaci:

$$\frac{d}{dt}(I_z\omega) = M_z \tag{6.30}$$

Ponieważ moment bezwładności nie zależy od czasu to:

$$I_z\frac{d\omega}{dt} = M_z \tag{6.31}$$

lub

$$I_z\varepsilon = M_z \tag{6.32}$$

Skąd natychmiast mamy:

$$\varepsilon = \frac{M_z}{I_z} \tag{6.33}$$

Zatem przyspieszenie kątowe ciała sztywnego obracającego się wokół nieruchomej osi OZ jest proporcjonalne do wypadkowego momentu względem tej osi wszystkich sił zewnętrznych działających na ciało i odwrotnie proporcjonalne do momentu bezwładności ciała względem tej osi.

Moment bezwładności jest więc miarą bezwładności ciała w jego ruchu obrotowym.

Dla M_z = 0, ε = 0 czyli ω = const. W przeciwieństwie więc do odosobnionego punktu materialnego odosobnione ciało sztywne może nie tylko pozostawać w spoczynku lub poruszać się ruchem jednostajnym prostoliniowym, ale też obracać się jednostajnie dookoła nieruchomej osi.

Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu obrotowym

Energia kinetyczna ciała sztywnego to suma energii kinetycznych jego *i* elementów:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} \tag{6.34}$$

Dla ciała obracającego się wokół ustalonej osi OZ w prędkością kątową ω prędkość liniowa *i*-tego punktu:

$$v_i = \omega \rho_i \tag{6.35}$$

ρ_i- odległość tego punktu od osi obrotu, stąd

$$E_{k\,obr} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i^2 = \frac{I_z \omega^2}{2} \tag{6.36}$$

Proste porównanie ze wzorem na energię kinetyczną w ruchu postępowym

$$E_{k\,post} = \frac{mv^2}{2} \tag{6.37}$$

potwierdza, że rolę masy jako miary bezwładności przejmuje w ruchu obrotowym moment bezwładności ciała sztywnego.

Gdy ciało sztywne porusza się zarówno ruchem postępowym, jak i obrotowym dookoła osi przechodzącej przez środek masy ciała to całkowita energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2} \tag{6.38}$$

Gdzie I_C - moment bezwładności ciała względem osi obrotu.

Zasada zachowania momentu pędu

Jeżeli wypadkowy moment sił zewnętrznych względem nieruchomego punktu ciała jest równy 0, to moment pędu ciała względem tego punktu nie zmienia się w funkcji czasu.

Istotnie, dla $\vec{M} = 0$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = 0 \; i \; \vec{K} = const \tag{6.39}$$

Zasada ta jest słuszna także dla odosobnionego układu ciał.
Z podstawowej zasady dynamiki ciał wykonującego ruch obrotowy dookoła nieruchomej osi OZ wynika zasada zachowania momentu pędu ciała względem tej osi:
Jeśli moment sił zewnętrznych względem nieruchomej osi jest równy 0 to moment pędu ciała względem tej osi nie zmienia się podczas ruchu: czyli dla $M_z = 0$ mamy:

$$\frac{dK_z}{dt} = 0 \quad \text{i} \; K_z = const. \; \text{lub} \; I_z \omega = const. \tag{6.40}$$

Słuszność zasady zachowania momentu pędu wykazuje się na podstawie wielu doświadczeń. Jednym z nich jest doświadczenie z ławeczką Żukowskiego: jest to pozioma tarcza, która może swobodnie się obracać przy znikomym (zaniedbywalnym) tarciu dookoła nieruchomej pionowej osi OO_1. Człowiek stojący na ławeczce trzyma hantle. W zależności od położenia rąk jak na rysunku zmniejsza się bądź zwiększa moment bezwładności układu i odpowiednio zwiększa bądź zmniejsza prędkość kątowa obrotu człowieka.
Zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu względem osi OO_1:

$$(I_0 + 2mr_1^2)\omega_1 = (I_0 + 2mr_2^2)\omega_2 \tag{6.41}$$

I_0 – moment bezwładności człowieka i ławeczki, $2mr_1^2$, $2mr_2^2$ – momenty bezwładności hantli w pierwszym i drugim skrajnym położeniu , ω_1, ω_2 – odpowiednie prędkości kątowe.
W omawianym doświadczeniu zmiana momentu bezwładności układu związana jest ze zmianą jego energii kinetycznej:

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \frac{(I_0 + 2mr_2^2)\omega_2^2}{2} - \frac{(I_0 + 2mr_1^2)\omega_1^2}{2} \tag{6.42}$$

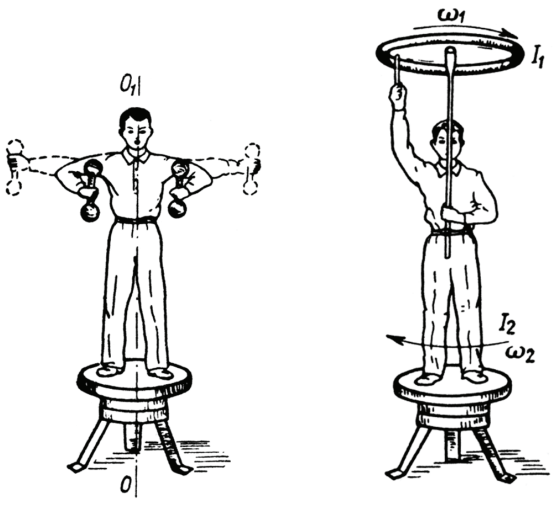
Ponieważ z (6.41):

$$\omega_2 = \frac{I_0 + 2mr_1^2}{I_0 + 2mr_2^2}\omega_1 \tag{6.43}$$

to na zmianę energii kinetycznej uzyskujemy wynik:

$$\Delta E_k = \frac{I_0 + 2mr_1^2}{2}\omega_1(\omega_2 - \omega_1) \neq 0 \tag{6.44}$$

Ta zmiana energii kinetycznej to oczywiście praca, którą człowiek wykonał zbliżając hantle do swojego ciała.



[Jaworski]

Inny wariant doświadczenia z ławeczką pokazuje rysunek po prawej stronie.

Siła sprężystości

Odkształcenie ciała sztywnego pod wpływem sił zewnętrznych polega na przemieszczeniu się cząsteczek tego ciała z pewnego położenia równowagi do innego położenia równowagi. Temu przemieszczeniu przeciwdziałają siły wzajemnego oddziaływania cząsteczek ciała Dla niewielkich przesunięć odkształcenie wywołane przez siły zewnętrzne może być odwracalne, nazywamy je wtedy sprężystym.
W przypadku większych przemieszczeń z położenia równowagi bądź długo działających nawet niewielkich sił zewnętrznych dochodzi do trwałego odkształcenia, zwanego plastycznym.
Podzielmy myślowo ciało sprężyście odkształcone na dwie części: wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych przyłożonych do każdej z części jest zrównoważona przez siłę sprężystości z jaką jedna część działa na drugą. Wielkość fizyczną równą liczbowo sile sprężystości na jednostkę pola *dS* przekroju poprzecznego ciała nazywa się naprężeniem:

$$\sigma = \frac{dF_{spr}}{dS} \tag{6.45}$$

Naprężenie nazywa się *normalnym*, gdy siła sprężystości jest skierowana prostopadle do powierzchni *dS* – a *stycznym*, gdy siła jest równoległa do *dS*.
W praktyce o wielkości odkształcenia informuje odkształcenie względne *Δx/x*, gdzie *Δx* to odkształcenie bezwzględne wielkości *x*.
Prawo Hooke'a – naprężenie ciała sprężyście odkształconego jest proporcjonalne do względnego odkształcenia tego ciała:

$$\sigma = K_x \frac{\Delta x}{x} \tag{6.46}$$

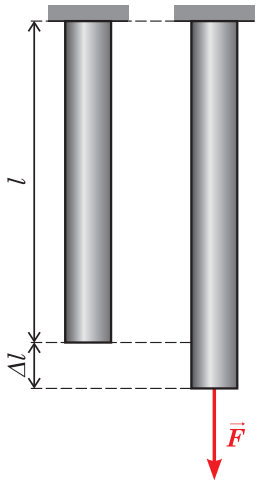
K_x – moduł sprężystości. Wielkość modułu sprężystości zależy of własności materiału.

Wielkość $1/K_x$ nazywa się współczynnikiem sprężystości.

Naprężenie graniczne, powyżej którego nie zachodzi już proporcjonalność naprężenia i odkształcenia nazywa się *granicą proporcjonalności*.

Każde odkształcenie złożone ciała może wynikać z: jednokierunkowego ściskania (rozciągania), przesunięcia, rozciągania bądź ściskania we wszystkich kierunkach i skręcania.

Przy rozciąganiu podłużnym proces odkształcania ustaje gdy siły sprężyste są zrównoważone siłą rozciągającą *F*. Moduł sprężystości w tym przypadku nazywa się modułem Younga *E*:



$$\sigma = \frac{F}{S} \text{ i } \quad \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta l}{l} \text{ otrzymamy } \quad \frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l} \tag{6.47}$$

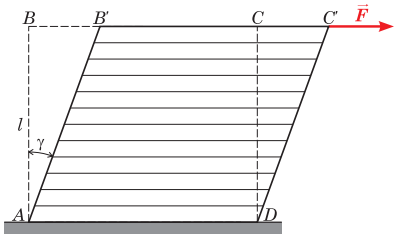
$$\text{Stąd: } \Delta l = \frac{Fl}{ES} \tag{6.48}$$

l – początkowa długość badanej próbki,
Δl – zmiana tej długości pod działaniem siły *F*,
S – pole przekroju poprzecznego.

Rozciąganiu lub ściskaniu próbek w jednym kierunku towarzyszy ich zwężenie (rozszerzenie) w kierunkach poprzecznych.
Miarą tej wielkości jest współczynnik Poissona:

$$\mu = \frac{\Delta d}{d} : \frac{\Delta l}{l} \tag{6.49}$$

Przesunięciem lub odkształceniem postaciowym nazywamy takie odkształcenie ciała sztywnego, przy którym wszystkie jego płaskie warstwy równoległe do danej płaszczyzny zwanej płaszczyzną przesunięcia przesuwają się względem siebie równolegle bez żadnych deformacji.



Przesunięcie powoduje siła styczna F przyłożona do ścianki BC równoległej do płaszczyzny przesunięcia. Ścianka AD jest nieruchoma. Dla niewielkiego przesunięcia:

$$\gamma = tg\gamma = \frac{\Delta x}{x} \tag{6.50}$$

$\Delta x = CC'$ – bezwzględne przesunięcie, $x = AB$ – odległość ścianki BC od ścianki AD, γ – kąt przesunięcia w radianach. Zgodnie z ***Prawem Hooke'a*** naprężenie styczne:

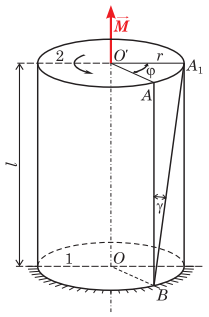
$$\sigma_\tau = G\gamma \tag{6.51}$$

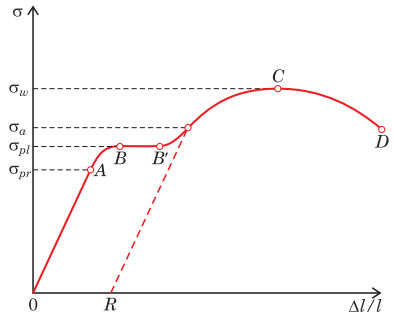
G – moduł sprężystości postaciowej (moduł sztywności).
Odkształcenie ściskania (rozciągania) we wszystkich kierunkach skutkuje zwiększeniem bądź zmniejszeniem objętości próbki. Dla próbki izotropowej zgodnie z ***Prawem Hooke'a***:

$$\sigma = K\frac{\Delta V}{V} \tag{6.52}$$

K – moduł sprężystości objętościowej (moduł ściśliwości). Sprężystość objętościową wykazują także ciecze i gazy.

Odkształcenie skręcenia występuje wtedy, gdy jeden przekrój próbki jest sztywno zamocowany a na drugi przekrój działa moment pary sił (równych co do wielkości i przeciwnie skierowanych). Moment ***M*** względem środka przekroju *O'* jest równoległy do osi próbki





Działanie M prowadzi do obrotu wszystkich przekrojów poprzecznych dookoła osi OO' o tym większy kąt im większa odległość danego przekroju od nieruchomego przekroju 1 na dole rysunku. Okazuje się, że:

$$M = \frac{\pi G}{2}\frac{r^4}{L}\varphi. \tag{6.53}$$

Zastosowania: waga skręceń, galwanometr zwierciadłowy.
Rysunek po prawej stronie podsumowuje wyniki badań próbek poddawanych rozciąganiu.
Niewielkie odkształcenia - obowiązuje ***prawo Hooke'a***.
Od punktu A do punktu B następuje znaczny wzrost względnego wydłużenia aż do osiągnięcia *granicy plastyczności* (punkt B).
Począwszy od B do B' dalszy wzrost względnej długości ciała następuje bez użycia dodatkowej siły.
Od B' mamy dalszy wzrost naprężenia wraz ze wzrostem odkształcenia aż do osiągnięcia granicy wytrzymałości w punkcie C. W punkcie D próbka rozrywa się.

Siły tarcia

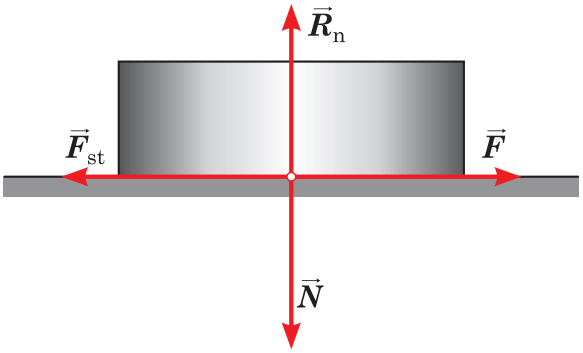
Na ciała będące w ruchu działają siły różnego rodzaju oporów ośrodka. Ogólnie nazywamy je siłami tarcia. W wyniku działania tych sił następuje przemiana energii mechanicznej w energię wewnętrzną trących się ciał (energię ruchu cieplnego ich cząsteczek).

Klasyfikacja sił tarcia

Tarcie wewnętrzne – (lepkość) polega na występowaniu sił stycznych przeciwdziałających ruchowi jednych części ciała względem innych części ciała (gazy i ciecze). Energia mechaniczna zamienia się w energię wewnętrzną w całej objętości ciała.

Tarcie zewnętrzne – zjawisko występowania sił stycznych do powierzchni dwóch stykających się ciał sztywnych w miejscu ich zetknięcia. Mamy dwa typy tarcia zewnętrznego: kinetyczne (dla ciał będących we wzajemnym ruchu) i statyczne – dla ciał w spoczynku.

Tarcie statyczne – ilustracja na rysunku poniżej



Minimalna siła styczna ***F*** potrzebna do wprawienia w ruch ciała jest równa sile tarcia statycznego $\boldsymbol{F_{st}}$ przeciwdziałającej ruchowi. Wartość F_{st} jest proporcjonalna do normalnego ciśnienia ciała na płaszczyznę stawiającą opór:

$$\left|\overrightarrow{F_{st}}\right| = f_0\left|\vec{N}\right| \qquad (6.54)$$

albo

$$F_{st} = f_0 N \qquad (6.55)$$

N – siła nacisku, f_0 – współczynnik tarcia statycznego charakterystyczny dla materiału i właściwości danych powierzchni.

Rozważmy ciało na równi pochyłej, z rysunku obok:

$$N = Pcos\varphi \quad \text{i} \quad F = Psin\varphi$$

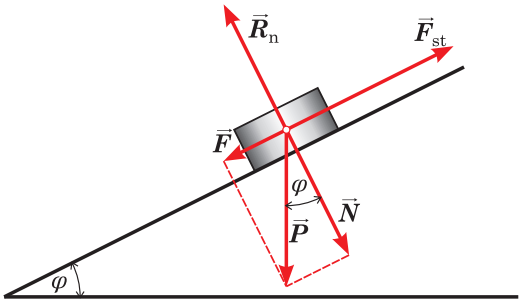
P – ciężar ciała, φ – kąt nachylenia równi do poziomu. Dla małego φ, $F < F_{st}$ i ciało pozostaje nieruchome. Dla pewnego kąta $\varphi > \varphi_0$ (kąta tarcia) ciało zaczyna zsuwać się po równi. Ze względu na:

$$Psin\varphi_0 = F_{st} = f_0 N = f_0 Pcos\varphi_0 \qquad (6.56)$$

Mamy

$$f_0 = tg\varphi_0 \qquad (6.57)$$

czyli uzyskaliśmy związek między współczynnikiem tarcia statycznego i kątem tarcia.



Tarcie kinetyczne

Dla tarcia ślizgania można sformułować prawo podobne do wyrażonego dla tarcia statycznego:

$$\left|\vec{F}_{śl}\right| = f'\left|\vec{N}\right| \text{ albo } F_{śl} = f'N \qquad (6.58)$$

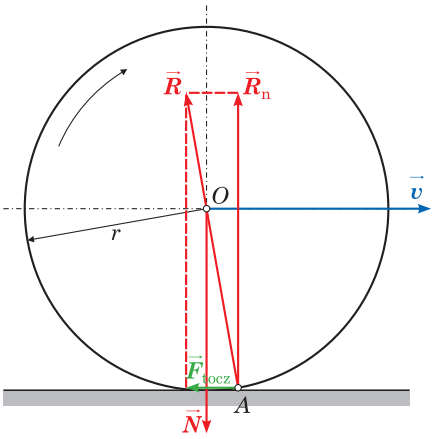
f' – współczynnik tarcia ślizgania, ***N*** – siła normalna nacisku na powierzchnię.

W celu zmniejszenia tarcia stykające się powierzchnie wygładza się, jednak tylko do pewnej granicy. Dla bardzo gładkich powierzchni zaczynają coraz większą rolę odgrywać siły przyciągania między stykającymi się cząsteczkami z obu powierzchni i dochodzi do zwiększenia sił tarcia. W takich przypadkach efektywna siła normalnego nacisku może znacznie przekroczyć siłę nacisku *N* i prawo opisujące tarcie ślizgania przyjmuje postać:

$$F_{śl} = f(N + N_0) \text{ lub } F_{śl} = f(N + p_0 S_0) \qquad (6.59)$$

N_0 – wypadkowa sił przyciągania międzydrobinowego w obszarach bezpośredniego kontaktu, f – rzeczywisty współczynnik tarcia ślizgania, p_0 – ciśnienie wywierane przez siły przyciągania cząsteczkowego, S_0 – pole rzeczywistego kontaktu.

Tarcie przy toczeniu



Podczas toczenia np. walca lub kuli po powierzchni występuje jedynie chwilowy kontakt ciał w danym punkcie, można to potraktować jako obrót danego ciała wokół osi chwilowych przechodzących przez dane punkty kontaktu ciał. Przyczyną tarcia przy toczeniu ciał są odkształcenia powierzchni, np. na rysunku punkt A przyłożenia siły reakcji *R* powierzchni przesunięty jest wskutek odkształcenia w kierunku ruchu zaś kierunek działania siły jest odchylony od pionowego nieco w kierunku przeciwnym do ruchu. Składowa normalna siły reakcji powierzchni:

$$\vec{R}_n = -\vec{N} \tag{6.60}$$

a składowa styczna $\vec{R}_\tau$ jest siłą tarcia przy toczeniu:

$$\vec{F}_{tocz} = \vec{R}_\tau \ , \tag{6.61}$$

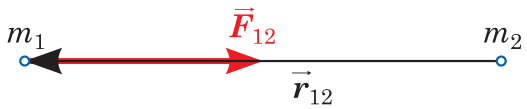
w przybliżeniu mamy tzw. wzór Coulomba:

$$F_{tocz} = f_t \frac{N}{r}, \tag{6.62}$$

gdzie *r* – promień powierzchni toczącego się ciała.
Współczynniki tarcia przy toczeniu są na ogół znacznie mniejsze niż przy ślizganiu.

Ruch w polu grawitacyjnym

Prawo powszechnego ciążenia



$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{7.1}$$

lub w postaci wektorowej:

$$\vec{F}_{12} = -k\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} \tag{7.2}$$

Wymiar stałej grawitacji :

$$[k] = \frac{[F][r]^2}{[m]^2} = Nm^2/kg^2 \tag{7.3}$$

W przypadku oddziaływania dwóch ciał o dowolnych rozmiarach i kształtach rozbijamy je na dużą liczbę części, które można traktować jako punkty materialne. Siła z jaką *k*-ty punkt przyciąga *i*-ty :

$$\vec{F}_{ik} = -k\frac{m_i m_k}{r_{ik}^3}\vec{r}_{ik} \tag{7.4}$$

$\vec{r}_{ik}$ – promień wodzący o początku w punkcie materialnym *k* i końcu w punkcie materialnym *i*.
Wypadkowa siła przyciągania *i*-tego punktu ciała pierwszego przez wszystkie punkty ciała drugiego:

$$\vec{F}_i = \sum_{k=1}^{n_2}\vec{F}_{ik} = -km_i\sum_{k=1}^{n_2}\frac{m_k}{r_{ik}^3}\vec{r}_{ik} \tag{7.5}$$

Całkowita siła $\vec{F}$ przyciągania całego ciała 1 przez ciało 2 jest oczywiście sumą wektorową wszystkich sił $\vec{F}_i$:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n_1} \vec{F}_i = -k \sum_{i=1}^{n_1} m_i \sum_{k=1}^{n_2} \frac{m_k}{r_{ik}^3} \vec{r}_{ik} \tag{7.6}$$

Powyższy wzór jest równoważny

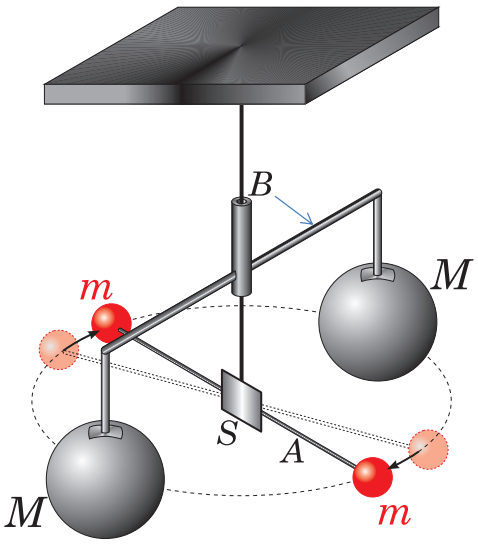
$$\vec{F}_{12} = -k \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \tag{7.7}$$

przy $\vec{r}_{12}$ – wektor wodzący łączący środki mas obydwu ciał, m_1, m_2 – masy ciał, gdy

1) oba ciała są kulami, a ich gęstość zależy tylko od odległości od środka masy tych ciał lub
2) rozmiary jednego ciała znacznie przekraczają rozmiary drugiego ciała, przy czym pierwsze ciało spełnia warunek 1).

W przybliżeniu często można przyjąć, że Ziemia jest kulą i jej gęstość zależy tylko od odległości od środka Ziemi. Jest to przyczyna dla której przyciąganie każdego ciała przez Ziemię opisuje się wzorami (7.1) lub (7.2).

Wyznaczenie wartości stałej grawitacji wykonał po raz pierwszy Cavendish przy wykorzystaniu wagi skręceń (1798).



← Waga skręceń

Lekki pręt *A* z dwiema identycznymi kulkami o masach *m* wisi na sprężystej nici. Na pręcie *B* zamocowane są ciężkie kule o masach *M*. Przez obrót pręta *B* wokół osi pionowej zmieniamy odległość między kulami *m* i *M*.

Przyciąganie przez kule *M* małych kulek *m* tworzy moment pary sił przyłożony do kulek *m* i obracający pręcik *A* w poziomie aż do chwili, gdy moment sił sprężystości nie zrównoważy momentu sił przyciągania.

Kąt skręcenia nici odczytuje się jako zmianę kata odbicia wiązki światła padającej na zwierciadło *S*.

Znając kąt skręcenia i własności materiałowe sprężystej nici Cavendish obliczył siły przyciągania *M* i *m* przy różnych ich odległościach.

W wyniku tego i pokrewnych eksperymentów uzyskano wartość stałej grawitacji:

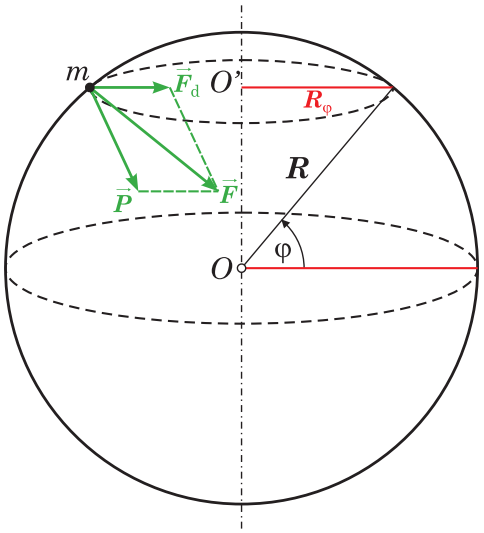
$$k = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\ s^2} \tag{7.8}$$

Siła, z którą Ziemia przyciąga dane ciało:

$$F = k \frac{mM}{R^2} \tag{7.9}$$

R – odległość ciała od środka Ziemi, *m* – masa ciała, *M* – masa Ziemi.

Wskutek przyciągania ciało spada na powierzchnię Ziemi i po spadku obraca się wraz z nią (obrót dobowy) czyli wykonuje ruch jednostajny po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu Ziemi. Dlatego warto przeprowadzić rozkład wektora siły **F** na składowe jak na rysunku:



$$\vec{F} = \vec{P} + \overrightarrow{F_d} \tag{7.10}$$

$\overrightarrow{F_d}$ – odpowiada za udział ciała w ruchu obrotowym.

Ciało po spadku porusza się po zaznaczonym okręgu

$$F_d = \frac{mv^2}{R_\varphi} = m\omega^2 R_\varphi \tag{7.11}$$

lub

$$F_d = m\omega^2 R\cos\varphi \tag{7.12}$$

ze względu na

$$R_\varphi = R\cos\varphi \tag{7.13}$$

$\vec{P}$ – ciężar ciała – siła odpowiedzialna za spadek ciała. Punkt przyłożenia siły $\vec{P}$ wyznacza środek ciężkości ciała.

Z (7.12) wynika, że siła dośrodkowa F_d zależy od szerokości geograficznej φ ciała. Na biegunach $\varphi = \pi/2$ i $F_d = 0$, na równiku $\varphi = 0$ i F_d osiąga maximum: $F_d = m\omega^2 R$.

Wynika z tego, że ciężar ciała P jest mniejszy od siły przyciągania wszędzie za wyjątkiem biegunów. Ogólnie rzecz biorąc wektor $\vec{P}$ jest prostopadły do powierzchni Ziemi tylko na biegunach i równiku.

Wskutek dobowego obrotu Ziemi ciężar ciała jest największy na biegunach, a najmniejszy na równiku:

$$P_{bieg} = k\frac{mM}{R_{bieg}^2}, \tag{7.14}$$

$$P_{równ} = k\frac{mM}{R_{równ}^2} - m\omega^2 R_{równ}, \tag{7.15}$$

lub

$$P_{równ} = k\frac{mM}{R_{równ}^2}\left(1 - \frac{\omega^2 R_{równ}^3}{kM}\right) \tag{7.16}$$

gdzie R_{bieg} = 6357 km
$R_{równ}$ = 6378 km

ponieważ Ziemia nie jest dokładnie kulista.

Z uwagi na:

$$M = 5{,}98\cdot 10^{24}\ \text{kg} \tag{7.17}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{24\cdot 3600}\frac{rad}{s} \tag{7.18}$$

mamy

$$\frac{\omega^2 R_{równ}^3}{kM} = \frac{4\cdot(3{,}14)^2(6{,}38\cdot 10^6)^3}{(24\cdot 3600)^2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}} = 0{,}00345 \tag{7.19}$$

i ruch dobowy Ziemi nie ma większych konsekwencji dla wielu zagadnień
(Ale oczywiście nie wszystkich! Jakich???) Wtedy:

$$P = k\frac{mM}{R^2} \tag{7.20}$$

Ruch ciała wyłącznie pod działaniem siły P nazywa się swobodnym spadkiem, a przyspieszenie *g* nadawane ciału przez tę siłę to przyspieszenie swobodnego spadania.

Z II zasady dynamiki:

$$\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m} \tag{7.21}$$

lub (przy pominięciu efektu dobowego obrotu Ziemi)

$$g = k\frac{M}{R^2} = k\frac{M}{(R_0 + h)^2} \tag{7.22}$$

R_0 – promień Ziemi (jako kuli), wysokość środka ciężkości ciała nad powierzchnią Ziemi.

Zatem *g* nie zależy od własności ciała – (por. doświadczenie ze swobodnym spadkiem ciał w próżni).

Natomiast *g* zależy od wysokości *h* nad powierzchnią Ziemi:

$$\frac{g_0}{g} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = \left(\frac{R_0 + h}{R_0}\right)^2 = \left(1 + \frac{h}{R_0}\right)^2 \tag{7.23}$$

g_0 - przyspieszenie bardzo blisko powierzchni Ziemi.

Dla $h \ll R_0$

$$\frac{g_0}{g} \approx 1 + \frac{2h}{R_0} \tag{7.24}$$

Zmiana g_0 w zależności od szerokości geograficznej: od 9.83 (bieguny) do 9.78 m/s^2

Przyjmijmy, że Księżyc jest kulą i obiega Ziemię po orbicie kołowej ruchem jednostajnym. Wtedy przyspieszenie dośrodkowe Księżyca:

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2}R \tag{7.25}$$

T – okres obiegu Księżyca wokół Ziemi. Z uwagi na T = 27.3 doby ziemskiej oraz $R = 60.3 \cdot R_{Ziemi}$

$$a = 0.0027 \text{ m/s}^2 \tag{7.26}$$

$$g = g_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = \frac{9{,}81}{(60{,}3)^2} = 2{,}70 \cdot 10^{-3}\frac{m}{s^2} \tag{7.27}$$

czyli tyle samo co *a*. Zatem istotnie siła dośrodkowa działająca na Księżyc równa się sile przyciągania Księżyca przez Ziemię:

$$F_d = m_{Ks}a = m_{Ks}g = k\frac{m_{Ks}M}{R^2} \tag{7.28}$$

Opierając się na prawie powszechnego ciążenia Newton podał szereg danych, wytłumaczył zjawiska pływów i opisał ruch licznych ciał niebieskich.

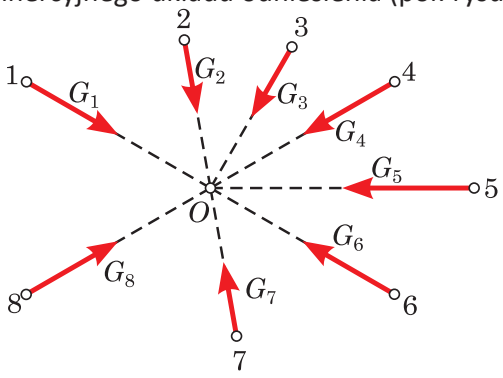
Pole grawitacyjne

Oddziaływanie wzajemne typu grawitacyjnego odbywa się za pośrednictwem pola ciążenia (grawitacyjnego). Źródłem pola grawitacyjnego jest masa ciał.
Na każdy punkt materialny (ciało) wprowadzony do tego pola działa siła ciążenia:

$$\vec{F} = m\vec{G} \tag{7.29}$$

$\vec{G}$ – natężenie pola grawitacyjnego.

Jeśli punkt materialny porusza się tylko pod działaniem sił pola grawitacyjnego, to z II zasady dynamiki wynika, że jego przyspieszenie w każdym punkcie pola opisuje wektor $\vec{G}$.
Pole nazywamy jednorodnym, jeśli natężenie pola w każdym jego punkcie jest jednakowe.
Pole nazywamy centralnym jeśli we wszystkich jego punktach wektory natężenia pola są skierowane wzdłuż prostych mających jedne punkt wspólny, nieruchomy względem dowolnego inercyjnego układu odniesienia (por. rysunek).



Przyjmując punkt O za początek układu współrzędnych położenie punktów pola określimy dzięki wektorowi wodzącemu ***r*** o początku w punkcie *O*. Wtedy w polu centralnym:

$$\vec{G} = \frac{G_r}{r}\vec{r} \tag{7.30}$$

$gdzie\ G_r = G_r(x, y, z)$ oraz

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{7.31}$$

Punkt *O* nazywa się też niekiedy środkiem sił.

Pole centralne nazywamy kulisto – symetrycznym jeśli liczbowa wartość wektora natężenia zależy tylko od ***r***

$$G = G(r) \tag{7.32}$$

$$G_r = G_r(r) \tag{7.33}$$

Rozpatrzmy pole ciążenia wytworzone przez nieruchomy punkt materialny o masie *M*. Z prawa powszechnego ciążenia siła działająca na punkt materialny *m* w polu grawitacyjnym punktu *M*:

$$\vec{F} = -k\frac{mM}{r^3}\vec{r} \tag{7.34}$$

zaś natężenie pola:

$$\vec{G} = -k\frac{M}{r^3}\vec{r} \tag{7.35}$$

To pole jest centralne i kulisto-symetryczne, gdyż

$$G_r = -k\frac{M}{r^2} \tag{7.36}$$

spełnia warunek $G_r = G_r(r)$.

Obecnie zajmiemy się polem wytworzonym przez zbiór nieruchomych punktów materialnych o masach m_i.

Siła z jaką *i*-ty punkt układu działa na punkt materialny o masie *m* w danym miejscu *X* pola ciążenia:

$$\vec{F}_i = -k\frac{mm_i}{r_i^3}\vec{r}_i = m\vec{G}_i \tag{7.37}$$

$\vec{r}_i$– promień wodzący z *i*-tego punktu pola do punktu *X*, $\vec{G}_i$ – natężenie pola w tym punkcie *X* wytworzone przez jeden z punktów o masie m_i.
Siła wypadkowa:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = m\sum_{i=1}^{n}\vec{G}_i \tag{7.38}$$

Jak jednak wiemy: $\vec{F} = m\vec{G}$
Stąd:

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^{n}\vec{G}_i \tag{7.39}$$

czyli wypadkowe natężenie pola jest sumą natężeń pól składowych (wektorowo).
Na zewnątrz kulistego ciała o gęstości stałej lub zależnej tylko od *r*:

$$\vec{G} = -k\frac{M}{r^3}\vec{r} \quad \text{przy } r \gg R \tag{7.40}$$

Czyli jest to takie pole, jakie wytwarzałby punkt materialny o masie *M* umieszczony w środku ciężkości ciała.

Wykażemy teraz, że *pole ciążenia jest zachowawcze.*

Praca elementarna w polu ciążenia przy przesunięciu w nim punktu materialnego:

$$\delta L = \vec{F}\cdot d\vec{r} = m(\vec{G}\cdot d\vec{r}) \tag{7.41}$$

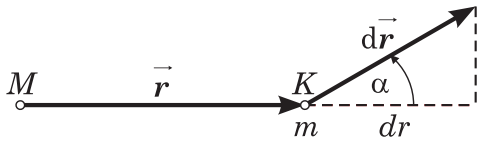
Gdy pole wytwarza punkt materialny o masie M , wiemy, że:

$$\vec{G} = -k\frac{M}{r^3}\vec{r} \tag{7.42}$$

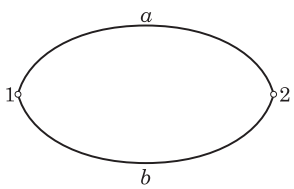
oraz

$$\delta L = -k\frac{mM}{r^3}(\vec{r}\cdot d\vec{r}) = -k\frac{mM}{r^2}dl\cos\alpha \tag{7.43}$$

dl = dr.
Z rysunku
$dl\cos\alpha = dr$
Mamy więc $\delta L = -kmM\frac{dr}{r^2}$



Praca sił pola przy skończonym przesunięciu z punktu 1 do punktu 2 (rys. poniżej) wynosi:



$$L_{1-2} = -\int_{r_1}^{r_2} kmM\frac{dr}{r^2} = -kmM\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = kmM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) \tag{7.44}$$

Praca ta nie zależy od wyboru toru przesunięcia punktu z 1 do 2, zależy tylko od położenia punktów 1 i 2 i iloczynu ich mas, punkt M wytwarza więc pole zachowawcze. Praca tych sił po dowolnej krzywej zamkniętej:

$$\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv 0 \text{ lub } \oint_L \vec{G}\cdot d\vec{r} \equiv 0, \tag{7.45}$$

czyli krążenie wektora $\vec{F}$ i krążenie wektora $\vec{G}$ wynoszą 0.

Poprzednie rozważania łatwo uogólnić na dowolny układ ciał wytwarzający pole grawitacyjne. Ponieważ

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^{n} \vec{G}_i \tag{7.46}$$

to iloczyn skalarny dla układu ciał

$$\vec{G} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \vec{G}_i \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{G}_i \cdot d\vec{r}) \tag{7.47}$$

i mamy :

$$\oint_L \vec{G} \cdot d\vec{r} = \oint_L \sum_{k=1}^{n} \vec{G}_i \cdot d\vec{r} = \sum_{k=1}^{n} \oint_L \vec{G}_i \cdot d\vec{r} \equiv 0 \tag{7.48}$$

Powiążmy teraz pracę sił zachowawczych w polu grawitacyjnym z energią potencjalną układu. Poprzednio pokazaliśmy, że praca sił zachowawczych jest równa zmniejszeniu energii potencjalnej układu. Obecnie praca równa się ubytkowi energii potencjalnej punktu materialnego przemieszczającego się w polu sił ciężkości:

$$L_{1-2} = -\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2} \tag{7.49}$$

A dla infinitezymalnego przesunięcia: $dL = -dE_p$
Zatem w przypadku pola grawitacyjnego wytworzonego przez punkt materialny M

$$E_{p1} - E_{p2} = -kmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{7.50}$$

Przy bardzo dużej odległości punktu M od źródła pola:

$$\lim_{r_2 \to \infty} E_{p2} = 0 \tag{7.51}$$

i

$$E_{p1} = -\frac{kmM}{r_1} \tag{7.52}$$

albo też

$$E_p = -\frac{kmM}{r} \tag{7.53}$$

Powyższy związek obowiązuje oczywiście także gdy to masa m wytwarza pole grawitacyjne, zatem mówimy tu o wzajemnej energii potencjalnej dwóch mas *m* i *M*.
Jak widać z powyższego wzoru ***energia potencjalna jest ujemna.***
Energia potencjalna masy m w polu wielu punktów:

$$E_p = -\sum_{i=1}^{n} \frac{kmm_i}{r_i} \tag{7.54}$$

r_i - odległość punktu o masie m od i-tego punktu (i-tej masy) układu.

Wielkość

$$V_c = \frac{E_p}{m} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{km_i}{r} \tag{7.55}$$

nie zależy od *m* i nazywa się ***potencjałem pola grawitacyjnego .*** Wielkość ta charakteryzuje pole pod względem energetycznym. W przypadku pola wytworzonego przez 1 punkt materialny o masie *M*:

$$V_c = -\frac{kM}{r} \tag{7.56}$$

Z porównania ostatnich dwóch związków wynika, że:

$$V_c = \sum_{i=1}^{n} V_{c_i} \tag{7.57}$$

Związek między natężeniem pola a potencjałem.
Praca *dL* wykonywana przez siły pola przy niewielkim przesunięciu punktu o masie *m*:

$$dL = -mdV_c \tag{7.58}$$

Z drugiej strony wiemy, że:

$$dL = m\left(\vec{G}\cdot d\vec{r}\right) = mGcos\alpha dl = mG_l dl \tag{7.59}$$

przy czym dl=|**dr**| ($dl = |d\vec{r}|$), G_l – rzut $\vec{G}$ *na kierunek* $d\vec{r}$ **(**$G_l = Gcos\alpha$**)**
Stąd:

$$mG_l dl = -mdV_c \text{ lub}$$

$$G_l = -\frac{dV_c}{dl} \tag{7.60}$$

Wielkość $\frac{dV_c}{dl}$ charakteryzuje zmianę potencjału na jednostkę długości w kierunku przesunięcia $d\vec{r}$ w polu grawitacyjnym. Jeśli kierunki $\left(\vec{G}\right)$ *i* $d\vec{r}$ są zgodne to $|\frac{dV_c}{dl}|$= max.
Ponieważ G >0 to $\frac{dV_c}{dl}$<0 czyli w każdym punkcie pola grawitacyjnego $\left(\vec{G}\right)$ jest skierowany w stronę najszybszego malenia potencjału.

$$\vec{G} = -gradV_c \tag{7.61}$$

gdzie

$$gradV_c = \frac{\partial V_c}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial V_c}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial V_c}{\partial z}\vec{k} \tag{7.62}$$

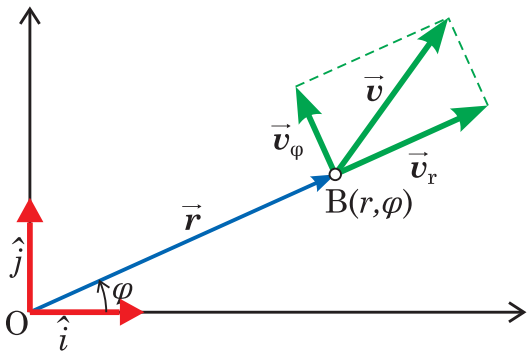
Przedstawione rozważania na temat pola grawitacyjnego obowiązują przy następujących założeniach:

a) *v << c*
b) pole grawitacyjne jest na tyle słabe by jego potencjał V << c^2
c) w przypadku silniejszych pól i ruchów ciał z większymi prędkościami nie obowiązuje zasada superpozycji pól.

Opis pól grawitacyjnych opiera się na teorii względności Einsteina .

Ruch w polu centralnym

Przedyskutujemy ruch w polu sił centralnych w odniesieniu szczególnie do pola grawitacyjnego. Niech punkt B porusza się jak na rysunku pod wpływem siły centralnej:



$$\vec{F} = \frac{\overrightarrow{F_r}}{r}\vec{r} \tag{7.63}$$

W przypadku przyciągania punktu B do O: $F_r = -F$,
W przypadku odpychania: $F_r = F$.
Moment siły względem O:

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \frac{F_r}{r}\vec{r}\times\vec{r} = 0, \tag{7.64}$$

Czyli zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu:

$$\vec{K} = \vec{r}\times m\vec{v} = const \tag{7.65}$$

W polu centralnym płaszczyzna położenia $\vec{K}$ *jest stała*, zatem toru punktu B jest krzywą płaską.

Położenie punktu B wygodnie jest więc określić przy pomocy dwóch współrzędnych biegunowych *r* i φ jak na rysunku na poprzednim slajdzie, prędkość zaś rozkładamy na 2 składowe – podłużną i poprzeczną:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} \tag{7.66}$$

Gdzie

$$v_r = \frac{dr}{dt} \tag{7.67}$$

$$v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} \tag{7.68}$$

Ponieważ:

$$\vec{r} = r(\vec{\imath}cos\varphi + \vec{\jmath}sin\varphi) \tag{7.69}$$

$$\text{to } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}(\vec{\imath}cos\varphi + \vec{\jmath}sin\varphi) + \vec{r}\frac{d\varphi}{dt}(-\vec{\imath}sin\varphi + \vec{\jmath}cos\varphi) \tag{7.70}$$

Wektor jednostkowy $(\vec{\imath}cos\varphi + \vec{\jmath}sin\varphi)$ ma kierunek wektora $\vec{r}$, a $(-\vec{\imath}sin\varphi + \vec{\jmath}cos\varphi)$ jest prostopadły do $\vec{r}$.

Stąd pierwszy składnik w wyrażeniu na $\vec{v}$ ma znaczenie prędkości podłużnej a drugi poprzecznej. Ponadto:

$$\vec{K} = \vec{r} \times m\vec{v}_r + \vec{r} \times m\vec{v}_\varphi = \vec{r} \times m\vec{v}_\varphi \tag{7.71}$$

Ponieważ $\vec{v}_\varphi$ i $\vec{r}$ są prostopadłe, to $K = mr^2\frac{d\varphi}{dt} = const.$ (7.72)

Promień wodzący r przy obrocie o mały kąt φ zakreśla w czasie dt wycinek kołowy, którego pole powierzchni $dS = 1/2\ r^2\ d\varphi$. Stąd:

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} \tag{7.73}$$

nazywa się prędkością polową.

Zatem w polu siły centralnej prędkość polowa punktu jest stała:

$$\sigma = \frac{K}{2m} \tag{7.74}$$

Prawo to pierwotnie podał Kepler w odniesieniu do ruchu planet w naszym układzie słonecznym w polu grawitacyjnym Słońca. *Jest to II prawo Keplera*

Tor punktu materialnego wyznaczymy z zasady zachowania momentu pędu i zasady zachowania energii:

$$E = E_k + E_p = const. \tag{7.75}$$

przy czym energię kinetyczną na podstawie poprzednich związków można przedstawić jako:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{K}{mr}\right)^2\right] \tag{7.76}$$

Po podstawieniu tego wyrażenia do związku na *E* i rozwiązaniu tego równania ze względu na *dr/dt*

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p) - \left(\frac{K}{mr}\right)^2} \tag{7.77}$$

Korzystając z relacji $K = mr^2\frac{d\varphi}{dt}$ mamy $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{K}{mr^2}$ (7.78)

Stąd:

$$d\varphi = \frac{K/r^2}{\sqrt{2m\left(E - E_p\right) - \left(\frac{K}{r}\right)^2}}dr \tag{7.79}$$

$$\varphi = -\int \frac{d(K/r)}{\sqrt{2m\left(E - E_p\right) - \left(\frac{K}{r}\right)^2}} \tag{7.80}$$

Wyznaczenie tej całki wymaga znajomości zależności energii potencjalnej od r.
Praktycznie często mamy do czynienia z ruchem punktu materialnego w polu kulisto-symetrycznym sił centralnych dla którego:

$$E_p = \frac{\beta}{r} \tag{7.81}$$

gdzie β – stała.

Dla pola grawitacyjnego: $\beta = -kmM < 0$, podobna zależność obowiązuje w przypadku energii potencjalnej punktowego ładunku elektrycznego w polu innego ładunku punktowego.
Korzystając z ostatniego wzoru mamy:

$$\varphi = -\int \frac{d\left(\frac{K}{r}\right)}{\sqrt{2mE - 2\frac{m\beta}{r} - \left(\frac{K}{r}\right)^2}} = -\int \frac{d\left(\frac{K}{r} + \frac{m\beta}{K}\right)}{\sqrt{\left[2mE + \left(\frac{m\beta}{K}\right)^2\right] - \left(\frac{K}{r} + \frac{m\beta}{K}\right)^2}} \tag{7.82}$$

Przy oznaczeniach:

$$\frac{K}{r} + \frac{m\beta}{K} = x \tag{7.83}$$

$$2mE + \left(\frac{m\beta}{K}\right)^2 = a^2 \tag{7.84}$$

$$\varphi = -\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arccos\frac{x}{a} + \varphi_0 \tag{7.85}$$

mamy

$$\varphi = arccos\frac{\frac{K}{r} + \frac{m\beta}{K}}{\sqrt{2mE + \left(\frac{m\beta}{K}\right)^2}} \tag{7.86}$$

lub

$$r = \frac{K}{-\frac{m\beta}{K} + cos\varphi\sqrt{2mE + \left(\frac{m\beta}{K}\right)^2}} \tag{7.87}$$

Jeśli punkt B jest przyciągany do środka sił, to β < 0 i równanie jego toru można przedstawić w postaci:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \tag{7.88}$$

gdzie $p = \frac{K^2}{m|\beta|}$ (parametr ogniskowy) (7.89)

i $e = \sqrt{\frac{2EK^2}{m\beta^2} + 1}$ (mimośród) (7.90)

1) orbita eliptyczna (e < 1) przy E < 0
2) orbita paraboliczna (e = 1) przy E = 0
3) orbita hiperboliczna (e > 1) przy E > 0
4) tor prostoliniowy, przechodzący przez środek sił (p = 0, e = 1) przy K = 0

W przypadkach 1-3 środek sił – w ognisku orbity.
Dla planet w polu grawitacyjnym Słońca E < 0 i mamy ***I prawo Keplera***:
Wszystkie planety Układu Słonecznego poruszają się po torach eliptycznych, w jednym z ognisk tych elips znajduje się Słońce.
Na podstawie ***II prawa Keplera*** prędkość polowa każdej planety jest stała i okres obiegu:

$$T = \frac{S}{\sigma} \tag{7.91}$$

Pole elipsy $S = \pi ab$ zaś $b = a\sqrt{1 - e^2}$ oraz $p = a(1 - e^2)$ i z ***II prawa Keplera*** mamy:

$$T^2 = \frac{\pi^2 p}{K^2/4m^2} a^3 \text{ lub } T^2 = \frac{4\pi^2}{kM} a^3 \text{ – III prawo Keplera} \tag{7.92}$$

$$\text{bo } \; p = K^2/m|\beta| \text{ i } |\beta| = kmM \tag{7.93}$$

W przypadku ruchu punktu B w polu sił odpychających (kulisto- symetrycznych centralnych)
Równanie toru:

$$r = \frac{p}{-1 + e\cos\varphi} \tag{7.94}$$

Całkowita energia punktu jest dodatnia bo energia potencjalna jest dodatnia.

$$E = E_k + E_p > 0 \tag{7.95}$$

B porusza się po hiperboli lub prostej przechodzącej przez O.

gdzie $g = kM/r^2$ – przyspieszenie swobodnego spadku w odległości r od środka Ziemi.

I prędkość kosmiczna rośnie w miarę zmniejszania się promienia orbity a przy powierzchni Ziemi:

$$v_1^0 = \sqrt{g_0 R_0} = 7{,}9\ \frac{km}{s} \tag{7.99}$$

Jest to teoretycznie najmniejsza prędkość którą trzeba nadać ciału przy powierzchni Ziemi by dane ciało stało się satelitą Ziemi. W rzeczywistości ze względu na opory ruchu od atmosfery ta prędkość nie jest wystarczająca.

II prędkość kosmiczna – najmniejsza prędkość , którą należy nadać ciału by jego orbita w polu przyciągania Ziemi była paraboliczna, czyli by ciało mogło pokonać przyciąganie ziemskie i stać się satelitą Słońca.

Dla orbity parabolicznej $e = 1$ i $E = 0$:

$$\frac{mv_2^2}{2} + \frac{\beta}{r} = 0 \tag{7.100}$$

czyli

$$v_2 = \sqrt{-\frac{2\beta}{mr}} = \sqrt{2v_1} = \sqrt{2gr} \tag{7.101}$$

Przy powierzchni Ziemi

$$v_2^0 = 11{,}2\ \frac{km}{s} \tag{7.102}$$

Podobnie jak poprzednio obliczenie to pomija wpływ atmosfery, czyli rzeczywista II prędkość kosmiczna powinna być nieco większa.

Zadanie:

Posługując się pojęciem potencjału grawitacyjnego wyznaczyć wartości II prędkości kosmicznej dla a) Ziemi; b) Księżyca; c) Marsa w pobliżu ich powierzchni.

Dane: a) $M = 5.98 \times 10^{24}$ kg, $R = 6.37 \times 10^6$ m
b) $M = 7.36 \times 10^{22}$ kg, $R = 1.74 \times 10^6$ m
c) $M = 6.5 \times 10^{23}$ kg, $R = 3.39 \times 10^6$ m

Zakładamy, że wszystkie trzy obiekty są kuliste i że ich gęstość zależy tylko od odległości od środka. Wtedy potencjał: $V = -\frac{kM}{R}$

Energia potencjalna ciała o masie m na powierzchni: $E_p = \frac{kmM}{R}$

Energia potencjalna ciała o masie m w nieskończoności wynosi 0. Aby ciało przenieść do nieskończoności trzeba wykonać pracę $L = -E_p$

Praca ta jest wykonywana kosztem energii kinetycznej ciała m. Ciało m można wyprowadzić z zasięgu przyciągania ciała o masie M o ile $\frac{mv_0^2}{2} \geq \frac{kmM}{R}$. W przypadku równości uzyskamy wartość prędkości minimalnej (II prędkość kosmiczna) $v = \sqrt{\frac{2kM}{R}}$

a) Ziemia – 11.2 km/s
b) Księżyc – 2.38 km/s
c) Mars – 5.05 km/s

Zderzenie dwóch cząstek w polu sił centralnych

Rozpatrzmy zderzenie dwóch cząstek 1 i 2. Przyjmijmy układ odniesienia związany ze środkiem mas punktów 1 i 2 (układ środka mas). Ze względu na brak oddziaływań zewnętrznych środek mas porusza się jednostajnie i prostoliniowo. Układ środka mas jest więc inercyjny, w związku z tym ruch punktów 1 i 2 można opisać przy wykorzystaniu II zasady dynamiki Newtona:

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{7.103}$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{7.104}$$

$\vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ – siła oddziaływania punktu 2 na 1, $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ – promienie wodzące.
Promień wodzący środka mas:

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{7.105}$$

czyli

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0 \tag{7.106}$$

Oznaczmy przez $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$ – promień wodzący łączący p. 1 i p.2. Wtedy:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{7.107}$$

oraz

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{7.108}$$

Podstawienie wyrażeń na te promienie wodzące do obu równań ruchu daje nam jedno następujące równanie:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(r) \tag{7.109}$$

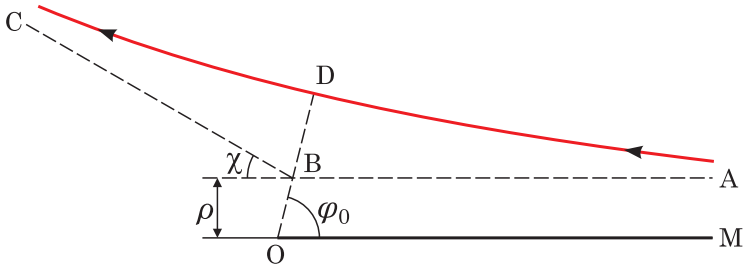
Gdzie *m* oznacza tzw. masę zredukowaną układu:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{7.110}$$

Wobec tego zagadnienie zderzenia dwóch cząstek w układzie środka masy sprowadza się do problemu ruchu jednej cząstki o masie zredukowanej *m*, przy czym ruch cząstki odbywa się w polu siły centralnej $\vec{F}(r)$, czyli do znanego zagadnienia.

Załóżmy teraz, że prędkość cząstki o masie *m* znacznie oddalonej od środka sił wynosi v_∞ i jest skierowana wzdłuż prostej AB znajdującej się w odległości ρ od O (ρ – parametr zderzenia).
W nieskończoności oczywiście $E_{p\infty}$ = 0 i całkowita energia:

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2} \tag{7.111}$$



oraz

$$K = mv_\infty\rho \tag{7.112}$$

Podczas ruchu cząstki w polu centralnym E i K pozostają stałe, stąd równanie toru we współrzędnych biegunowych *r* i φ ma postać:

$$\varphi = \int \frac{m v_\infty \rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2m\left(\frac{m v_\infty}{2} - E_p\right) - \left(\frac{m v_\infty \rho}{r}\right)^2}} \tag{7.113}$$

albo

$$\varphi = \int \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2}{m v_\infty^2} E_p}} \tag{7.114}$$

W przypadku pola grawitacyjnego lub elektrostatycznego pole centralne jest kulisto-symetryczne i energia potencjalna:

$$E_p = \frac{\beta}{r} \tag{7.115}$$

Całkowita energia cząstki $E = \frac{m v_\infty^2}{2} > 0$, stąd dla $\rho \neq 0$ cząstka porusza się po hiperboli.
Poprzedni rysunek przedstawia ruch cząstki w kulisto-symetrycznym polu sił odpychających. Punkt D na rysunku określa minimalna odległość OD do środka sił O. Położenie punktu D określa jego kąt biegunowy:

$$\varphi_0 = \int_\infty^{r_{min}} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\beta}{m v_\infty^2 r}}} \tag{7.116}$$

Aby znaleźć ten kąt trzeba wyznaczyć wartość r_{min} z górnej granicy całkowania.
Z ostatniego wzoru na φ:

$$d\varphi = \frac{\rho}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\beta}{m v_\infty^2 r}}} dr \tag{7.117}$$

r_{min} obliczamy wyznaczając ekstremum funkcji $r = r(\varphi)$, jak wiemy trzeba rozpatrzyć warunek $dr/d\varphi = 0$. Stąd:

$$\left(\frac{\rho}{r_{min}}\right)^2 + \frac{2\beta}{m v_\infty^2 \rho} \frac{\rho}{r_{min}} - 1 = 0 \tag{7.118}$$

czyli mamy równanie kwadratowe ze względu na $\frac{\rho}{r_{min}}$. Ponieważ sens fizyczny ma tylko przypadek $\frac{\rho}{r_{min}} > 0$, to uzyskujemy następujące rozwiązanie:

$$\frac{\rho}{r_{min}} = -\frac{\beta}{m v_\infty^2 \rho} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{m v_\infty^2 \rho}\right)^2 + 1} \tag{7.119}$$

Ponieważ

$$1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\beta}{m v_\infty^2 r} = 1 + \left(\frac{\beta}{m v_\infty^2 r}\right)^2 - \left(\frac{\rho}{r} + \frac{\beta}{m v_\infty^2 \rho}\right)^2 \tag{7.120}$$

i

$$\rho \frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{\rho}{r}\right) = -d\left(\frac{\rho}{r} + \frac{\beta}{m v_\infty^2 \rho}\right) \tag{7.121}$$

to

$$\varphi_0 = -\int_{\infty}^{r_{min}} \frac{d\left(\frac{\rho}{r}+\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right)^2-\left(\frac{\rho}{r}+\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}} =$$

$$= arccos\frac{\frac{\rho}{r}+\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}}\Bigg|_{\infty}^{v_{min}} =$$

$$= arccos\frac{\frac{\rho}{r_{min}}+\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}} - arccos\frac{\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}} \tag{7.122}$$

Wykonując podstawienie za $\frac{\rho}{r_{min}}$ z rozwiązania równania kwadratowego mamy:

$$\varphi_0 = arccos1 - arccos\frac{\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}} \tag{7.123}$$

Albo

$$-\varphi_0 = arccos\frac{\beta}{\sqrt{(mv_\infty^2\rho)^2+\beta^2}} \tag{7.124}$$

Ponieważ $\cos(-\varphi_0) = \cos(\varphi_0)$, to mamy:

$$cos\varphi_0 = \frac{\beta}{\sqrt{(mv_\infty^2\rho)^2+\beta^2}} \tag{7.125}$$

oraz

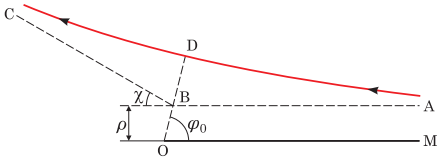
$$tg^2\varphi_0 = \frac{1-cos^2\varphi_0}{cos^2\varphi_0} = \left(\frac{mv_\infty^2\rho}{\beta}\right)^2 \tag{7.126}$$

Uzyskujemy więc następujący związek między parametrem zderzenia ρ oraz kątem φ_0:

$$\rho^2 = \frac{\beta^2}{m^2v_\infty^4}tg^2\varphi_0 \tag{7.127}$$

OD na ostatnim rysunku jest osią symetrii orbity cząstki, więc kąt między drugą asymptotą BC orbity i osią OD też wynosi φ_0: $\sphericalangle DBC = \sphericalangle ABD = \varphi_0$

Podsumowując – w wyniku ruchu cząstki następuje w rozpatrywanym przypadku zmiana kierunku prędkości o kąt $\chi = \pi - 2\varphi_0$ co pozwala zapisać znaleziony związek jako:



$$\rho^2 = \frac{\beta^2}{m^2v_\infty^4}ctg^2\frac{\chi}{2} \tag{7.128}$$

Rozpraszanie cząstek na nieruchomym centrum sił

Rozważmy często spotykane zagadnienie odchylania wiązki cząstek w polu centralnym kulisto-symetrycznym. Dla uproszczenia założymy, że wszystkie cząstki w wiązce mają jednakową prędkość i że wzajemnie na siebie nie oddziałują.

Przywołane zjawisko odchylania wiązki cząstek w polu nazywa się rozpraszaniem cząstek na centrum rozpraszającym. Kąt odchylenia cząstek wiązki χ zależy od parametru zderzenia ρ, który dla różnych cząstek wiązki może być inny.

Wiązka jest jednorodna, gdy liczba cząstek n przecinająca w jednostce czasu jednostkową powierzchnię przekroju poprzecznego wiązki (czyli gęstość wiązki) jest jednakowa w całym przekroju.

Proces rozpraszania charakteryzujemy poprzez różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie:

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \tag{7.129}$$

dN – liczba cząstek rozproszonych w jednostce czasu w kątach od χ do $\chi+d\chi$. Warunek ten jest spełniony przez cząstki dla których parametr zderzenia jest z przedziału $<\rho; \rho+d\rho>$ czyli:

$$dN = n2\pi\rho d\rho \tag{7.130}$$

Przy czym

$$2\rho d\rho = -\frac{\beta^2}{m^2 v_\infty^4} ctg\frac{\chi}{2}\frac{d\chi}{sin^2\frac{\chi}{2}} = -\frac{\beta^2}{m^2 v_\infty^4}\frac{cos\frac{\chi}{2}}{sin^3\frac{\chi}{2}}d\chi \tag{7.131}$$

Zwróćmy uwagę, że $d\rho/d\chi<0$ (zmniejszenie parametru zderzenia – zwiększenie kąta rozproszenia) oraz $dN > 0$ i $d\sigma > 0$. Stąd:

$$d\sigma = 2\pi\rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\chi = \frac{\pi\beta^2}{m^2 v_\infty^4}\frac{cos\frac{\chi}{2}}{sin^3\frac{\chi}{2}}d\chi \tag{7.132}$$

Różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie często odnosi się nie do kąta płaskiego $d\chi$ a do odpowiedniego przestrzennego kata (kąta bryłowego). Kąt bryłowy :

$$\omega = \frac{S}{R^2} \tag{7.133}$$

(z kuli o promieniu R wycinamy kulistą powierzchnię S)

Rozproszeniu pod kątem χ odpowiada powierzchnia stożkowa, której kąt rozwarcia wynosi 2χ zaś pole powierzchni

$$S = 4\pi R^2 sin^2\frac{\chi}{2} \tag{7.134}$$

i kąt bryłowy:

$$\omega = 4\pi sin^2\frac{\chi}{2} \tag{7.135}$$

Podsumowując rozproszeniu w kącie płaskim $<\chi; \chi + d\chi>$ odpowiada

$$d\omega = 4\pi sin\frac{\chi}{2}cos\frac{\chi}{2}d\chi \tag{7.136}$$

Co po podstawieniu do wzoru na $d\sigma$ daje:

$$d\sigma = \left(\frac{\beta}{2mv_\infty^2}\right)^2 \frac{d\omega}{sin^4\frac{\chi}{2}} \tag{7.137}$$

Jest to znany wzór Rutherforda.

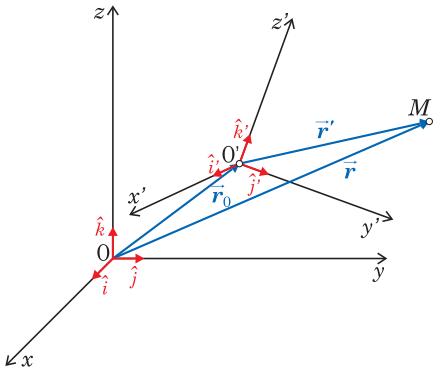
Ruch w nieinercyjnych układach odniesienia

Kinematyka ruch względnego.

W wielu przypadkach konieczne jest badanie właściwości ruchu ciał w układach nieinercyjnych, np. ruch ciał na Ziemi w układzie odniesienia związanym z Ziemią nie jest dokładnie inercyjny.

Bez uwzględnienia nieinercjalności układu odniesienia nie można wyjaśnić wielu zjawisk np. doświadczenia z wahadłem Foucault, odchylania spadających ciał na wschód czy podmywania tylko jednego z brzegów rzek płynących wzdłuż południków.

Rozważmy najpierw ruch punktu materialnego M względem dwóch układów odniesienia, z których pierwszy jest inercyjny a drugi porusza się dowolnie względem niego. Układ 1 przyjmiemy za nieruchomy a ruch M względem tego układu 1 nazwiemy ruchem bezwzględnym, zaś względem układu 2 ruchem względnym. Z rysunku poniżej wynika, że:



$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \tag{8.1}$$

$$\vec{r}' = x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}' \tag{8.2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \tag{8.3}$$

Prędkość bezwzględna punktu M względem nieruchomego inercyjnego układu współrzędnych:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{8.4}$$

lub

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \tag{8.5}$$

lub

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \left(\frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right) + \left(x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) \tag{8.6}$$

przy czym

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt} \tag{8.7}$$

Jest prędkością bezwzględną punktu O', czyli prędkością poruszającego się układu współrzędnych.

$$\vec{v}_w = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' \tag{8.8}$$

jest prędkością względną punktu M (względem ruchomego układu współrzędnych).

Zmiana orientacji wektorów $\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}'$ oznacza, że ruch ruchomego układu współrzędnych może być i postępowy i obrotowy wokół punktu O'. Zatem $\frac{d\vec{\imath}'}{dt}, \frac{d\vec{\jmath}'}{dt}, \frac{d\vec{k}'}{dt}$ to liniowe prędkości końców odpowiednich wersorów w tak rozumianym ruchu obrotowym.

Niech ω – prędkość kątowa obrotu ruchomego układu, wtedy:

$$\frac{d\vec{\imath}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\imath}', \quad \frac{d\vec{\jmath}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\jmath}', \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times k' \tag{8.9}$$

oraz

$$x' \frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y' \frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} = \tag{8.10}$$

$$= \vec{\omega} \times x'\vec{\imath}' + \vec{\omega} \times y'\vec{\jmath}' + \vec{\omega} \times z'\vec{k}' = \tag{8.11}$$

$$= \vec{\omega} \times \left(x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'\right) = \tag{8.12}$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{8.13}$$

Uwzględniając ostatnie relacje równanie (8.6) przyjmuje postać:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}_w \tag{8.14}$$

Sumę pierwszych dwóch wyrazów nazywa się często prędkością unoszenia punktu M:

$$\vec{v}_u = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{8.15}$$

Zatem prędkość bezwzględna punktu M:

$$\vec{v} = \vec{v}_u + \vec{v}_w \tag{8.16}$$

Przyspieszenie bezwzględne punktu M to przyspieszenie względem nieruchomego inercyjnego układu odniesienia:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{8.17}$$

lub:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_0}{dt} \tag{8.18}$$

lub:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\epsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}_w + \vec{a}_w \tag{8.19}$$

Przy czym:

$$\vec{a}_0 = \frac{d\vec{v}_0}{dt} \tag{8.20}$$

oznacza ruchu postępowego układu ruchomego zaś

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{8.21}$$

Jest przyspieszeniem kątowym w ruchu obrotowym tego układu.

Natomiast :

$$\vec{a}_w = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{\imath}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{\jmath}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}' \tag{8.22}$$

oznacza przyspieszenie względne punktu M (przyspieszenie M względem ruchomego układu).

Ze względu na to, że:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}_w \tag{8.23}$$

Można zapisać wyrażenie (8.19) w postaci:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\epsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_w) + \vec{a}_w \tag{8.24}$$

albo też jako:

$$\vec{a} = \vec{a}_u + \vec{a}_C + \vec{a}_w \tag{8.25}$$

gdzie

$$\vec{a}_u = \vec{a}_0 + \vec{\epsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \tag{8.26}$$

nazywa się przyspieszeniem unoszenia punktu M.

$$\vec{a}_C = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_w) \tag{8.27}$$

nazywamy **przyspieszeniem Coriolisa** – jest ono spowodowane obrotem ruchomego układu.

Przyspieszenie Coriolisa jest maksymalne, gdy prędkość względna punktu jest prostopadła do prędkości kątowej układu ruchomego, a jest zerowe, gdy oba wektory są równoległe.

W szczególnym przypadku, gdy oba układy ruchomy i nieruchomy są inercyjne, otrzymujemy następujące proste zależności:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_w \text{ oraz } \vec{a} = \vec{a}_w = \frac{d\vec{v}_w}{dt} \tag{8.28}$$

Natomiast, gdy układ ruchomy porusza się tylko ruchem postępowym:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_w \text{ oraz } \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_w = \vec{a}_0 + \frac{d\vec{v}_w}{dt} \tag{8.29}$$

Siły bezwładności

Przyspieszenie punktu materialnego względem nieinercyjnego układu odniesienia nie spełnia II zasady dynamiki:

$$\vec{a}_w \neq \frac{\vec{F}}{m} \tag{8.30}$$

W szczególności, dla $\vec{F} = 0$ $\vec{a}_w \neq 0$. Punkt materialny może więc w tym przypadku zmieniać stan ruchu względem nieinercyjnego układu odniesienia bez działania innych ciał.

Przykład: *zachowanie stojącego człowieka przyspieszającym (odchylenie przeciwne do ruchu) albo zwalniającym (odchylenie w kierunku ruchu) pociągu. Podobnie na zakręcie – odchylenie w stronę przeciwną do środka krzywizny toru*.

W celu określenia przyspieszenia względnego $\vec{a}_w$ posłużymy się wprowadzonymi wcześniej relacjami:

$$\vec{a}_w = \vec{a} - \vec{a}_u - \vec{a}_C \tag{8.31}$$

Skąd mamy:

$$m\vec{a}_w = m\vec{a} - m\vec{a}_u - m\vec{a}_C \tag{8.32}$$

m – masa punktu materialnego.

Ponieważ $\vec{a}$ – przyspieszenie punktu materialnego względem inercyjnego układu odniesienia, to

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{8.33}$$

$\vec{F}$ – wypadkowa wszystkich sił działających na punkt materialny. Stąd:

$$m\vec{a}_w = \vec{F} - m\vec{a}_u - m\vec{a}_C \tag{8.34}$$

lub

$$m\vec{a}_w = \vec{F} + \vec{F}_u + \vec{F}_C \tag{8.35}$$

Gdzie $\vec{F}_u = -m\vec{a}_u, \vec{F}_C = -m\vec{a}_C$ nazywa się odpowiednio siłą bezwładności unoszenia i siłą bezwładności Coriolisa.

Siły bezwładności można zmierzyć – są to siły rzeczywiste. Nie można jednak wskazać od jakich ciał one pochodzą. Wobec tego nie można do nich stosować III zasady dynamiki Newtona.

$\vec{F}_u$ oraz $\vec{F}_C$ uwarunkowane są tylko nieinercyjnością układu odniesienia – wprowadzenie takich „sił" bezwładności do równania ruchu względnego punktu materialnego pozwala nadać temu równaniu postać odpowiadającą II zasadzie dynamiki Newtona.

Ponieważ siły bezwładności są siłami zewnętrznymi dla każdego ciała należącego do danego układu, to w układach nieinercyjnych zasady zachowania pędu, momentu pędu i energii nie mają zastosowania.

Przykłady układów nieinercyjnych:

Układ porusza się ruchem postępowym z przyspieszeniem $\vec{a}_0$. W tym przypadku przyspieszenie $\vec{a}_u = \vec{a}_0$ zaś przyspieszenie $\vec{a}_C = 0$ i na punkt materialny działa tylko siła bezwładności unoszenia:

$$\vec{F}_u = -m\vec{a}_0 \tag{8.36}$$

Jeżeli zaniedbujemy wpływ obrotu dobowego Ziemi, to przykładem takiego układu odniesienia jest winda poruszająca się z pionowo z pewnym przyspieszeniem. Do sufitu windy przymocujemy dynamometr z zawieszoną masą *m*. Chcemy wyznaczyć siłę działającą na dynamometr oraz przyspieszenie masy *m* po odczepieniu od dynamometru.

Rozpatrzmy 2 układy: ruchomy związany z windą i nieruchomy z Ziemią.

Obserwator nieruchomy widzi to tak:

Na ciało działają 2 siły przeciwnie skierowane: ciężar *P* i reakcja dynamometru *R*.

Z II zasady dynamiki:

$$m\overrightarrow{a_0} = m\vec{g} + \vec{R} \tag{8.37}$$

Siła działająca na dynamometr oczywiście:

$$\vec{T} = -\vec{R} \tag{8.38}$$

czyli

$$\vec{T} = m(\vec{g} - \overrightarrow{a_0}) \tag{8.39}$$

Przerwanie połączenia ciała z dynamometrem oznacza swobodny spadek ciała z przyspieszeniem:

$$\vec{a} = \frac{\vec{P}}{m} = \vec{g} \tag{8.40}$$

Obserwator ruchomy (w windzie) widzi to tak:

Zawieszone ciało jest nieruchome przy czym na ciało działają 3 siły: $m\vec{g}$, $\vec{R}$ i $\vec{F}_u$.

Ze względu na spoczynek ciała przyspieszenie względne nie występuje i:

$$\vec{P} + \vec{R} + \overrightarrow{F_u} = 0 \tag{8.41}$$

lub

$$m\vec{g} + \vec{R} - m\overrightarrow{a_0} = 0 \tag{8.42}$$

Na *T* uzyskujemy więc to samo wyrażenie!

$$\vec{T} = -\vec{R} = m(\vec{g} - \vec{a}_0) \tag{8.43}$$

Ciało uwolnione od dynamometru porusza się w wyniku działania tylko 2 sił, stąd:

$$\vec{a}_w = \frac{\vec{P} + \vec{F}_u}{m} = \vec{g} - \vec{a}_0 \tag{8.44}$$

Inny przykład:

Układ obraca się ze stałą prędkością kątową i wykonuje jednostajny ruch postępowy.

Zatem $\vec{a}_0$ = 0 i $\vec{\varepsilon}$ =0, stąd przyspieszenie unoszenia i Coriolisa :

$$\vec{a}_u = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \tag{8.45}$$

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_w) \tag{8.46}$$

Liczbowa wartość przyspieszenia unoszenia:

$$a_0 = \omega|\vec{\omega} \times \vec{r}'| = \omega^2 r'|sin\alpha| = \omega^2 \rho \tag{8.47}$$

ρ – odległość punktu od osi obrotu układu odniesienia. $\vec{a}_u$ jest prostopadły do tej osi i skierowany od punktu materialnego do osi. Zatem $\vec{a}_u$ jest przyspieszeniem dośrodkowym.

Siła bezwładności unoszenia: $\vec{F}_u = -m\vec{a}_u = -m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')]$ jest więc odśrodkowa, a jej wartość: $m\omega^2\rho$.

$\vec{F}_u$ jest więc odśrodkową siłą bezwładności.

Różnica między ciężarem ciała a siłą przyciągania przez Ziemię związana jest z istnieniem siły odśrodkowej bezwładności:

$$\vec{P} = \vec{F} + \vec{F}_u \tag{8.48}$$

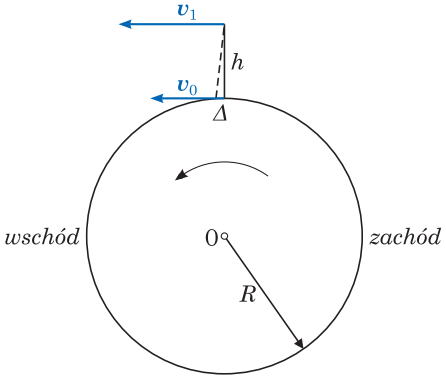
Wprowadzając ciężar ciała zamiast $\vec{F}$ zaniedbujemy nieinercyjność ziemskiego układu odniesienia.

Kolejny przykład – na nieinercyjność ziemskiego układu odniesienia:

Ciało spadające z dużej wysokości odchyla się od pionu na wschód. Wielkość odchylenia zależy od wysokości spadku oraz szerokości geograficznej.

Rozważmy przypadek największego odchylenia – obserwuje się je na równiku oraz zerowe odchylenie – na biegunach.

Obserwator nieruchomy (układ inercyjny): na swobodnie spadające ciało działa tylko siła $\vec{F}$, z jaką Ziemia przyciąga to ciało. Ta siła nadaje ciału przyspieszenie skierowane do środka Ziemi. Zatem $\vec{F}$ nie zmienia liczbowej wartości prędkości liniowej ciała w jego obrocie wraz z Ziemią



(ciało przy spadaniu zachowuje wartość v_1 tej prędkości – rysunek obok).

Jednocześnie prędkość liniowa v_0 przy powierzchni Ziemi jest mniejsza niż v_1:

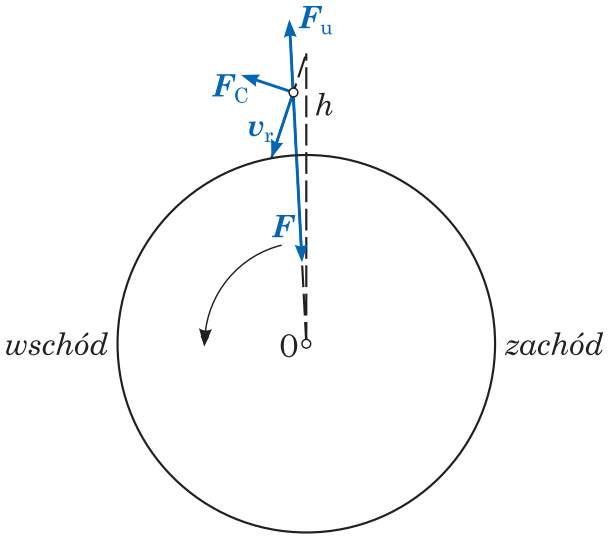
$$v_1 - v_0 = \omega(R + h) - \omega R = \omega h \tag{8.49}$$

Stąd widać już, że punkt spadku ciała na Ziemię będzie przesunięty w kierunku obrotu Ziemi (czyli na wschód) względem punktu zrzutu ciała.

Obserwator ruchomy:

Na ciało oprócz siły $\vec{F}$ przyciągania ziemskiego działają siły bezwładności: odśrodkowa i Coriolisa. Siła przyciągania jest skierowana oczywiście ku środkowi Ziemi, a odśrodkowa antyrównolegle do niej (od środka Ziemi). Gdyby działały tylko te dwie siły, to ich wypadkowa powodowałaby dokładnie pionowy spadek ciała. Jednak trzecia siła Coriolisa jest prostopadła do prędkości spadku i powoduje zakrzywienie toru w kierunku wschodnim (rysunek):

$$\overrightarrow{F_C} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_w) \tag{8.50}$$

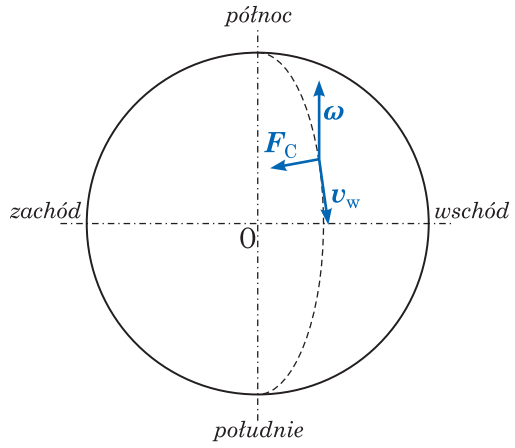


Na biegunach z kolei zakrzywienie toru nie występuje, ponieważ wektory $\vec{\omega}$ i $\vec{v}_w$ są skierowane wzdłuż osi obrotu Ziemi i siła Coriolisa jest równa 0.

Inny przykład:
rzeki płynące wzdłuż południków podmywają znacznie bardziej jeden brzeg – prawy względem kierunku przepływu na półkuli północnej , zaś lewy na południowej.
Rzeki północnej półkuli płynące z północy na południe zawsze podmywają brzeg zachodni.

Obserwator nieruchomy:
Wartość prędkości liniowych punktów powierzchni Ziemi w obrocie dobowym zależy od szerokości geograficznej:

$$v = v_{równ} cos\varphi \tag{8.51}$$



Dlatego woda płynąca z północy na południe ma coraz większą prędkość liniową v. Ponieważ ta prędkość jest skierowana z zachodu na wschód, więc zwiększenie prędkości może odbywać się tylko na skutek oddziaływania cząstek wody i zachodniego brzegu rzeki, co tłumaczy jego podmywanie.

Obserwator ruchomy:
Na cząstki wody płynące z północy na południe z prędkością względną $\overrightarrow{v_w}$ działają siły bezwładności Coriolisa skierowane ze wschodu na zachód (rysunek).

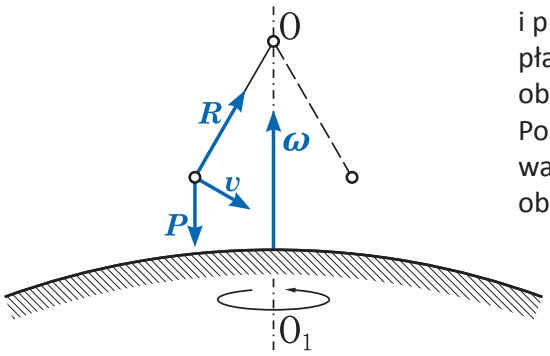
Dlatego cząstki wody odchylają się w tym kierunku podmywając zachodni brzeg rzeki.

Kolejny przykład:
Doświadczenie z wahadłem Foucault.
Jest to ciężkie symetryczne ciało zawieszone na długim sznurze. Okazuje się, że płaszczyzna wahań zmienia w czasie swoje położenie względem ziemskiego układu odniesienia.
Prędkość obrotu tej płaszczyzny zależy od szerokości geograficznej Ω miejsca obserwacji: największa jest na biegunach a zerowa na równiku:

$$\Omega = \omega sin\varphi \tag{8.52}$$

ω – prędkość kątowa dobowego obrotu Ziemi.

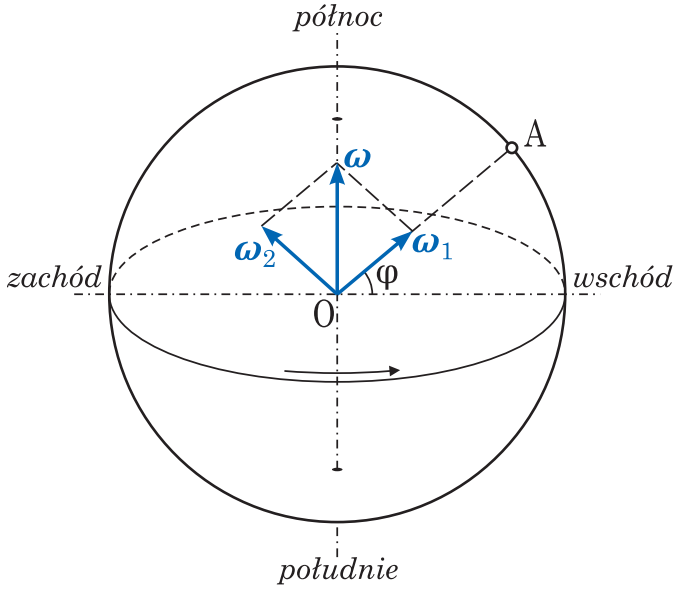
Obserwator nieruchomy:
Załóżmy, że wahadło początkowo znajduje się na biegunie północnym (rysunek):



Na wahadło działają dwie siły: przyciągania ziemskiego i przeciwdziałania nici R. Obydwie siły leżą w płaszczyźnie pionowej wahań przechodzącej przez oś obrotu Ziemi i punkt początkowego wychylenia. Ponieważ żadne inne siły nie działają, to płaszczyzna wahań pozostaje stała względem nieruchomego obserwatora.

Jednocześnie dowolna płaszczyzna pionowa związana z Ziemią obraca się z zachodu na wschód z prędkością kątową ω dobowego obrotu Ziemi. Tak więc płaszczyzna wahań obraca się względem ziemskiego układu odniesienia z prędkością kątową $\boldsymbol{\Omega = -\omega}$ **(**ze wschodu na zachód).

Załóżmy teraz , że wahadło znajduje się w dowolnym miejscu. (rysunek poniżej)



Na wahadło działają ponownie dwie siły:
- przyciąganie ziemskie i
- przeciwdziałanie nici,

które leżą płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez AO.

ω rozkładamy na dwie składowe.

Dla szerokości geograficznej φ:

$$\omega_1 = \omega sin\varphi$$
$$\omega_2 = \omega cos\varphi$$

obrót z prędkością kątową ω_2 wywołuje przesunięcie punktu zawieszenia wahadła, czyli obrócenie się pionu OA i płaszczyzny wahań.
Natomiast obrót Ziemi z prędkością ω_1 wpływa na wahadło umieszczone w punkcie A tak samo jak obrót z prędkością kątową ω_2 wpływa na wahadło na biegunie.

Stąd płaszczyzna wahań obraca się względem ziemskiego układu odniesienia z prędkością kątową $\vec{\Omega} = -\vec{\omega}_1$ albo $\Omega = \omega_1 = \omega \cdot sin\varphi$.

Obserwator ruchomy:
Obrót płaszczyzny wahań wahadła zachodzi w wyniku działania sił bezwładności Coriolisa prostopadłych do tej płaszczyzny:

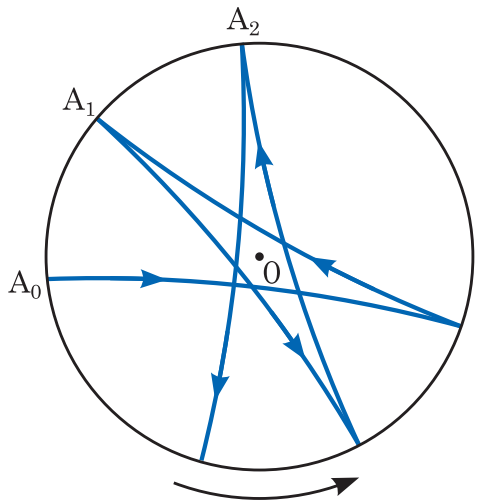
$$\vec{F}_C = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_w) \tag{8.53}$$

m – masa wahadła, $\vec{v}_w$– prędkość ruchu wahadła względem Ziemi.

Dla małej amplitudy wahań tor jest w przybliżeniu linią poziomą, czyli $\vec{v}_w$ jest prostopadła do OA.

Stąd:

$$F_C = 2m\omega_1 v_w = 2m\omega v_w sin\varphi \tag{8.54}$$



Siła Coriolisa powoduje zakrzywienie toru wahadła. Przykładowy tor wahadła na biegunie północnym pokazuje rysunek. Zakrzywienie toru wahadła wpływa na to, że punkty A_0, A_1, A_2 … są różne.

Zasada równoważności:
Ruch ciała względem nieinercyjnego układu odniesienia jest równoważny jego ruchowi względem układu inercyjnego.
Ruch ten zachodzi pod wpływem wszystkich ciał współdziałających z danym ciałem oraz pewnego pola ciążenia.
Zasada równoważności NIE oznacza identyczności sił bezwładności i grawitacyjnych.

Zadanie do wykonania:
Ciało spada swobodnie na Ziemię z wysokości:
a) 100
b) 10000 m.
Wyznaczyć odchylenie ciała na wschód pod wpływem siły bezwładności Coriolisa, wywołanej obrotem Ziemi. Szerokość geograficzna spadania wynosi 45 stopni.

$$\vec{F}_C = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_w) \tag{8.55}$$

$$F_C = 2m\omega gt\cdot\cos\varphi, \text{ skąd } a_C = 2\omega gt\cdot\cos\varphi \tag{8.56}$$

czyli po scałkowaniu:

$$v = \omega gt^2\cdot\cos\varphi + C \tag{8.57}$$

$$s = \tfrac{1}{3}\omega gt^3\cdot\cos\varphi + C\cdot t + D \tag{8.58}$$

Dla $t = 0$ $v = 0$, $s = 0$, stąd stałe $C = 0$ $D = 0$ i

$$s = \tfrac{1}{3}\omega gt^3\cdot\cos\varphi \tag{8.59}$$

Czas swobodnego spadku:

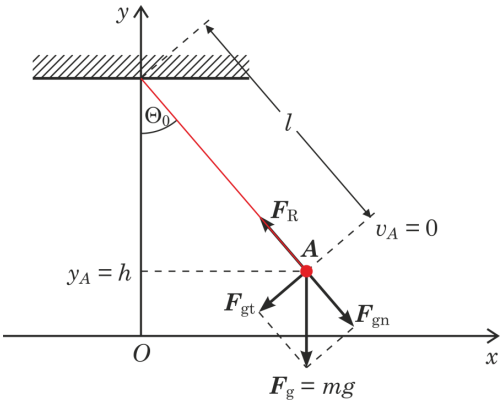
$$T = (2h/g)^{1/2} \tag{8.60}$$

stąd odchylenie na wschód $s = \tfrac{2}{3}\omega ht\cdot\cos\varphi.$ (8.61)

Wahadło matematyczne

Rozważmy ruch małej kulki o masie m zawieszonej na sprężystej nici o długości l, przy czym zaniedbujemy masę nici.
Θ – kąt wychylenia kulki z położenia równowagi,
Θ_0 – maksymalny kąt wychylenia (amplituda kątowa).
Na kulkę działa siła ciężkości mg oraz siła reakcji nici F_{R} .

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \tag{9.01}$$



Równanie ruchu dla dowolnego wychylenia:

$$F_R - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{l} \tag{9.02}$$

gdzie $mg\cos\theta$ – składowa siły ciężkości wzdłuż nici

zaś $\frac{mv^2}{l}$ - siła dośrodkowa działająca na kulkę

$$E_p(\theta_0) = mgh = mgl(1-\cos\theta_0) \tag{9.03}$$

Wyraźmy v w funkcji θ. Dla $y = 0$ mamy $\mathrm{E_p}(\theta{=}0) = 0$

Dla dowolnego położenia B o kącie $\theta < \theta_0$

$$E_p(\theta) = mgy_b = mgl(1-\cos\theta), \qquad E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2(d\theta/dt)^2 \tag{9.04}$$

$$E_A = (E_k + E_p)_A = E_p(\theta_0) = mg(1-\cos\theta_0) = E_B = (E_k + E_p)_B = mgl(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$skąd\ v^2 = l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2gl(cos\theta - cos\theta_0) \tag{9.05}$$

Zatem siła reakcji:

$$F_R = mg\cos\theta + 2mg(\cos\theta - \cos\theta_0) = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0) \tag{9.06}$$

Znajdziemy teraz okres drgań wahadła posługując się zasadą zachowania energii.
Ze wzoru na prędkość dostajemy:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)} \tag{9.07}$$

a stąd:

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{cos\theta - cos\theta_0}} \tag{9.08}$$

Z ostatniego rysunku wynika, że okres wahań T otrzymamy po scałkowaniu tego wyrażenia w granicach od 0 do θ_0 i pomnożeniu przez 4:

$$T = \int_0^T dt = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} \tag{9.09}$$

W powyższym wzorze występuje tzw. *całka eliptyczna pierwszego rodzaju*:

$$\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{cos\theta - cos\theta_0}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \ldots\right) \tag{9.10}$$

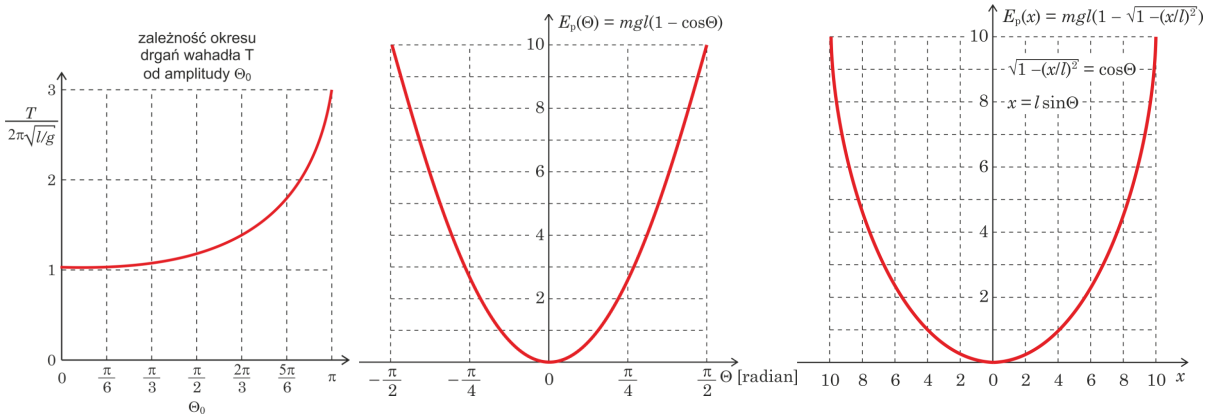
Tak więc

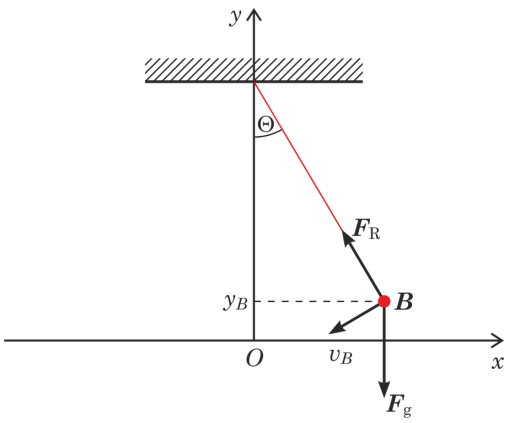
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \ldots\right) \tag{9.11}$$

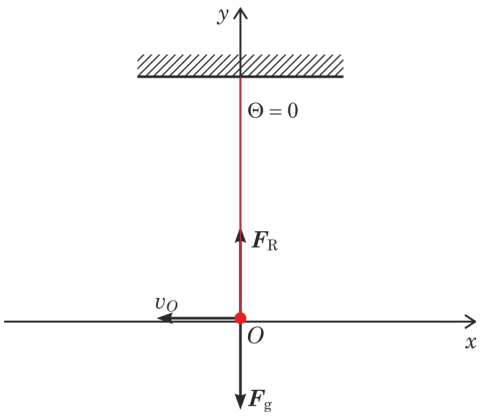
Zatem dobrze znany wzór na okres wahań wahadła matematycznego:

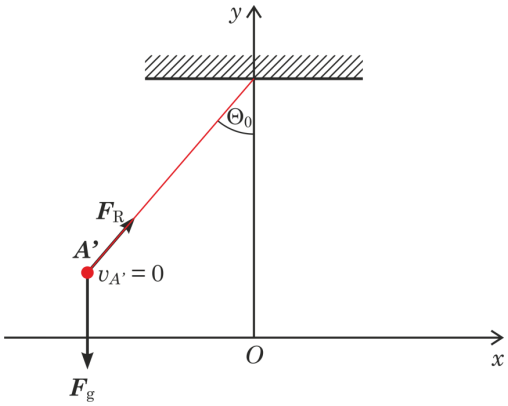
$$T = 2\pi\sqrt{l/g} \tag{9.12}$$

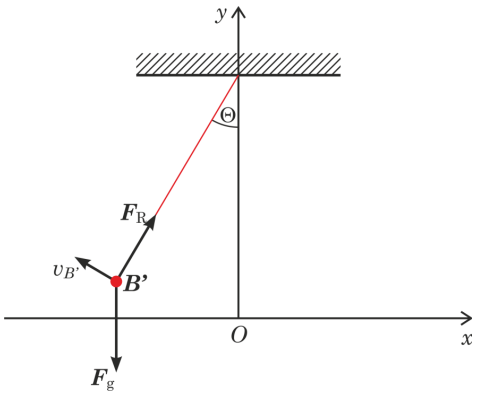
jest najprostszym przybliżeniem wzoru ogólnego obowiązującego dla dowolnych wychyleń z położenia równowagi. Poprawka wynikająca ze wzoru ogólnego nie przekracza 1% dla kątów mniejszych niż 23 stopnie. Zależność okresu drgań od amplitudy θ_0 przedstawia rysunek po lewej stronie. Pośrodku i po prawej – wykresy energii potencjalnej od kąta wychylenia oraz x.





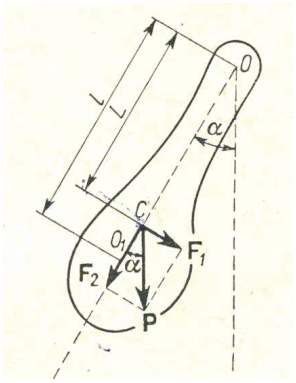


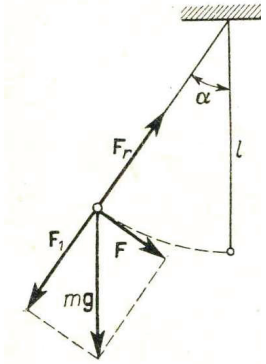




Wahadło fizyczne

Rozpatrzmy niewielkie wychylenia z położenia równowagi wahadła fizycznego.
Wahadło fizyczne jest to ciało doskonale sztywne , które pod wpływem własnego ciężaru waha się dookoła osi poziomej O nie przechodzącej przez środek ciężkości. Rysunek poniżej przedstawia przekrój poprzeczny wahadła fizycznego. Oś obrotu O, środek masy C, OC=L.
Niech wahadło będzie odchylone z położenia równowagi o kąt α.





$$-mgL\alpha = J\frac{d^2\alpha}{dt^2} \tag{9.13}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}} \tag{9.14}$$

Długość zredukowana wahadła fizycznego – długość takiego wahadła matematycznego, które ma taki sam okres wahań jak fizyczne.

$$2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{9.15}$$

czyli

$$l = \frac{J}{mL} \tag{9.16}$$

Ze wzoru Steinera:

$$J = J_C + mL^2 \tag{9.17}$$

Gdzie J_C moment bezwładności wahadła względem osi przechodzącej przez środek masy wahadła i równoległej do osi wahań *O*. Zatem:

$$l = \frac{J_C + mL^2}{mL} = \frac{J_C}{mL} + L \tag{9.18}$$

Stąd widać, że l >L.
Punkt O_1 nazywa się środkiem wahań wahadła.

Ruch drgający harmoniczny

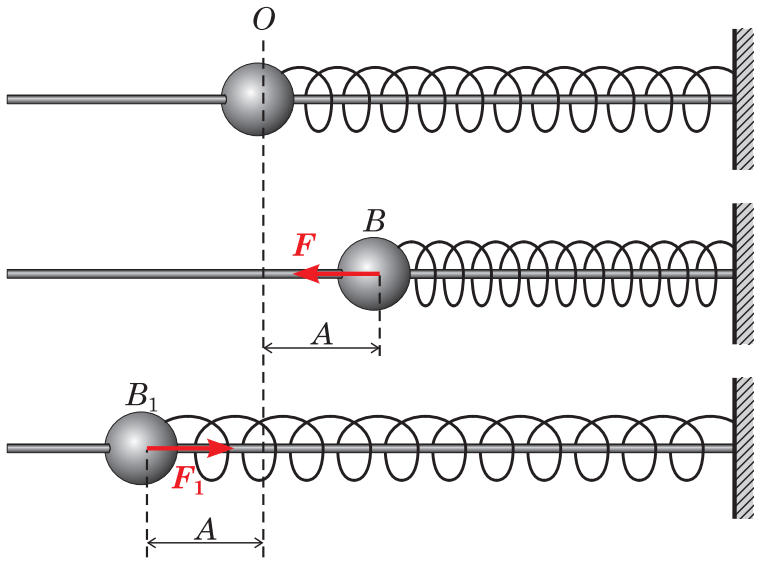
Drgania nazywamy harmonicznymi, jeśli :

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \tag{10.01}$$

lub

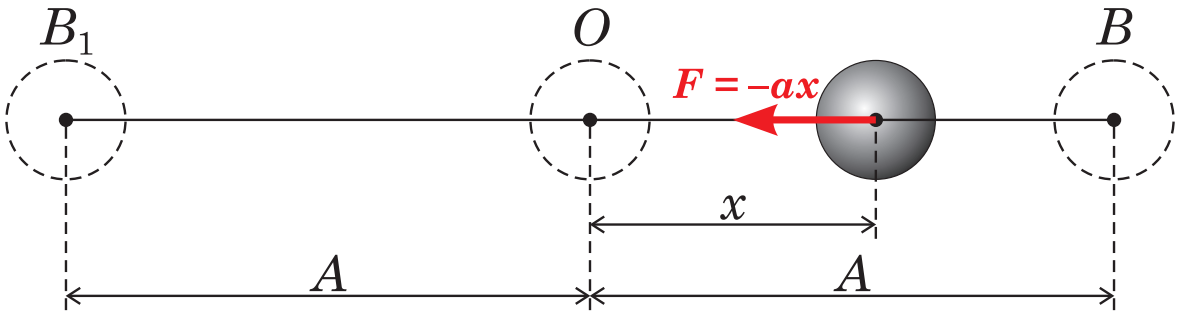
$$x = A\cos(\omega t + \varphi_{1)} \tag{10.02}$$

Rozpatrzmy drgania pod działaniem siły sprężystej jak na rysunku:



$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{x} \tag{10.03}$$

Wykażemy, że swobodne drgania niegasnące mają charakter drgań harmonicznych, w tym celu rozpatrzmy kulę wahadła sprężynowego jak na rysunku:



Całkowita energia wahadła w położeniu x jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej w polu ciężkości. W położeniu B energia kinetyczna jest 0. Zgodnie z zasadą zachowania energii:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + E_{ciężk} = \frac{kA^2}{2} + E'_{ciężk}, \tag{10.04}$$

Sprężyna drga w poziomie, więc $E_{ciężk} = E'_{ciężk}$. Zatem:

$$v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2) \tag{10.05}$$

a stąd:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} \tag{10.06}$$

lub też:

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,dt \tag{10.07}$$

Po scałkowaniu wyznaczymy wychylenie x jako funkcję t. Masa m i współczynnik sprężystości k są stałe dla danego wahadła sprężynowego , zatem:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 + x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \int dt \tag{10.08}$$

Przy A = const dostaniemy:

$$arc\sin\frac{x}{A} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_0 \tag{10.09}$$

φ_0 – stała całkowania

Dla przypadku t = 0 przyjmijmy x = 0, wtedy φ_0= 0 i dostaniemy:

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \tag{10.10}$$

Jeśli natomiast t = 0 przy x = A, to φ_0 = π/2 i dostaniemy:

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \tag{10.11}$$

Jeśli w końcu przyjmiemy t = 0 przy $x = A\sqrt{3}/2$ to φ_0 = π/3 i mamy:

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - \frac{\pi}{6}\right) \tag{10.12}$$

W ogólności jak widać mamy:

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_0\right) \tag{10.13}$$

lub

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_1\right) \tag{10.14}$$

gdzie $\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$, gdyż wtedy:

$$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_1\right) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_0\right) \tag{10.15}$$

i oba ostatnie wyrażenia na x są równoważne. Wyrażenia te są identyczne z pokazanymi na początku wykładu dla $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Oznacza to, że drgania swobodne niegasnące wahadła sprężynowego są harmoniczne.

A równe maksymalnemu wychyleniu z położenia równowagi nazywa się amplitudą drgań.
A nie zależy tu od czasu. Wyrażenie (argument funkcji sin):

$$\phi = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0 \tag{10.16}$$

nazywa się fazą drgań. W chwili początkowej faza drgań wynosi φ_0. Fazę mierzymy w radianach lub stopniach.
ω – częstość kołowa drgań.

Prędkość drgań:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t + \ \varphi_0\right) \tag{10.17}$$

Przyspieszenie drgań:

$$a = \frac{dv}{dt} = \ -\frac{k}{m}A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\mathrm{t} + \varphi_0\right) = \ -\frac{k}{m}x \tag{10.18}$$

Ponieważ $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$ to:

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{10.19}$$

$$a = \ -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x \tag{10.20}$$

Identyczne wyrażenia dostanie się po różniczkowaniu wyrażenia $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right)$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_1) \tag{10.21}$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_1) = \ -\omega^2 x \tag{10.22}$$

Z definicji T i ostatnich równań wynika, że w czasie T faza zmienia się o 2π radianów. Zatem:

$$[\omega(t+T) + \varphi_0] - (\omega t + \varphi_0) = \ 2\pi \tag{10.23}$$

albo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{10.24}$$

Okres drgań zależy tylko od masy m i współczynnika sprężystości k, ale nie zależy od A.

Częstość drgań:

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{10.25}$$

Dla wahadła sprężynowego:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{10.26}$$

Z ostatnich dwóch związków wynika:

$$\omega = 2\pi\nu \tag{10.27}$$

Zapiszmy uzyskane wyrażenia na wychylenie, prędkość i przyspieszenie wahadła sprężynowego:

$$x = Asin(\omega t + \varphi_0) \tag{10.28}$$

$$v = v_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \tag{10.29}$$

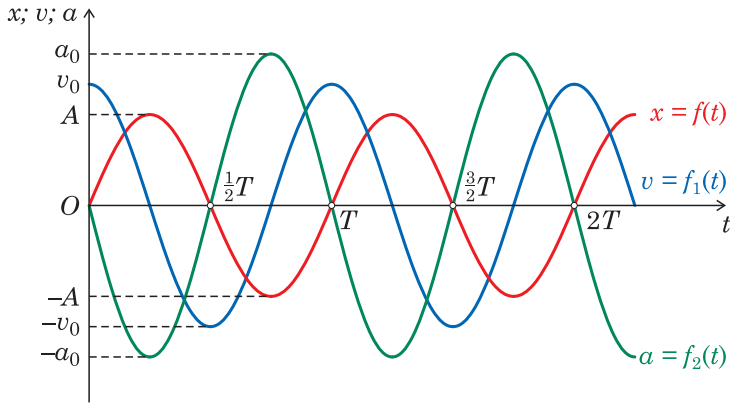
$$a = -a_0 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x \tag{10.30}$$

Z wyrażeń tych wynikają następujące wnioski:

1) wychylenie, prędkość i przyspieszenie ciała drgającego harmonicznie są funkcjami okresowymi czasu z jednakowym okresem T
2) prędkość drgającego ciała jest największa przy $x = 0$ (położenie równowagi)
3) przyspieszenie dla $x = 0$ $a = 0$.

a jest największe przy maksymalnych wychyleniach i skierowane do środka drgań (położenia równowagi).

Zależności x, v, a od czasu przedstawia rysunek:



Określmy różnicę faz między fazami wychylenia i prędkości:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin \phi_x \tag{10.31}$$

$$v = v_0 \cos(\omega t + \varphi_0) = v_o \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = v_0 \sin \phi_v \tag{10.32}$$

$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_v = -\frac{\pi}{2} \tag{10.33}$$

czyli v wyprzedza w fazie wychylenie o $\frac{\pi}{2}$

Podobnie przyspieszenie wyprzedza w fazie prędkość o $\frac{\pi}{2}$.

Z II zasady dynamiki mamy ogólny związek między siłą i przyspieszeniem dla drgań harmonicznych:

$$F = -m\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x \tag{10.34}$$

Widać, że siła jest zawsze proporcjonalna do wychylenia i skierowana do położenia równowagi. Okres i faza siły są zgodne z okresem i fazą przyspieszenia.

Siły, które mają inny charakter niż siła sprężysta, lecz wykazujący tę samą zależność co powyższa nazywa się kwazisprężystymi:

$$F = -kx \tag{10.35}$$

przy czym

$$k = m\omega^2 \tag{10.36}$$

W przypadku drgań prostoliniowych wzdłuż osi x:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{10.37}$$

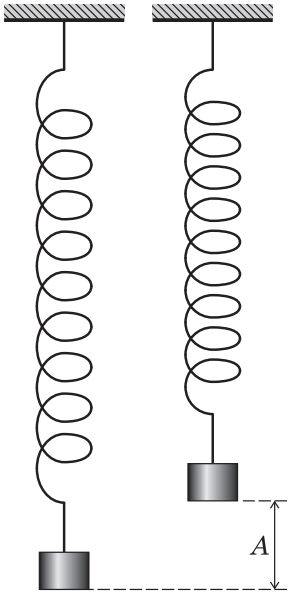
Po podstawieniu tego wyrażenia do II zasady dynamiki otrzymujemy:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{10.38}$$

lub

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{10.39}$$

Jeszcze jeden przykład: wahadło sprężynowe (rysunek)



Na ciało o masie m działa siła $-kx + P$, zatem:

$$m\frac{d^2\ x}{dt^2} = -kx + P = k(x - x_0) \tag{10.40}$$

$$x_0 = P/k \tag{10.41}$$

$$x_1 = x - x_0 \tag{10.42}$$

$$m\frac{d^2\ x_1}{dt^2} = -kx_1 \tag{10.43}$$

Czyli istotnie drgania te są harmoniczne

Rozpatrzmy energie ciała o masie m wykonującego swobodne drgania harmoniczne o amplitudzie A i częstości kołowej ω. Energia potencjalna ciała w chwili, gdy jest ono wychylone o x z położenia równowagi jest równa pracy, jaką musi wykonać siła $F = -kx$ aby przesunąć to ciało do położenia równowagi:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2sin^2(\omega t + \varphi_0) \tag{10.44}$$

Energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2cos^2(\omega t + \varphi_0) \tag{10.45}$$

Energia całkowita:

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}\ m\omega^2A^2[sin^2(\omega t + \varphi_0) + cos^2(\omega t + \varphi_0)] \tag{10.46}$$

lub

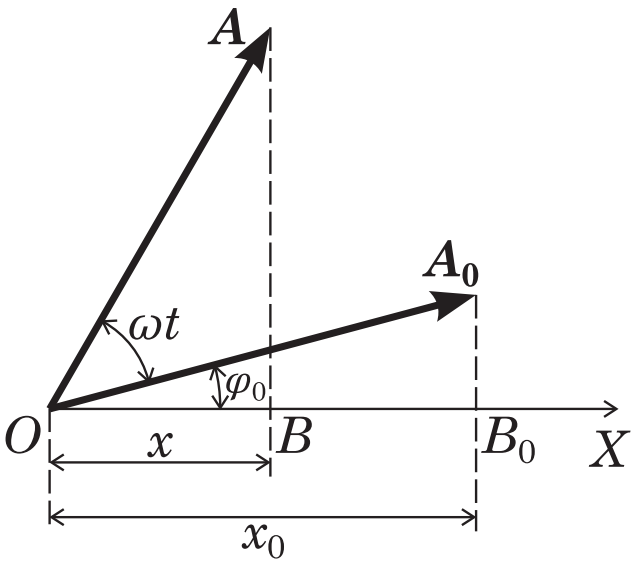
$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \tag{10.47}$$

Zatem energia całkowita jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy. Dla drgań swobodnych niegasnących E nie zależy od czasu, zatem i A też nie zależy od czasu.

Proszę zwrócić uwagę, że podczas jednego pełnego drgania energia kinetyczna i potencjalna dwukrotnie uzyskują maksymalne i zerowe wartości.

Składanie drgań harmonicznych

Rozpatrzmy najpierw sposób przedstawienia drgań za pomocą obracającego się wektora amplitudy. Wykreślmy oś OX i wektor A_0, taki że liczbowo jest on równy A i skierowany jak na rys.



Jeśli faza początkowa jest dodatnia to kąt φ_0 odmierzamy w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, jeśli zaś ujemna, to w kierunku zgodnym.

Rzut A_0 na oś OX:

$$x_0 = A_0 cos\varphi_0 \qquad (10.48)$$

W ciągu czasu t wektor amplitudy obróci się o ωt i przyjmie położenie wektora $\boldsymbol{A}$. Jego rzut na oś X:

$$x = Acos(\omega t + \varphi_0) \qquad (10.49)$$

W ciągu okresu T wektor amplitudy obróci się o 2π, a rzut wykona pełne drganie względem położenia O.

Zatem obracający się wektor amplitudy całkowicie charakteryzuje drganie harmoniczne. Ma to zastosowanie przy składaniu drgań.

Niech teraz pewien punkt wykonuje 2 drgania harmoniczne jednocześnie o tych samych okresach i wzdłuż jednej prostej. Do złożenia tych drgań zastosujemy metodę graficzną.

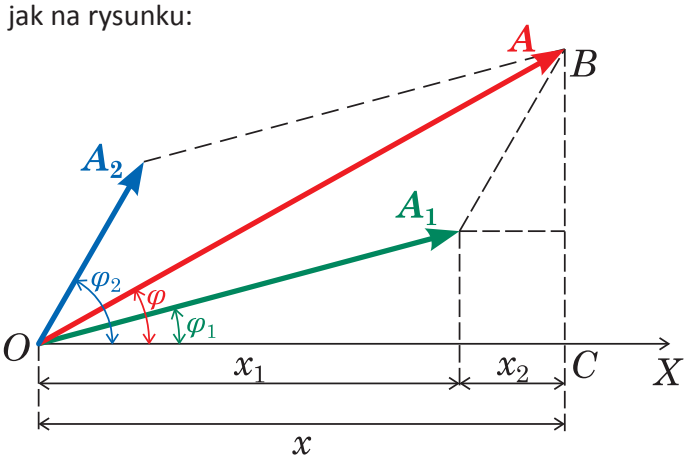
Drgania te określają równania:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \qquad (10.50)$$

oraz

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \qquad (10.51)$$

Oczywiście drganie wypadkowe musi zachodzić wzdłuż tej samej prostej. Rozpatrzmy sytuację jak na rysunku:



Pod kątem φ_1 odkładamy A_1, pod kątem φ_2 odkładamy A_2 – oba wektory obracają się przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara z tą samą ω. Dlatego $\varphi_2 - \varphi_1$ jest stały. Ze względu na to, że rzut wektora wypadkowego na zadany kierunek jest sumą rzutów wektorów składowych, drganie wypadkowe można przedstawić za pomocą wektora amplitudy jako:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 \qquad (10.52)$$

Drganie wypadkowe:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \qquad (10.53)$$

Z rysunku wynika , że :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{10.54}$$

Faza początkowa jest dana z:

$$tg\varphi = \frac{BC}{OC} \tag{10.55}$$

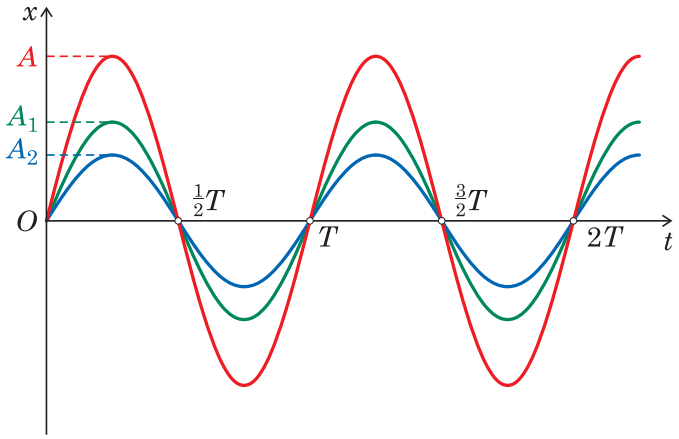
lub

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \tag{10.56}$$

Widzimy, że amplituda drgania wypadkowego zależy od różnicy faz początkowych drgań składowych. Dla $\varphi_2 - \varphi_1$ = const (drgania koherentne) można z (10.54) wyznaczyć określoną A.

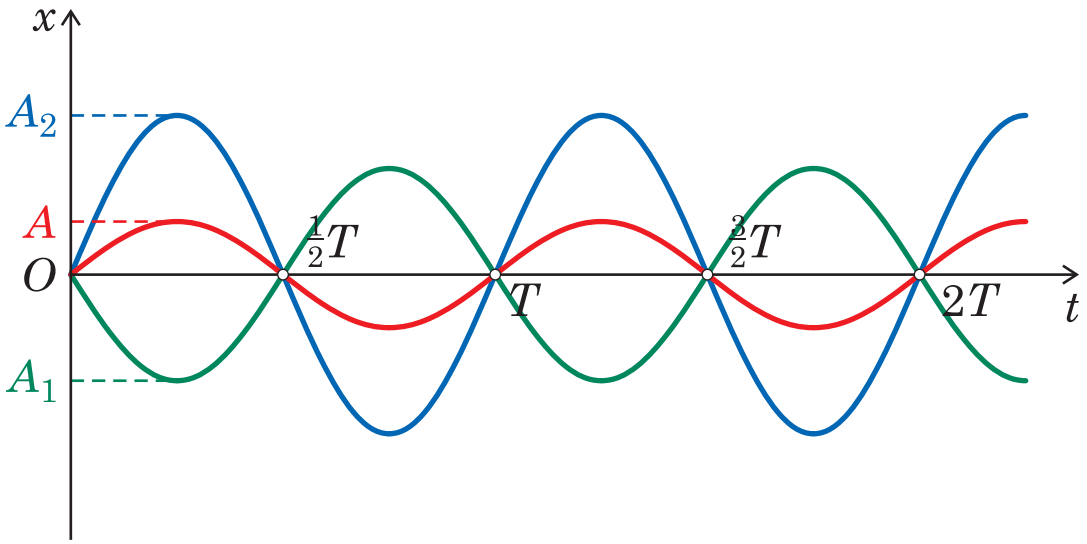
Możliwa wartość A:

$$|A_1 + A_2| \geq A \geq |A_2 - A_1| \tag{10.57}$$



Przypadki szczególne:

1) $\varphi_2 - \varphi_1 = n \cdot 2\pi$, $n = 0,1,2,3$ ….



Rysunek przedstawia drganie wypadkowe i składowe w tym przypadku w funkcji czasu

2) Różnica faz drgań składowych:
$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi(2n+1),\ n = 0,1,2,3\ldots.$

Wówczas:

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1 \tag{10.58}$$

$$A = |A_2 - A_1| = |A_1 - A_2| \tag{10.59}$$

Poprzedni rysunek ilustruje także i ten przypadek.

Jeśli jednak różnica faz początkowych jest dowolną funkcją czasu, to sytuacja jest inna:

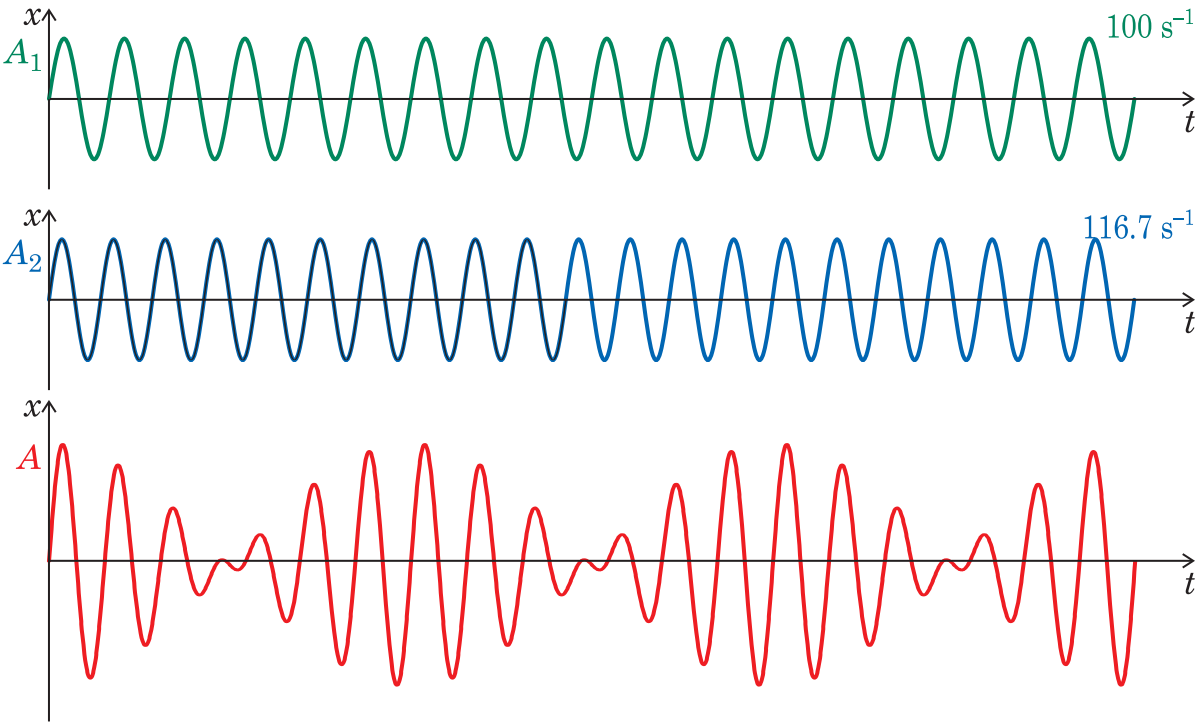
$$x_1 = A_1 \cos[\omega t + \varphi_1(t)] \tag{10.60}$$

$$x_2 = A_2 \cos[\omega t + \varphi_2(t)] \tag{10.61}$$

Amplituda drgań wypadkowych zmienia się wtedy odpowiednio ze zmianą $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ i przy nakładaniu drgań niekoherentnych nie ma sensu mówić o składaniu amplitud.

Rozważmy teraz przypadek dwóch drgań harmonicznych odbywających się wzdłuż jednej prostej o jednakowych amplitudach i nieznacznie różnych częstościach. W wyniku składania takich drgań uzyskujemy drgania o okresowo zmiennej amplitudzie. *Okresowe zmiany amplitudy od wartości minimalnej do maksymalnej nazywamy dudnieniami*.

Ilustracja tego przypadku jest pokazana na *rysunku*. Można wykazać, że amplituda drgania wypadkowego zmienia się z częstością kołową $|\omega_2 - \omega_1|$.



Drgania o postaci:

$$x = A(t) \cdot \cos[\omega t + \varphi(t)] \tag{10.62}$$

nazywa się drganiami modulowanymi.

Możemy mówić o drganiach z modulowaną amplitudą, dla których $dA/dt << \omega A_{max}$ i φ = const oraz o drganiach z modulowaną fazą lub częstością dla których A = const.

Dudnienia są jednym z najprostszych przykładów drgań modulowanych, w których $A(t)$ i $\varphi(t)$ są okresowymi funkcjami czasu.

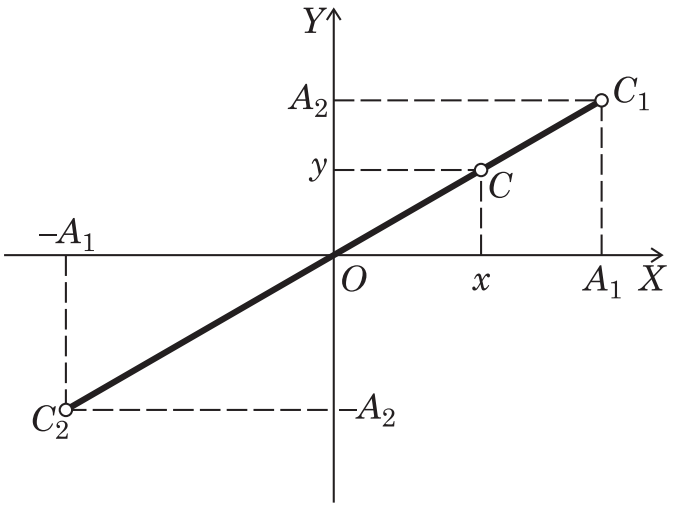
W teorii drgań jednym z najważniejszych zagadnień jest ***analiza harmoniczna (analiza Fouriera)*** polegająca na przedstawieniu złożonych drgań modulowanych jako szeregu prostych drgań harmonicznych. Fourier wykazał, że dowolne drganie złożone można przedstawić w postaci szeregu zawierającego proste drgania harmoniczne o zwielokrotnionych częstościach:

$$x = f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \\ \ldots + A_n sin(n\omega t + \varphi_n) + \cdots \tag{10.63}$$

Przy czym $x = f(t)$ jest dowolną funkcją ciągłą opisującą drgania złożone, ω – podstawowa częstość kołowa.

Składanie drgań wzajemnie prostopadłych

Niech punkt materialny C bierze udział jednocześnie w dwóch drganiach harmonicznych o jednakowych okresach T w 2 kierunkach wzajemnie prostopadłych. (rysunek) Początek układu współrzędnych na rysunku jest w położeniu równowagi.



Rozpatrzmy kilka przypadków:

a) Identyczne początkowe fazy drgań. Pomiar rozpocznijmy tak, by początkowe fazy obu drgań były równe 0. Wtedy: $x = A_1 \sin \omega t$ oraz $y = A_2 \sin \omega t$.

Podzielenie stronami daje:

$$\frac{x}{y} = \frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{A}_1} \tag{10.64}$$

$$y = \frac{A_2}{A_1} x \tag{10.65}$$

Stąd widać, że punkt C drga wzdłuż prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych. Tego typu drgania nazywa się liniowo spolaryzowanymi.

2) Początkowa różnica faz wynosi π. W typ przypadku :

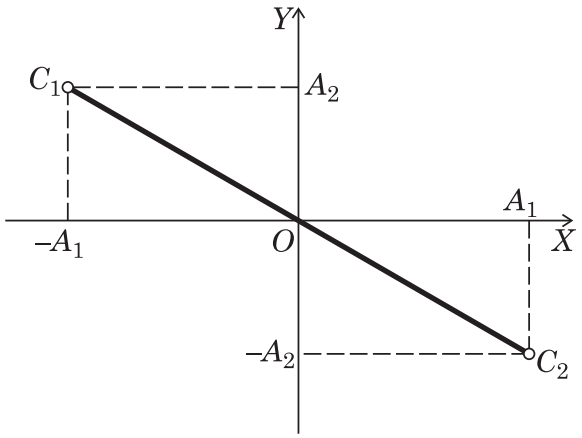
$$x = A_1 \sin(\omega t + \pi) = -A_1 \sin \omega t \tag{10.66}$$

$$y = A_2 \sin \omega t \tag{10.67}$$

Równanie toru punktu C:

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x \tag{10.68}$$

Ponownie punkt C drga wzdłuż prostej przechodzącej przez początek układu, lecz położonej jak na rysunku obok.



Amplituda drgań wypadkowych w obu rozważonych przypadkach ma wartość:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \tag{10.68}$$

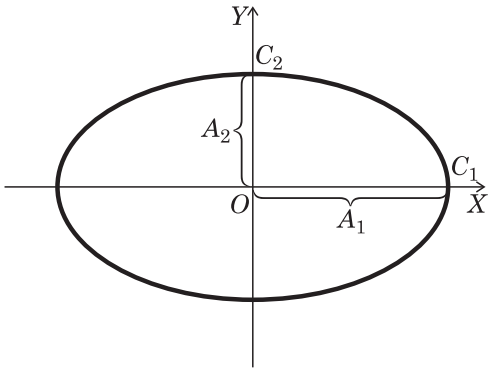
3) Początkowa różnica faz wynosi π/2. Drgania są opisane przez:

$$x = A_1 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A_1 \cos \omega t \tag{10.69}$$

$$y = A_2 \sin \omega t$$

lub:

$$\frac{x}{A_1} = cos\omega t,\ \frac{y}{A_2} = sin\omega t \tag{10.70}$$



Po podniesieniu do kwadratu i zsumowaniu stronami mamy:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \tag{10.71}$$

Zatem punkt drgający porusza się po elipsie o półosiach A_1 i A_2 . Jest to przypadek drgań spolaryzowanych eliptycznie. Punkt C porusza się przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara. Przy różnicy fazy 3π/2 ruch będzie się także odbywał po elipsie, ale zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

Dla A_1 = A_2 otrzymujemy oczywiście ruch po okręgu i drgania kołowo spolaryzowane. Przy innych niż rozpatrzone różnicach faz początkowych mamy elipsy o osiach nie leżących na OX i OY.

Zespół krzywych otrzymywanych przez składanie drgań wzajemnie prostopadłych nazywa się *krzywymi Lissajous .*

Zadanie:

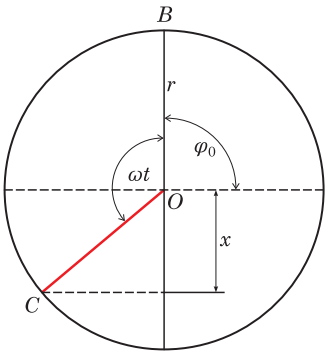
Punkt *C* (rys.) porusza się jednostajnie po okręgu w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, wykonując 5 obr./s. Promień okręgu wynosi 0.2 m.
Wyznaczyć wychylenie, prędkość i przyspieszenie rzutu punktu na pionową średnicę w chwili, gdy punkt przeszedł trzecią część długości okręgu.
Dla $t = 0$ przyjmujemy, że punkt był maksymalnie wychylony.

Rzut punktu w ruchu po okręgu na dowolną prostą w płaszczyźnie okręgu wykonuje ruch harmoniczny. Wtedy:

$$x = Asin(\omega t + \varphi_0) \tag{10.72}$$

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \tag{10.73}$$

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x \tag{10.74}$$



Dla $t = 0$ rzut punktu *C* jest w punkcie *B*, czyli $x_0 = A$, $\sin\varphi_0 = 1$ i mamy $\varphi_0 = \pi/2$. $\omega = 2\pi n$.

Na przejście trzeciej części okręgu punkt potrzebuje czasu:

$$T = T/3 = 1/(3n). \tag{10.75}$$

Po podstawieniu znalezionych wartości otrzymujemy:

$$x = Asin(2\pi/3 + \pi/2) = \text{Asin}(7\pi/6) \tag{10.76}$$

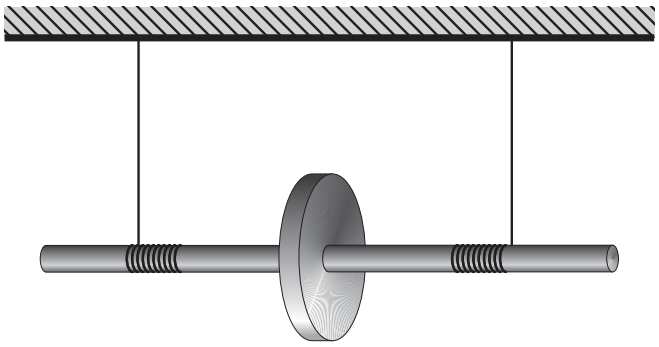
$$v = A2\pi n \cos(7\pi/6) \tag{10.77}$$

$$a = -A(2\pi n)^2 \sin(7\pi/6) \tag{10.78}$$

$x = -0.1$m, $v = -5.44$m/s, $a = 98.6$ m/s^2

Drgania gasnące

W rzeczywistości układy drgające rozpraszają energię. Energia drgań mechanicznych układu jest zużywana na pokonywanie sił tarcia, dlatego swobodne drgania gasną, czyli ich amplituda zmniejsza się z czasem. Jednym z wielu doświadczeń, w których można to obserwować jest eksperyment z wahadłem Maxwella.



W najprostszym przypadku przy niewielkich prędkościach ruchu siły rozpraszające (oporu):

$$F_{oporu} = -r\vec{v} \tag{10.79}$$

gdzie *r* – współczynnik oporu, ***v*** – prędkość ruchu. Znak „–" oznacza, że siła ta jest zawsze skierowana przeciwnie do kierunku ruchu.

II zasada dynamiki dla drgań gasnących ma postać:

$$ma = -kx - rv \tag{10.80}$$

m – masa drgającego ciała, *a* – przyspieszenie, *–rv* – siła tarcia.
Ostatnie równanie można zapisać łatwo w postaci:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{10.81}$$

Masę *m*, współczynnik oporu *r* i współczynnik sprężystości *k* nazywa się parametrami układu drgającego.
Dla $(r/2m) \leq \sqrt{k/m}$ rozwiązanie ostatniego równania ma postać:

$$x = A_0 e^{-\left(\frac{r}{2m}\right)t} \sin(\omega t + \varphi_0) \tag{10.82}$$

Wyrażenie

$$A = A_0 e^{-\left(\frac{r}{2m}\right)t} \tag{10.83}$$

nazywa się amplitudą drgań tłumionych. Maleje ona w czasie tym szybciej im większe jest *r* i mniejsza masa *m*.

Wielkość :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (r/2m)^2} \tag{10.84}$$

nazywa się częstością własną kołową układu rozpraszającego. Wielkość ta ma znaczenie dość umowne, mówi tylko ile razy układ drgający w ciągu π sekund przejdzie przez położenie równowagi. Podobnie okres drgań gasnących:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - (r/2m)^2}} \tag{10.85}$$

poprawnie powinno się określać jako okres umowny drgań gasnących.
Stosunek amplitud drgań gasnących w czasie *t* oraz *t*+*T*:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_0 e^{(-r/2\mathrm{m})\mathrm{t}}}{A_0 e^{(-r/2m)(t+T)}} = e^{(r/2m)T} \tag{10.86}$$

lub

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\beta T} \tag{10.86a}$$

gdzie

$$\beta = \frac{r}{2m} \tag{10.87}$$

nazywamy współczynnikiem tłumienia, natomiast logarytm naturalny stosunku dwóch amplitud przy kolejnych wychyleniach po okresie czasu *T* nazywa się dekrementem logarytmicznym tłumienia:

$$\delta = ln\frac{A_n}{A_{n+1}} = \beta T \tag{10.88}$$

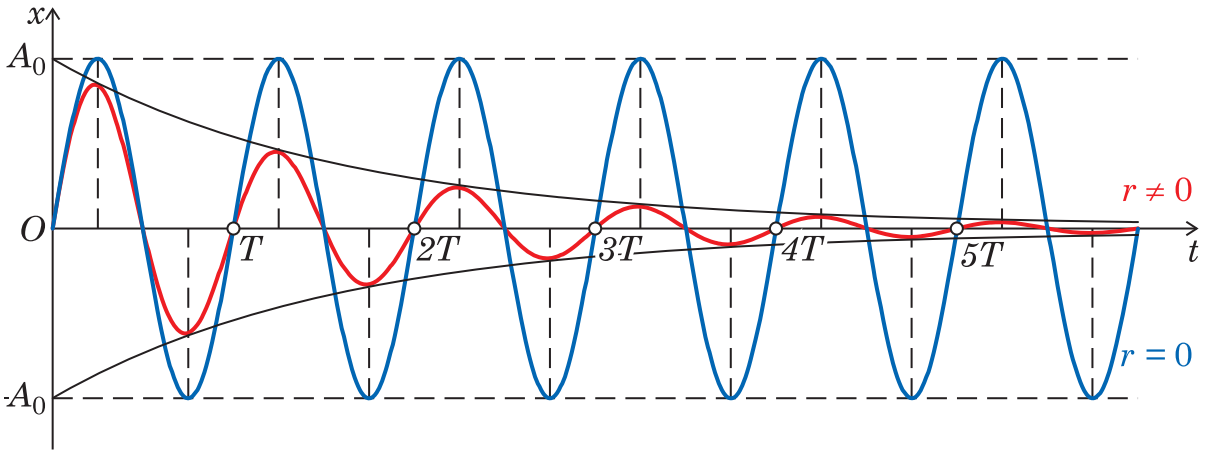
Sens fizyczny β i δ: niech τ oznacza odstęp czasu, w ciągu którego amplituda drgań zmniejsza się e-krotnie. Wtedy:

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e \tag{10.89}$$

skąd: βτ=1. Zatem β jest odwrotnością czasu w ciągu którego amplituda zmniejsza się e-krotnie. τ – nazywa się czasem relaksacji.

$$\tau = NT, \quad \delta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N} \tag{10.90}$$

Słabe tłumienie prawie nie wpływa na umowny okres drgań. (rysunek)

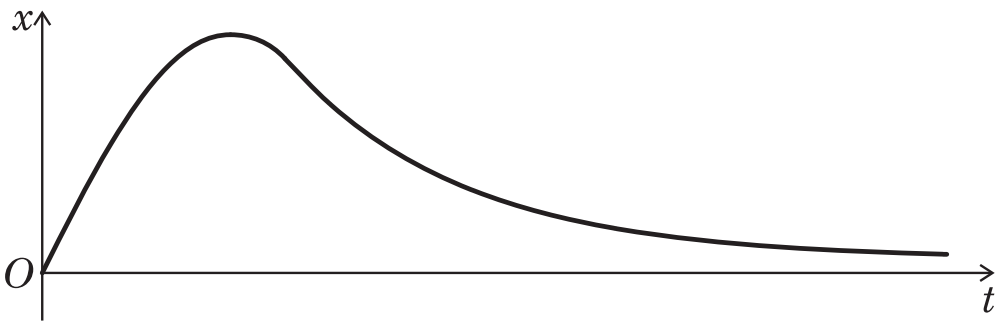


Jednak przy dużym tłumieniu amplituda szybko maleje i umowny okres drgań zwiększa się.

Dla oporu krytycznego:

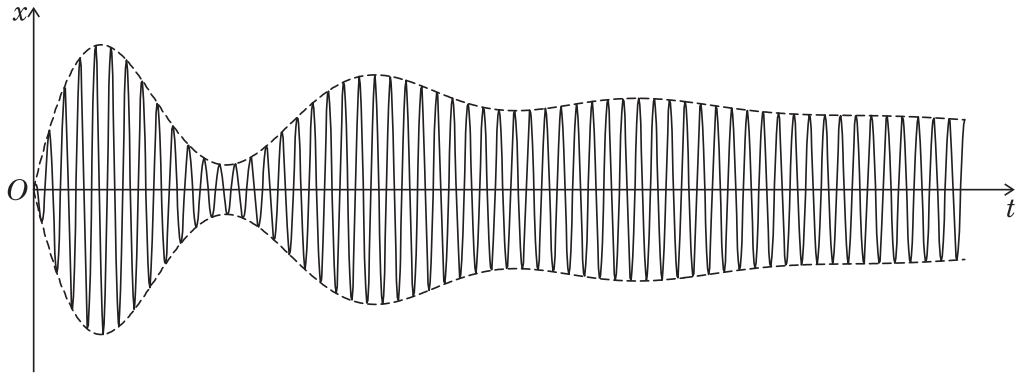
$$r = r_k = 2m\omega_0\,, \beta = \omega_0 \tag{10.91}$$

częstość kołowa drgań tłumionych przyjmuje wartość 0 – drgania ustają. Układ wyprowadzony z położenia równowagi przez siły zewnętrzne powraca nieokresowo do położenia równowagi. W tym ruchu całkowita energia mechaniczna drgającego układu jest do momentu powrotu do położenia równowagi zużytkowana na pokonanie sił oporu.



Drgania wymuszone:

Rozpatrzmy teraz drgania, przy których oprócz siły sprężystej *–kx*, oporu *–rv* występuje dodatkowa siła okresowa *F*, zwana siłą wymuszającą („wspomaganie" ruchu huśtawki, czy popychanie ciężarka na sprężynie w równych odstępach czasu). Jeśli okres siły wymuszającej nie równa się okresowi swobodnych drgań układu, to początkowo wystąpi kilka dudnień, a potem ustalą się drgania wymuszone ze stałą amplitudą. (rysunek).



II zasada dynamiki dla wymuszonych drgań prostoliniowych:

$$ma = -kx - rv + F \tag{10.92}$$

gdzie *F* – siła okresowa wymuszająca,
lub:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = F \tag{10.93}$$

W najprostszym przypadku:

$$F = F_0 cos\omega t \tag{10.94}$$

Załóżmy, że drgania wymuszone układu za sprawą siły *F* są także harmoniczne:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \tag{10.95}$$

przy czym ich częstość kołowa jest równa częstości kołowej siły wymuszającej.

Znajdźmy amplitudę i fazę początkową drgań i spróbujmy sprowadzić równanie na *F* do tożsamości. Po zróżniczkowaniu *x* mamy:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega\, t + \varphi_0) \tag{10.96}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\,\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \tag{10.97}$$

x można przedstawić jako:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}) \tag{10.98}$$

Podstawiając te wyrażenia do II zasady dynamiki mamy:

$$mA\omega^2\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + rA\omega\cos(\omega t + \varphi_0) + kA\cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = F_0\cos\omega t \tag{10.99}$$

Po podzieleniu przez *mA*:

$$\omega^2\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{r}{m}\omega\cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m}\cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{mA}\cos\omega t \tag{10.100}$$

Pokazaliśmy poprzednio, że $k/m = \omega_0{}^2$, $r/m = 2\beta$
Zatem ostatnią równość można przedstawić jako:

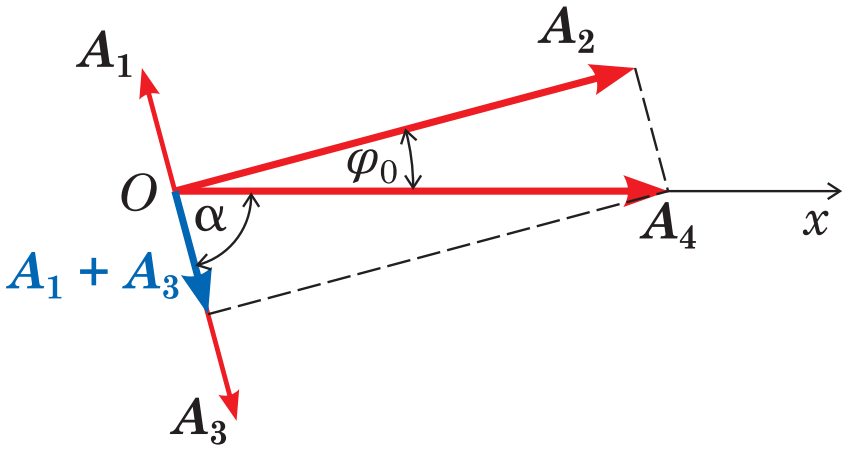
$$A_1 \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_0) + A_3 \cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = A_4 \cos \omega t \tag{10.101}$$

gdzie

$$A_1 = \omega^2, \qquad A_2 = 2\beta\omega \tag{10.102}$$

$$A_3 = \omega_0^2, \quad A_4 = \frac{F_0}{mA} \tag{10.103}$$

Prawa strona równości przedstawia pewne złożone drganie harmoniczne, lewa strona przedstawia jego części składowe. Drgania te można dodać posługując się rysunkiem:



Wektory poszczególnych amplitud odkłada się pod katami odpowiadającymi fazom początkowym czterech drgań tak by $A_4 = A_1 + A_2 + A_3$.
Z rysunku wynika, że

$$A_4^2 = (A_3 - A_1)^2 + A_2^2 \tag{10.104}$$

Skąd po podstawieniu wyrażeń na amplitudy:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \tag{10.105}$$

Amplituda ustalonych drgań wymuszonych jest proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej i odwrotnie proporcjonalna do *m* oraz zmniejsza się ze wzrostem współczynnika tłumienia. Jeśli wielkości te są stałe, to *A* zależy tylko od częstości kołowych siły wymuszającej i drgań swobodnych.
Wyznaczmy różnicę faz prędkości drgań tłumionych i siły wymuszającej oraz wychylenia i siły wymuszającej:

$$tg\varphi_0 = \frac{A_3 - A_1}{A_3} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega} \tag{10.106}$$

$$tg\alpha = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{10.107}$$

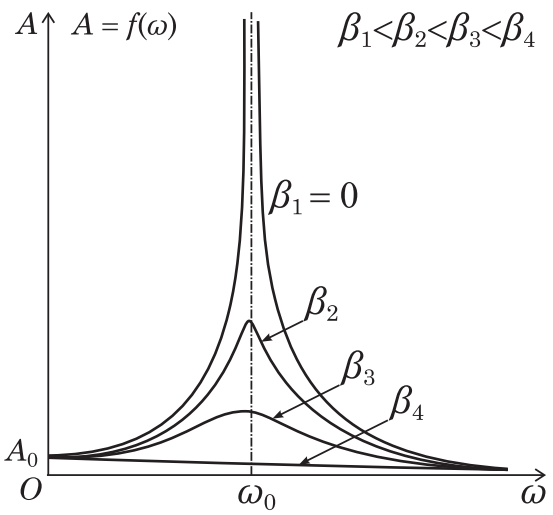
Zbadajmy jeszcze zależność *A* od częstości kołowej siły wymuszającej:
1) Dla $\omega = 0$:

$$A = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \tag{10.108}$$

W tym przypadku drgania nie zachodzą, wychylenie przy drganiach wymuszonych równa się statycznemu odkształceniu pod działaniem siły stałej:

$$x = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} \tag{10.109}$$

Wychylenie A_0 nazywa się amplitudą statyczną.



2) Jeśli nie ma tłumienia $\beta_1 = \frac{r}{2m} = 0$, to amplituda A rośnie ze wzrostem częstości kołowej siły wymuszającej i jest nieskończenie duża dla $\omega = \omega_0$. Przy dalszym wzroście A spada do zera przy nieskończenie dużym ω. (rysunek)

3) Dla $\beta \neq 0$ amplituda osiąga maksimum gdy mianownik wyrażenia na A jest minimalny.
Z warunku na minimum lokalne:

$$-4(\omega_0^2 - \omega_{rez}^2)\omega_{rez} + 8\beta^2\omega_{rez} = 0 \tag{10.110}$$

gdzie ω_{rez} oznacza wartość częstości kołowej przy której A jest max.

Po przekształceniu:

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \omega_0\sqrt{1 - 2\beta^2/\omega^2} \tag{10.111}$$

Częstość kołową ω_{rez} nazywamy rezonansową, a zjawisko zwiększania amplitudy drgań wymuszonych przy zbliżaniu do częstości rezonansowej zjawiskiem rezonansu.
Przy $\beta = 0$ częstość rezonansowa wynosi ω_0, a dla układu rozpraszającego jest od niej mniejsza i wynosi

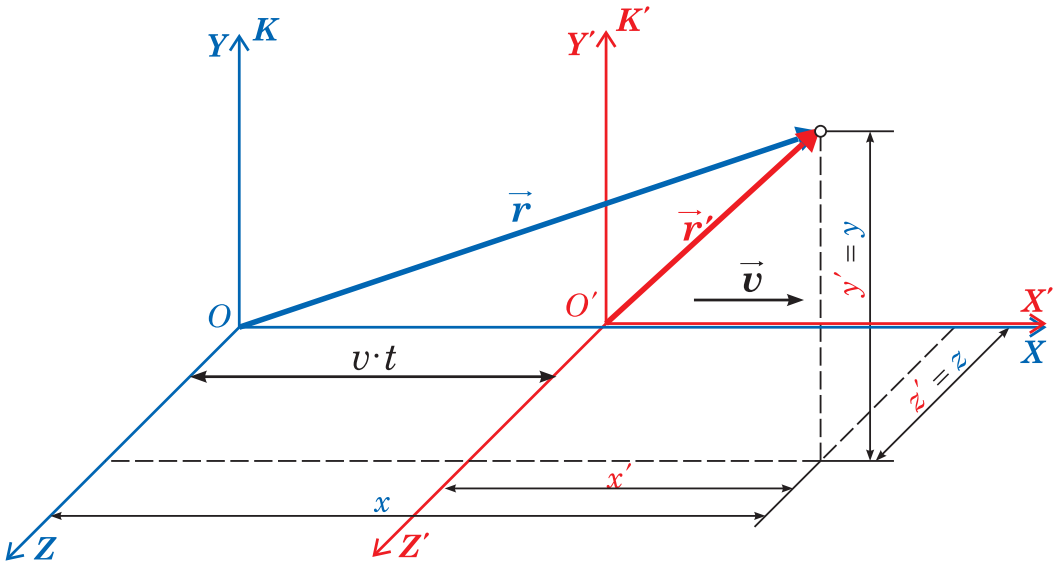
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{10.112}$$

Zjawisko rezonansu słabnie ze wzrostem tłumienia i zanika ostatecznie przy

$$\beta \geq \omega_0/\sqrt{2} \tag{10.113}$$

Zasada względności Galileusza
(przypomnienie)

Dowolne dwa inercjalne układy odniesienia pozostają albo względem siebie nieruchome albo poruszają się ruchem jednostajnym prostoliniowym.
Rysunek poniżej przedstawia dwa takie układy:



W mechanice klasycznej przyjmuje się, że we wszystkich inercjalnych układach odniesienia własności przestrzeni i bieg czasu są identyczne, dlatego też prawdziwe są transformacje Galileusza:

$$x' = x - vt \tag{11.01}$$

$$y' = y \tag{11.02}$$

$$z' = z \tag{11.03}$$

$$t' = t \tag{11.04}$$

lub

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t \tag{11.05}$$

$$t' = t \tag{11.06}$$

Zatem między prędkościami w obu układach oraz przyspieszeniami w obu układach zachodzą relacje:

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V} = \vec{v} - \vec{V} \tag{11.07}$$

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \tag{11.08}$$

Mamy więc tu klasyczne składanie prędkości (11.07) oraz własność niezmienniczości przyspieszenia względem przekształcenia Galileusza.

Siły działające na punkt materialny, które rozpatruje się w mechanice klasycznej zależą tylko od położenia i prędkości punktu względem innych punktów materialnych, które na niego działają.

Przy przejściu od jednego do drugiego układu inercjalnego wzajemne rozmieszczenie i prędkości punktów nie zmieniają się:

$$\vec{r}'_{12} = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2 = \left(\vec{r}_1 - \vec{V}t\right) - \left(\vec{r}_2 - \vec{V}t\right) = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_{12} \tag{11.09}$$

$$\vec{u}'_{12} = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2 = \left(\vec{v}_1 - \vec{V}\right) - \left(\vec{v}_2 - \vec{V}\right) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{u}_{12} \tag{11.10}$$

Zatem siła ***F*** działająca na dany punkt jest też niezmiennicza przy tym przekształceniu:

$$\vec{F}' = \vec{F} \tag{11.11}$$

Ponadto w mechanice klasycznej nierelatywistycznej przyjmuje się, że masa punktu materialnego nie zależy od jego prędkości, czyli jest jednakowa we wszystkich układach odniesienia:

$$m = m' \tag{11.12}$$

Z przeprowadzonych rozumowań wynika, że II zasada dynamiki Newtona :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{11.13}$$

Jest niezmiennicza względem przekształcenia Galileusza.

Kilka słów o eterze…

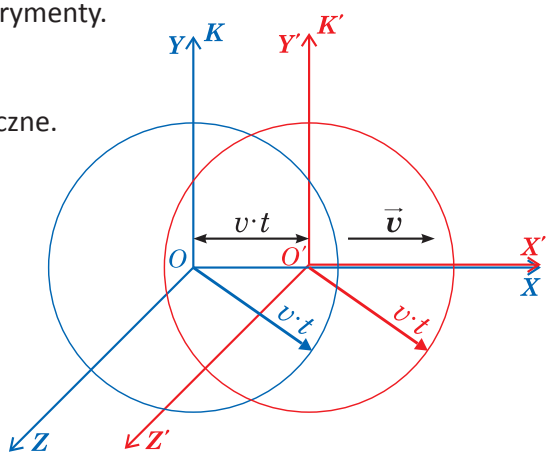
Postulaty szczególnej teorii względności

Po przeanalizowaniu bogatego materiału doświadczalnego Einstein przyjął dwa następujące założenia swojej teorii (postulaty szczególnej teorii względności):

1) *Jednostajny i prostoliniowy ruch odosobnionego układu ciał jako całości nie ma wpływu na prawa opisujące dowolne zjawiska zachodzące w tym układzie. Inaczej mówiąc za pomocą żadnych doświadczeń przeprowadzonych w układzie odosobnionym nie da się stwierdzić, czy układ ten spoczywa czy jest porusza się jednostajnie i prostoliniowo.*
2) *Prędkość światła w próżni nie zależy od prędkości źródła światła i jest jednakowa we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.*

Postulat 1 jest uogólnieniem zasady Galileusza z mechaniki na dowolne zjawiska fizyczne.
Słuszność obu postulatów potwierdziły liczne eksperymenty.
Einstein odrzucił pojęcie eteru jako zbędne.

Pozornie oba postulaty wydają się wzajemnie sprzeczne.
Weźmy pod uwagę dwa układy inercyjne:
K (nieruchomy) i *K'* (poruszający się prostoliniowo z *v* = const) jak na rysunku:



Przypuśćmy, że dla $t = 0$ gdy O i O' pokrywały się, został wyemitowany izotropowo sygnał świetlny z O. W dowolnej chwili $t > 0$ światło dociera do każdego punktu na sferze o promieniu $r = ct$.

Jednak można również przyjąć, że to z punktu $O' = O$ w chwili $t = 0$ został wyemitowany sygnał. Wtedy światło powinno się identycznie rozchodzić w układzie K' zgodnie z treścią II postulatu (prędkość światła c nie zależy od prędkości źródła v). Zatem światło wysłane z O' powinno w tym samym czasie osiągnąć punkty sfery o tym samym promieniu $r = ct$. Jenak środki kul oddalą się od siebie w czasie t o $d = vt$. Zatem światło osiągałoby w tych samych chwilach czasu różne punkty przestrzeni.

Einstein usunął tę pozorną sprzeczność rewidując przyjęte uprzednio wyobrażenie o własnościach czasu i przestrzeni. Einstein pokazał, że sprzeczność wynika z posługiwania się związkami przestrzenno-czasowymi wynikającymi z przekształcenia Galileusza dla dwóch układów inercyjnych. Przekształcenie Galileusza jest słuszne tylko dla prędkości znacznie mniejszych od c.

Pojęcia długości i czasu

Rozpatrzmy pręt o pewnej długości, który porusza się wraz układem K'. Jego długość można zmierzyć za pomocą przymiaru należącego do układu K. W tym celu mierzymy odległość l między dwoma punktami osi OX, z którymi pokrywają się końce poruszającego się pręta (pomiar w tej samej chwili czasu). $l = x_2 - x_1$. W układzie ruchomym $l_0 = x_{2'} - x_{1'}$ (pręt nieruchomy w K').

Czy $l = l_0$???

TAK odpowiadano przed Einsteinem nie przeprowadzając jednak eksperymentów!

NIE, to zależy od doświadczenia odpowiedział Einstein. W celu wytłumaczenia eksperymentu Michelsona, Lorentz i Fitzgerald musieli wprowadzić hipotezę skrócenia długości.

Pomiar czasu z kolei jest związany nierozerwalnie z pojęciem jednoczesności dwóch zdarzeń.

Zasługą Einsteina było wykazanie, że jednoczesność zdarzeń należy definiować w oparciu o rzeczywisty proces fizyczny, który pozwala sprawdzić, czy dwa rozpatrywane zdarzenia są oczywiste, czy nie. Łatwo można stwierdzić jednoznaczność dwóch zdarzeń zachodzących w tym samym miejscu. Jak jednak stwierdzić jednoczesność dwóch zdarzeń za pomocą zegara w punkcie A, z których jedno zdarzenie zachodzi w tym punkcie A, a drugie w jakimś oddalonym punkcie B?

O znaczeniu odpowiedzi na to pytanie przekonuje przykład: chcemy zmierzyć prędkość rozchodzenia się sygnału wysyłanego z punktu A do punktu B. W tym celu trzeba znaleźć odstęp czasu Δt od momentu wysłania sygnału z punktu A do jego dojścia do B.

Pomiar czasu można przeprowadzić przy wykorzystaniu dwóch identycznych zegarów, z których jeden jest w A, a drugi po zsynchronizowaniu z pierwszym został umieszczony w B. Niech sygnał będzie wysłany w chwili t_1 z A (wg zegara w A) i niech dojdzie do B w chwili t_2 (wg zegara w B). Prędkość sygnału powinna być równa:

$$v = l/(t_2 - t_1). \tag{11.14}$$

Tak jest, o ile moglibyśmy powiedzieć z pewnością, że drugi zegar po przesunięciu go do B chodzi nadal synchronicznie z zegarem z A. O tym, czy zegary idą nadal z tą samą szybkością można się przekonać wysyłając w jednakowych odstępach czasu sygnały z A (wg zegara z A) i rejestrując za pomocą zegara z B odstępy czasu między chwilami nadejścia sygnałów.

Natomiast sprawdzenie identyczności wskazań zegarów z A i B można by tylko przeprowadzić przez wysłanie sygnału, który dochodziłby natychmiastowo z A do B. Niestety, nie ma takich sygnałów. Zatem wg Einsteina, zagadnienie synchronizacji zegarów można rozwiązać tylko przez jednoznaczną umowę, kiedy zegary są zsynchronizowane.

Jako podstawę umowy Einstein wybrał proces rozchodzenia się światła z próżni.

Niech wysłanie sygnału z *A* (wg zegara z *A*) występuje w czasie t_1, a dotarcie z powrotem do *A* po jego odbiciu od *B* w chwili t_2. Zegar w punkcie *B* jest zsynchronizowany z *A,* jeśli idzie tak samo szybko i w chwili dojścia do *B* zegar w tym punkcie pokazuje czas $t = (t_1 + t_2)/2$.

Wybór ten był trafny, gdyż żaden sygnał nie rozchodzi się szybciej niż *c,* a także dlatego, że *c* jest identyczna we wszystkich kierunkach (izotropowa) i we wszystkich układach inercjalnych.

W ten sposób można przeprowadzić chronometryzację układu odniesienia, czyli przyporządkowanie każdemu zdarzeniu ściśle określonej chwili *t* czasu, w której zachodzi dane zdarzenie, niezależnie od położenia punktu.

Zgodnie z przekształceniem Galileusza, jednoczesność dwóch zdarzeń w pewnym układzie inercjalnym odniesienia oznaczałaby ich jednoczesność w dowolnym innym układzie inercjalnym, byłoby to więc pojęcie bezwzględne.

Wg teorii względności tak być nie musi.

Einstein wykazał, że zgodnie z jego postulatami związek między współrzędnymi, a czasem w dwóch inercyjnych układach odniesienia wyrażają następujące transformacje:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, y' = y\,, \qquad z' = z \tag{11.15}$$

$$t' = \frac{t - \left(\frac{V}{c^2}\right)x}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11.16}$$

oraz

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11.17}$$

$$y' = y \tag{11.18}$$

$$z' = z \tag{11.19}$$

$$t = \frac{t' + \left(\frac{V}{c^2}\right)x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11.20}$$

przy czym

$$\beta = \frac{V}{c} \tag{11.21}$$

Wzory te noszą nazwę transformacji Lorentza.

Wyprowadzenie tych wzorów przebiega następująco:
załóżmy najpierw, że dla $t = 0$ z punktu *O* wysłany zostaje impuls świetlny. Odległości przebyte przez ten impuls po czasie *t*:

$$x = ct, y = ct, z = ct \tag{11.22}$$

lub

$$x - ct = 0, y - ct = 0, z - ct = 0 \tag{11.23}$$

Rozchodzenie się impulsu wzdłuż ujemnych kierunków osi współrzędnych dane jest oczywiście jako:

$$x + ct = 0, y + ct = 0, z + ct = 0 \tag{11.24}$$

W chwili $t = 0$ punkt O' ruchomego układu K' pokrywa się z O. Nastawmy zegar układu K' tak, by wtedy $t' = 0$. Z postulatów teorii względności wynika, że rozchodzenie się impulsu w układzie K' powinno mieć postać analogiczną do poprzednich wzorów:

$$x' - ct' = 0, y' - ct' = 0, z' - ct' = 0 \tag{11.25}$$

$$x' + ct' = 0, y' + ct' = 0, z' + ct' = 0 \tag{11.26}$$

Związki te wynikają z poprzednich wzorów dla układu K o ile spełnione są następujące relacje między współrzędnymi i czasem w obu układach:

$$x' - ct' = \alpha_1(x - ct) \tag{11.27}$$

$$y' - ct' = \alpha_2(y - ct) \tag{11.28}$$

$$z' - ct' = \alpha_3(z - ct) \tag{11.29}$$

$$x' + ct' = \gamma_1(x + ct) \tag{11.30}$$

$$y' + ct' = \gamma_2(y + ct) \tag{11.31}$$

$$z' + ct' = \gamma_3(z + ct) \tag{11.32}$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ są nieznanymi funkcjami prędkości V ruchomego układu, które należy wyznaczyć. Ze względu na to, że osie $O'Y'$ i $O'Z'$ oraz równoległe do nich osie OY i OZ leżą w płaszczyznach prostopadłych do V układu K' mamy taki sam związek między y', y jak i między z', z:

$$\alpha_3 = \alpha_2 \tag{11.33}$$

$$\gamma_3 = \gamma_2 \tag{11.34}$$

Dodawanie parami odpowiednich równań (11.28) i (11.31) daje

$$x' = a_1 x - a_2 ct \tag{11.35}$$

$$y' = b_1 y - b_2 ct \tag{11.36}$$

$$z' = b_1 x - b_2 ct \tag{11.37}$$

gdzie

$$a_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \gamma_1) \tag{11.38}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \gamma_1) \tag{11.39}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \gamma_2) \tag{11.40}$$

$$b_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \gamma_2) \tag{11.41}$$

Oznaczają nowe funkcje prędkości V. Oprócz tego z pierwszej pary równań (11.28) przez odjęcie stronami otrzymujemy:

$$t' = a_1 t - \frac{a_2}{c} x \tag{11.42}$$

Współrzędne początku O' układu ruchomego K' w układzie nieruchomym K można łatwo wyznaczyć przyjmując $x' = y' = z' = 0$:

$$x_{O'} = \frac{a_2 c}{a_1} t \tag{11.43}$$

$$y_{O'} = z_{O'} = \frac{b_2 c}{b_1} t \tag{11.44}$$

Punkt *O'* porusza się ze stałą *V* w kierunku dodatniego kierunku osi *X*. Stąd jego współrzędne w układzie nieruchomym *K*:

$$x_{O'} = Vt \tag{11.45}$$

$$y_{O'} = z_{O'} = 0 \tag{11.46}$$

Porównanie ostatnich par związków daje:

$$\frac{a_2 c}{a_1} = V \tag{11.47}$$

$$b_2 = 0 \tag{11.48}$$

Zatem wyrażenia na *x', y', z', t'* przyjmą postać:

$$x' = a_1(x - Vt) \tag{11.49}$$

$$y' = b_1 y \tag{11.50}$$

$$z' = b_1 z \tag{11.51}$$

$$t' = a_1\left(t - \frac{V}{c^2} x\right) \tag{11.52}$$

Aby wyznaczyć wartości a_1 oraz b_1 trzeba przyjąć umowę co do relacji między wzorcami długości w układach *K* i *K'*. Zgodnie z zasadą względności długość l wzorca długości $l_{0'} = 1$ należącego do *K'* mierzona w *K* powinna być równa długości l' wzorca długości $l_0 = 1$ należącego do układu *K* mierzona w *K'*. Z drugiego równania z ostatniej grupy wynika, że wyniki pomiaru odległości między dwoma punktami leżącymi na prostej równoległej do *OY* i *O'Y'* w układzie *K'* oraz *K* są następujące:

$$\Delta y' = b_1 \Delta y \tag{11.53}$$

Jeśli wzorce leżą na osi *Y* i *Y'* to dla $\Delta y' = l'_0 = 1$ mamy $\Delta y = l$, a dla $\Delta y - l_0 = 1$ zachodzi $\Delta y' = l'$ i mamy

$$l = \frac{1}{b_1} \tag{11.54}$$

$$l' = b_1 \tag{11.55}$$

Jest to możliwe gdy:

$$b_1^2 = 1 \tag{11.56}$$

czyli

$$b_1 = 1 \tag{11.57}$$

Aby wyznaczyć a_1 rozważmy wzorce wzdłuż *X* oraz *X'*. Z pierwszego i czwartego związku (poprzedni slajd):

$$x = \frac{x'}{a_1} + Vt \tag{11.58}$$

$$x' = a_1(1 - \beta^2)x - Vt' \tag{11.59}$$

Zgodnie z wprowadzoną poprzednio zasadą pomiaru długości ciała poruszającego się względem układu odniesienia, aby zmierzyć w *K* długość $l = \Delta x$ wzorca $l_{0'} = \Delta x' = 1$ z układu *K'* trzeba określić w tej samej chwili *t* współrzędne *x* oraz $x + \Delta x$ punktów osi *X* (wg zegara z *K*), z którymi pokrywają się odpowiednie punkty wzorca $l_{0'}$. Z ostatnich związków wynika:

$$x = \frac{x'}{a_1} + Vt \tag{11.60}$$

$$x + \Delta x = \frac{x' + \Delta x'}{a_1} + Vt \tag{11.61}$$

Zatem

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{a_1} \tag{11.62}$$

czyli

$$l = \frac{1}{a_1} \tag{11.63}$$

Podobnie

$$l' = a_1(1 - \beta^2) \tag{11.64}$$

Ponieważ $l' = l$ więc

$$a_1^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \tag{11.65}$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{11.66}$$

Wybór jedynie „+" w ostatnim wyrażeniu wynika z wyrażenia 11.52.

Wnioski ze wzorów na transformacje Lorentza

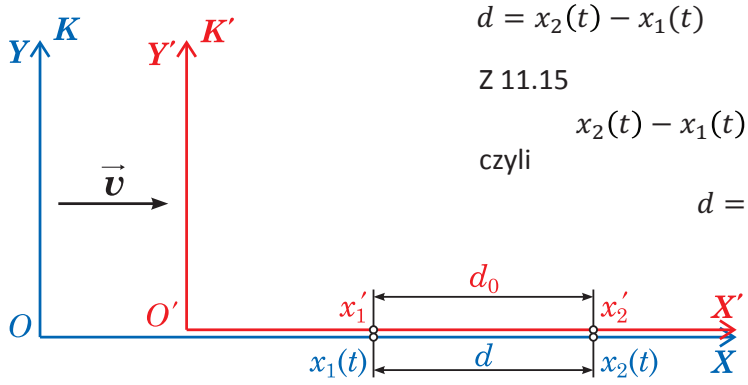
1) Współrzędne *x', y', z'* oraz czas *t'* z układu *K'* oraz *x, y, z* i *t* z układu *K* muszą być rzeczywiste, dlatego z 11.15 oraz 11.16 wynika, że β nie może być większe niż 1.

Zatem prędkość V względnego ruchu dwóch układów inercyjnych nie może być większa niż prędkość światła w próżni.

2) Przypuśćmy, że pewne ciało porusza się wraz z układem *K'* i ma w nim długość

$$d_0 = x_2' - x_1' \tag{11.67}$$

W układzie *K* by wyznaczyć długość ciała musimy w chwili *t* znaleźć współrzędne końców ciała:



$$d = x_2(t) - x_1(t) \tag{11.68}$$

Z 11.15

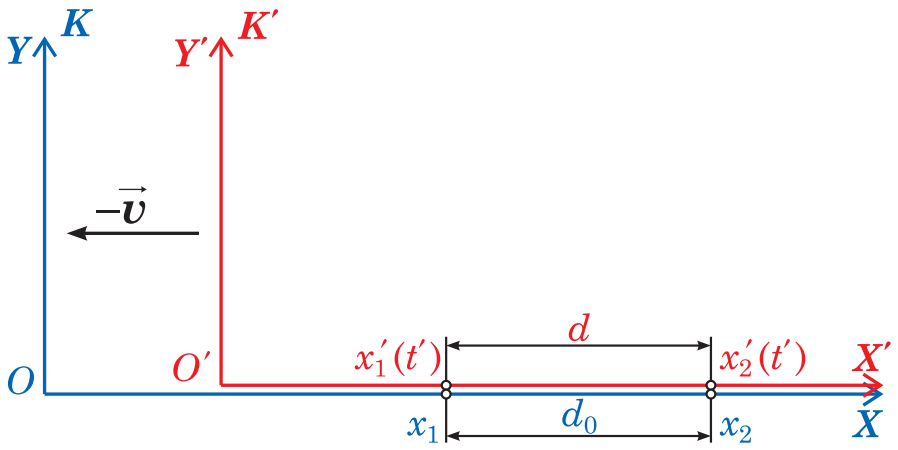
$$x_2(t) - x_1(t) = (x_2' - x_1')\sqrt{1 - \beta^2} \tag{11.69}$$

czyli

$$d = d_0\sqrt{1 - \beta^2} \tag{11.70}$$

Analogicznie, jeśli ciało jest nieruchome w *K*, to jego długość w tym układzie:

$$d_0 = x_2 - x_1 \tag{11.71}$$



Względem układu *K′* pręt porusza się z prędkością $-V$ i ma długość:

$$d = x'_2(t') - x'_1(t'), \tag{11.72}$$

którą określa zgodnie z zasadą względności oraz 11.15 także wyrażenie 11.70.

Zatem liniowe rozmiary ciała poruszającego się względem inercyjnego układu odniesienia zmniejszają się w kierunku ruchu $\sqrt{1-\beta^2}$ razy.

Z 11.15 wynika także , że rozmiary poprzeczne do kierunku ruchu nie zależą od prędkości ciała i są jednakowe we wszystkich inercyjnych układach odniesienia.
Można zatem powiedzieć, że liniowe rozmiary ciała są największe w tym inercyjnym układzie odniesienia, względem którego ciało jest nieruchome.

3) Rozważmy teraz pewien proces zachodzący w danym punkcie A nieruchomym względem K'. Niech czas trwania tego procesu będzie w K' i K odpowiednio równy:

$$\tau_0 = t'_2 - t'_1 \tag{11.73}$$

$$\tau = t_2 - t_1 \tag{11.74}$$

Z 11.15 wynika:

$$t'_2 = \frac{t_2 - \left(\frac{V}{c^2}\right) x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11.75}$$

$$t'_1 = \frac{t_1 - \left(\frac{V}{c^2}\right) x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11.76}$$

Skąd mamy:

$$\tau_0 = \frac{\tau - \left(\frac{V}{c^2}\right)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11.77}$$

gdzie $x_2 - x_1$ oznacza przesunięcie punktu A wzdłuż osi X układu K w czasie τ. Zatem:
$x_2 - x_1 = V\tau$ oraz $\tau_0 = \tau\sqrt{1-\beta^2}$ czyli

$$\tau_0 < \tau. \tag{11.78}$$

Czas trwania procesu w punkcie *A* jest więc najkrótszy w tym inercyjnym układzie, względem którego *A* jest nieruchomy. Można też powiedzieć, że zegary poruszające się względem inercyjnego układu idą wolniej od nieruchomych zegarów.

Relatywistyczny efekt spowolnienia biegu czasu został m.in. potwierdzony w doświadczeniach z mionami powstającymi górnych warstwach atmosfery ziemskiej.

Załóżmy, że statek kosmiczny odbywa z Ziemi przelot ku jakiejś innej planecie z prędkością $V = \beta c$ i z powrotem. Dla obserwatora na Ziemi czas przelotu:

$$\tau = \frac{2l_0}{V} = \frac{2t_0}{\beta} \tag{11.79}$$

O tyle w czasie przelotu postarzeją się ludzie na Ziemi.
Wg zegara na statku kosmicznym przelot będzie wynosił:

$$\tau_0 = \frac{2t_0}{\beta}\sqrt{1-\beta^2} \tag{11.80}$$

Do chwili powrotu na Ziemię kosmonauci postarzeją się o τ_0. Gdyby podróż mogła odbywać się z prędkością V bliską c to np. dla t_0 = 500 lat, β = 0.9999 mielibyśmy: τ = 1000 lat, τ_0 = 14.1 lat.

4) Rozważmy teraz zdarzenia 1 oraz 2 zachodzące w układzie inercyjnym *K* w punkcie *A* w chwili t_1 oraz w punkcie *B* w chwili t_2. W układzie *K'* zdarzenia te zajdą w puncie *A'* w chwili t_1' oraz w puncie *B'* w chwili t_2'. Z 11.15 wynika:

$$l_{12}^2 - c^2t_{12}^2 = l_{12}'^2 - c^2t_{12}'^2 \tag{11.81}$$

przy czym $l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ oraz (11.82)

$$l_{12}'^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 \tag{11.83}$$

Są to kwadraty odległości między punktami *A* i *B* w układzie *K* oraz między punktami *A'* i *B'* w układzie *K'* a $t_{12} = t_2 - t_1$, $t'_{12} = t'_2 - t'_1$ – odstęp czasu między zdarzeniami w układzie *K* oraz *K'*.

Wielkość:

$$s_{12} = \sqrt{c^2t_{12}^2 - l_{12}^2} \tag{11.84}$$

nazywa się interwałem czasoprzestrzennym dla dwóch zjawisk. (11.81) oznacza, że interwał czasoprzestrzenny danych dwóch zjawisk jest jednakowy we wszystkich inercyjnych układach odniesienia, czyli $s_{12} = s'_{12}$.
Interwał czasoprzestrzenny może być rzeczywisty, zerowy lub urojony.

5) Wzory transformacyjne Lorenza pozwalają znaleźć związek między wartościami prędkości punktu *v* oraz *v'* względem dwóch układów inercyjnych *K* oraz *K'*:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k} \tag{11.85}$$

$$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt'}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt'}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt'}\vec{k}' = v_x'\vec{\imath}' + v_y'\vec{\jmath}' + v_z'\vec{k}' \tag{11.86}$$

gdzie

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'}\frac{dt'}{dt} \tag{11.87}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt'}\frac{dt'}{dt} \tag{11.88}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt'}\frac{dt'}{dt} \tag{11.89}$$

Z 11.15 i 11.16 mamy:

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{\frac{dx'}{dt_1'} + V}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{v_x' + V}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \tag{11.90}$$

$$\frac{dy}{dt'} = \frac{dy'}{dt'} = v_y'\,, \tag{11.91}$$

$$\frac{dz}{dt'} = \frac{dz'}{dt'} = v_z' \tag{11.92}$$

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \left(\frac{V}{c^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1 - V v_x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11.93}$$

Skąd wynika

$$v_x = \frac{(v_x' + V)\left(1 - \frac{V v_x}{c^2}\right)}{1-\beta^2} \tag{11.94}$$

$$v_y = v_y' \frac{1 - \frac{V v_x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11.95}$$

$$v_z = v_z' \frac{1 - \frac{V v_x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11.96}$$

Po uporządkowaniu mamy prawo dodawania prędkości w szczególnej teorii względności:

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + V v_x'/c^2} \tag{11.97}$$

$$v_y = \frac{v_y'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + V v_x'/c^2} \tag{11.98}$$

$$v_z = \frac{v_z'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + V v_x'/c^2} \tag{11.99}$$

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - V v_x/c^2} \tag{11.100}$$

$$v_y' = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - V v_x/c^2} \tag{11.101}$$

$$v_z' = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - V v_x/c^2} \tag{11.102}$$

Dla prędkości małych w porównaniu z *c* mamy oczywiście:

$$v_x = v_x' + V\,,\ v_y = v_y'\,,\ v_z = v_z'\,,\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \tag{11.103}$$

W oparciu o wzory na składanie prędkości relatywistycznych można też znaleźć związek między kwadratami wartości prędkości *v* i *v'*:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \frac{(1-\beta^2)\left(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2\right) + \beta^2 v_x'^2 + 2v_x'V + V^2}{\left(1+\frac{\beta v_x'}{c}\right)^2} \tag{11.104}$$

$$= \frac{(1-\beta^2)v'^2 + c^2\left(1+\frac{\beta v_x'}{c}\right)^2 - c^2(1-\beta^2)}{\left(1+\frac{\beta v_x'}{c}\right)^2} = c^2\left[1 - \frac{\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)(1-\beta^2)}{(1+\beta v_x'/c)^2}\right]$$

oraz

$$v'^2 = c^2\left[1 - \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(1-\beta^2)}{(1-\beta v_x/c)^2}\right] \tag{11.105}$$

Widać, że dla *v'* = *c* mamy *v* = *c* i odwrotnie.

Zatem jeśli prędkość punktu względem inercyjnego układu odniesienia wynosi *c* to powinna być taka sama względem dowolnego innego inercyjnego układu odniesienia.

Jeśli zaś *v'* < *c,* to *v* < *c* i odwrotnie.

Z zasady względności wynika, że matematyczny opis praw fizycznych powinien być taki sam w różnych inercjalnych układach odniesienia.

Warunek ten nazywa się też warunkiem niezmienniczości równań wyrażających prawa fizyczne względem transformacji Lorentza.

W mechanice newtonowskiej *m* = *m'* = const, *F* = *F'* oraz przede wszystkim II zasada dynamiki Newtona $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ jest niezmiennikiem *transformacji Galileusza*. Okazuje się jednak, że ta podstawowa zasada fizyki klasycznej nie jest niezmiennikiem *transformacji Lorentza*.

Einstein pokazał, że masa ciała swobodnego zależy od jego prędkości *v* względem inercjalnego układu odniesienia:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{11.106}$$

m_0 – masa ciała mierzona w układzie inercjalnym, w którym ciało spoczywa (dla *v* = 0) (masa spoczynkowa).

Wzór ten wykazuje całkowitą zgodność z danymi doświadczalnymi dotyczącymi m.in. masy szybko poruszających się cząstek naładowanych.

Zależność (11.106) można wyprowadzić z zasady zachowania pędu.

Rozważmy całkowicie niesprężyste zderzenie centralne dwóch identycznych ciał w układzie odosobnionym.

Przyjmijmy, że w układzie *K* ciało 1 porusza się wzdłuż osi *x* z prędkością v_1 a ciało 2 jest w spoczynku. Po zderzeniu oba ciała poruszają się z prędkością *u*. (rysunek)

Z zasady zachowania pędu:

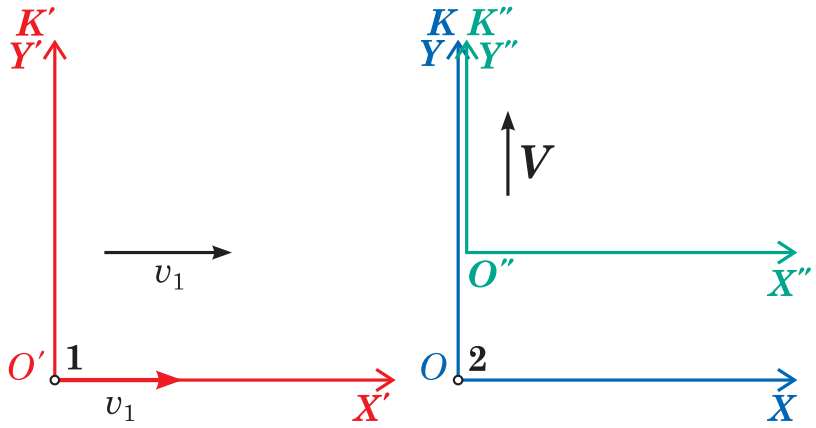
$$m(v_1)\vec{v}_1 = 2m(u)\vec{u} \tag{11.107}$$

lub

$$m(v_1)v_1 = 2m(u)u \tag{11.108}$$

$m(v_1)$, $m(u)$ - masa ciała poruszającego się z odpowiednią prędkością.

Oczywiście $u_x = u, u_y = u_z = 0$.



Rozważmy teraz zderzenie tych ciał w dwóch innych układach odniesienia: *K′* i *K″*, które poruszają się względem *K*, jeden wzdłuż *X* z prędkością v_1, a drugi wzdłuż *Y* z prędkością *V*. W *K′* w czasie przed zderzeniem ciało 1 jest w spoczynku, zaś ciało 2 porusza się z prędkością $v_{2'} = -v_1$. Zatem opis ruchu w układzie *K′* przed zderzeniem jest bardzo podobny jak w *K* (z zamianą ciał i kierunków prędkości). Zatem po zderzeniu:

$$u'_x = u' = -u \tag{11.109}$$

$$u'_y = u'_z = 0 \tag{11.110}$$

Za drugiej strony dla $V = v_1$ z prawa dodawania prędkości relatywistycznych:

$$u' = u'_x = \frac{u_x - v_1}{1 - \frac{u_x v_1}{c^2}} = \frac{u - v_1}{1 - uv_1/c^2} \tag{11.111}$$

czyli

$$-u = \frac{u - v_1}{1 - uv_1/c^2} \tag{11.112}$$

i

$$v_1 = \frac{2u}{1 + \left(\frac{u}{c}\right)^2} \tag{11.113}$$

Podstawiając wyrażenie na v1 do (11.108) możemy łatwo wyznaczyć *m*:

$$m(v_1) = \left[1 + \left(\frac{u}{c}\right)^2\right] m(u) \tag{11.114}$$

W celu znalezienia związku między $m(u)$ oraz $m(v_1)$ i $m(0) = m_0$ rozważymy teraz zderzenie ciał w *K″*. Z zasady zachowania pędu:

$$m(v_1'')\vec{v}_1'' + m(v_2'')\vec{v}_2'' = 2m(u'')\vec{u}'' \tag{11.115}$$

Rzut na oś *Y″* daje:

$$m(v_1'')v_{1y}'' + m(v_2'')v_{2y}'' = 2m(u'')u_y'' \tag{11.116}$$

Wartości rzutów prędkości na osie układu *K″* można znaleźć ze wzorów na relatywistyczne dodawanie prędkości przy przejściu od *K* do *K″*:

$$v_x'' = \frac{v_x\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1-Vv_y/c^2} \tag{11.117}$$

$$v_y'' = \frac{v_y - V}{1-Vv_y/c^2} \tag{11.118}$$

$$v_z'' = \frac{v_z\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1-Vv_y/c^2} \tag{11.119}$$

Ponieważ:

$$v_{1x} = v_1 \tag{11.120}$$

$$v_{1y} = v_{1z} = 0 \tag{11.121}$$

$$v_{2x} = v_{2y} = v_{2z} = 0 \tag{11.122}$$

$$u_x = u \tag{11.123}$$

$$u_y = u_z = 0 \tag{11.124}$$

to:

$$v_{1x}'' = v_1\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2} \quad , \quad v_{1y}'' = -V \quad , \quad v_{1z}'' = 0 \tag{11.125}$$

oraz

$$v_1'' = \sqrt{v_1^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)+V^2} \tag{11.126}$$

$$v_{2x}'' = v_{2z}'' = 0 \tag{11.127}$$

$$v_{2y}'' = -V \tag{11.128}$$

$$v_2'' = V \tag{11.129}$$

$$u_x'' = u\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2} \tag{11.130}$$

$$u_y'' = -V \tag{11.131}$$

$$u_z'' = 0 \tag{11.132}$$

$$u'' = \sqrt{u^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)+V^2} \tag{11.133}$$

Po podstawieniu tych wszystkich wartości do $m(v_1'')v_{1y}'' + m(v_2'')v_{2y}'' = 2m(u'')u_y''$ mamy:

$$m\left(\sqrt{v_1^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)+V^2}\right) + m(V) = 2m\left(\sqrt{u^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)+V^2}\right) \tag{11.134}$$

Ostatnia równość wyraża zasadę zachowania masy w mechanice relatywistycznej. W szczególności równość ta powinna obowiązywać dla *V* = 0:

$$m(v_1) + m_0 = 2m(u) \tag{11.135}$$

Zatem w układzie *K* suma mas dwóch ciał przed zderzeniem jest równa sumie ich mas po zderzeniu. Po podstawieniu do (11.114) wartości *m*(*u*) z ostatniego związku otrzymamy:

$$m(v_1) = m_0 \frac{1+(u/c)^2}{1-(u/c)^2} = m_0 \sqrt{\frac{[1+(u/c)^2]^2}{[[1-(u/c)^2]^2]}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{4(u/c)^2}{[1+(u/c)^2]^2}}} \tag{11.136}$$

Wynika stąd nareszcie (!) związek między masą a prędkością ciała:

$$m(v_1) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} \tag{11.137}$$

Zatem podstawowe równanie mechaniki relatywistycznej ma postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\vec{v}\right) = \vec{F} \tag{11.138}$$

lub :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{11.139}$$

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\vec{v} = m\vec{v} \tag{11.140}$$

$\vec{p}$ – pęd ciała w mechanice relatywistycznej.

Wprowadzimy teraz wyrażenie na energie kinetyczną swobodnego punktu materialnego w mechanice relatywistycznej.

Niech punkt *A* początkowo spoczywa, następnie pod działaniem siły $\vec{F}$ uzyska energię kinetyczną W_k, a w końcu niech działanie siły ustanie i punkt *A* będzie ponownie swobodny.

Przyrost energii kinetycznej na drodze $d\vec{r}$**:**

$$dW_k = \vec{F}d\vec{r} \tag{11.141}$$

lub

$$dW_k = \vec{F}\vec{v}dt \tag{11.142}$$

gdyż

$$d\vec{r} = \vec{v}dt. \tag{11.143}$$

Z podstawowego równania dynamiki relatywistycznej:

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m_0 v}{c^2[1-(v/c)^2]^{3/2}}\frac{dv}{dt}\vec{v} \tag{11.144}$$

Stąd:

$$dW_k = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\vec{v}d\vec{v} + \frac{m_0 v dv}{c^2[1-(v/c)^2]^{3/2}}\vec{v}\vec{v} \tag{11.145}$$

Ponieważ $\vec{v}d\vec{v} = vdv$ oraz $\vec{v}\vec{v} = v^2$ to:

$$dW_k = \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\left(1+\frac{(v/c)^2}{1-(v/c)^2}\right) = \frac{m_0 v dv}{\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{11.146}$$

Z drugiej strony ponieważ:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{11.147}$$

to

$$dm = \frac{m_0 v dv}{c^2\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{11.148}$$

Wynika z tego, że przy zmianie prędkości punktu materialnego, jego zmiana energii kinetycznej i zmiana masy są proporcjonalne:

$$dW_k = c^2 dm \tag{11.149}$$

Energia kinetyczna spoczywającego punktu materialnego jest zerowa, a jego masa m_0 (spoczynkowa). Scałkowanie ostatniego związku natychmiast daje:

$$W_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) \tag{11.150}$$

Rozwińmy na dwumian Newtona wyrażenie:

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4+\cdots \tag{11.151}$$

Dla v<<c wystarczy ograniczyć się do pierwszych dwóch wyrazów tego szeregu, co da nam:

$$W_k = m_0c^2\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{m_0v^2}{2} \tag{11.152}$$

(czyli nie ma niespodzianki ☺)

Można też znaleźć łatwo użyteczny związek miedzy przyspieszeniem punktu materialnego a siłą:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v}+m\vec{a} = \frac{dW_k}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}+m\vec{a} = \frac{\vec{F}\vec{v}}{c^2}\vec{v}+m\vec{a} \tag{11.153}$$

Czyli

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}-\frac{\vec{F}\vec{v}}{mc^2}\vec{v} \tag{11.154}$$

$\vec{a}$ ma kierunek siły albo gdy:

1) $\vec{F} \perp \vec{v}$ (11.155)

wtedy $\vec{F}\vec{v}$ = 0 i

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{m_0}\vec{F}$$

2) $\vec{F} \parallel \vec{v}$ i (11.156)

$$\frac{\vec{F}\vec{v}}{c^2}\vec{v} = \left(\frac{v}{c}\right)^2\vec{F}$$

(11.157)

$$\vec{a} = \frac{1-(v/c)^2}{m}\vec{F} = \frac{\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}}{m_0}\vec{F}$$

W przypadku 1) ta sama wartość siły nadaje większe przyspieszenie punktowi materialnemu. Jest to istotne przy obliczeniach związanych z działaniem akceleratorów cząstek naładowanych.

Ze wzoru na energię kinetyczną mamy:

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{W_k}{c^2} \tag{11.158}$$

Podczas wielu procesów pewne formy energii mogą być zamieniane na inne formy energii.

Np. często energia ruchu postępowego ciała zamienia się na jego energię wewnętrzną. W związku z tym należy przypuszczać, że masa ciała wzrasta nie tylko wtedy kiedy uzyskuje ono energię kinetyczną ale i wtedy, gdy następuje wzrost jego całkowitej energii.

W tym celu rozważmy 2 zderzenia identycznych ciał poruszających się swobodnie z prędkościami **v** i –**v** , przy czym jedno ze zderzeń będzie doskonale niesprężyste a drugie doskonale sprężyste. Suma mas relatywistycznych przed zderzeniem:

$$2m = \frac{2m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = 2m_0 + \frac{2W_k}{c^2} \tag{11.159}$$

Po zderzeniu niesprężystym ciała zatrzymują się, a ich energia kinetyczna zamienia się w energię wewnętrzną ciał. Przyrost energii wewnętrznej każdego ciała wyniesie: $\Delta U = W_k$

Zakładając, że układ jest odosobniony, suma mas spoczywających po zderzeniu musi być równa sumie mas przed zderzeniem. Zatem w wyniku zderzenia masa spoczynkowa każdego ciała wzrośnie o wartość:

$$\Delta m_0 = \frac{W_k}{c^2} = \frac{\Delta U}{c^2} \tag{11.160}$$

W przypadku zderzenia sprężystego masa każdego z ciał jest oczywiście równa $m_0 + \frac{W_p}{c^2}$, gdzie W_p – energia potencjalna odkształconego sprężyście ciała.

We wszystkich tego rodzaju przykładach otrzymuje się ten sam wynik: jeśli całkowita energia W ciała zwiększa się o *dW*, to masa tego ciała zwiększa się o:

$$dm = \frac{dW}{c^2} \tag{11.161}$$

Po scałkowaniu tego równania otrzymujemy uniwersalny związek Einsteina:

$$W = mc^2 \tag{11.162}$$

Jest to zasada równoważności masy i energii. Całkowita energia układu iloczynowi jego masy relatywistycznej i kwadratu prędkości światła w próżni.
Z przedstawionych związków łatwo jest podać relację miedzy całkowitą energią ciała swobodnego a jego pędem:

$$W^2 = m^2c^4 = \frac{m_0^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_0^2c^4 + \frac{m_0^2v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_0^2c^4 + m^2v^2c^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2 \tag{11.163}$$

lub krócej:

$$W = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \tag{11.164}$$

Przy przejściu od danego do innego inercjalnego układu odniesienia mimo, że prędkość, masa, pęd i całkowita energia zmieniają się, to W^2-p^2c^2=$m_0^2c^4$ nie zmienia się względem transformacji Lorentza!

Energia całkowita ciała nieruchomego:

$$W_0 = m_0c^2 \tag{11.165}$$

Nazywa się energia spoczynkową ciała. Energie spoczynkową cząstki swobodnej nazywa się energią własną.

Energia spoczynkowa układu cząstek oddziałujących ze sobą nie jest równa sumie energii własnych wszystkich cząstek wchodzących w skład układu. Rozłożenie układu na części elementarne (np. jądra na swobodne protony i neutrony) wymaga wykonania pracy *A* przeciwko siłom wiązania między cząstkami. Z zasady zachowania energii:

$$\sum_{i=1}^{n} m_{0i}c^2 = W_0 + A \tag{11.166}$$

lub:

$$W_0 = \sum_{i=1}^{n} m_{0i}c^2 + W_w \tag{11.167}$$

Gdzie $W_w = -A < 0$ – energia wiązania układu określająca stopień jego trwałości.

W związku z tym masa spoczynkowa układu jest mniejsza od sumy mas spoczynkowych wszystkich jego cząstek w stanie swobodnym:

$$m_0 - \sum_{i=1}^{n} m_{0i} = \frac{W_w}{c^2} < 0 \tag{11.168}$$

Doświadczenia z zakresu fizyki jądrowej potwierdzają zasadę równoważności masy i energii.