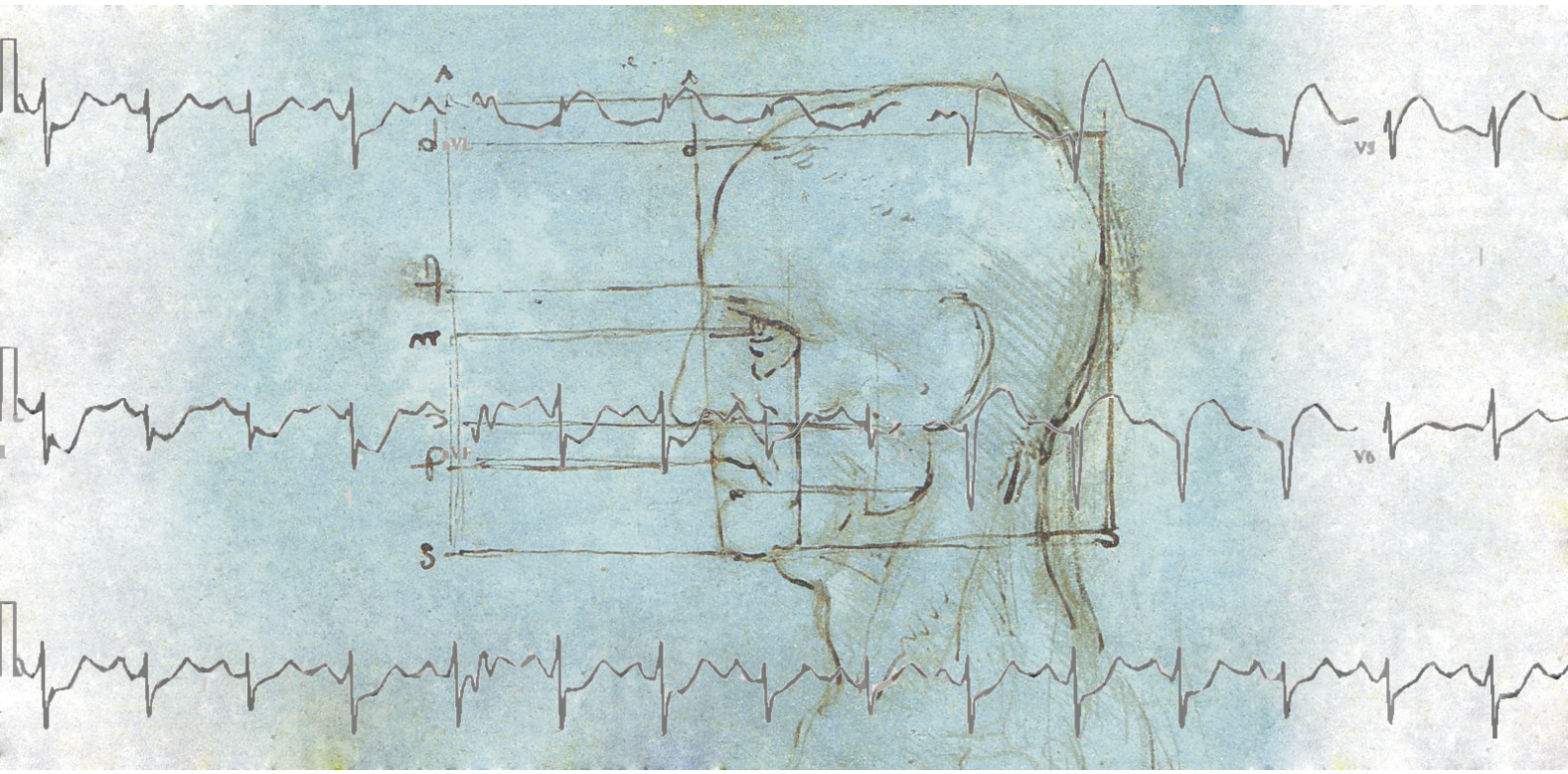


Podstawy fizyki dla fizyki medycznej I

ćwiczenia

Anna Synak

Gdańsk, 2011

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego

Skrypt powstał w ramach projektu „Kształcimy profesjonalistów – kompleksowy program kształcenia skierowany do studentów, absolwentów oraz studentów niepełnosprawnych Uniwersytetu Gdańskiego” współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach środków Europejskiego Funduszu Społecznego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET GDAŃSKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

SEMESTR I

Literatura:

1. **R. Splinter, "Physics in medicine and biology", CRC Press, 2010.**
2. P. Davidovits, „Physics in Biology and Medicine", Academic Press, 2008.
3. A. McCormick, A. Elliot, "Health Physics", Cambridge University Press, 2001.
4. M. Hollins, "Medical Physics", M. Hollins, 1990.
5. **D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, „Podstawy Fizyki", Tom 1, PWN, 2003.**
6. **J. Orear, „Fizyka", Tom 1, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1979.**
7. **J. Kalisz, M. Massalska, J. M. Massalski, „Zbiór zadań z fizyki", PWN, 1974.**
8. **A. Hennel, W. Krzyżanowski, W. Szuszkiewicz, K. Wódkiewicz, „Zadania i problemy z fizyki", PWN, 1974.**
9. **J. Jędrzejewski, W. Kruczek, A. Kujawski, „Zbiór zadań z fizyki dla kandydatów na wyższe uczelnie", Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1984.**
10. **C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, „Mechanika", PWN, 1973.**
11. **A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, „Wstęp do fizyki" Tom 1, PWN,1984.**
12. **H. Szydłowski, „Pracownia fizyczna", PWN, 1997.**
13. **E. Karaśkiewicz, „Zarys teorii wektorów i tensorów", PWN, 1976.**
14. **B. Jaworski, A.Dietłaf, L. Miłkowska, G.Siergiejew, „Kurs Fizyki", Tom I, PWN, 1974.**
15. **M.C. Cedrik, Zadania z fizyki, PWN, 1975.**
16. A.V. Heuvelen, Physics, HCP, 1986.
17. W. Korczak, M. Trajdos, „Wektory, pochodne, całki", PWN, 2009.

Zadania w tym skrypcie pochodzą z źródeł wymienionych powyżej.

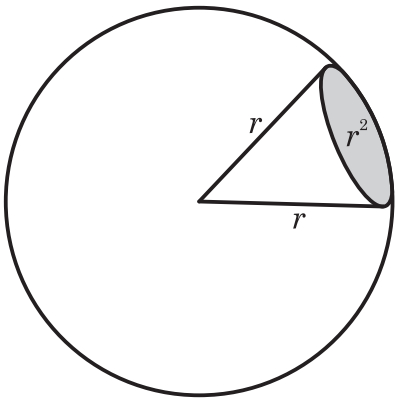
1. Jednostki podstawowe, jednostki pochodne wielkości fizycznych. Międzynarodowy układ jednostek SI.

Jednostki podstawowe układu SI (Systeme International)

1. metr – m
2. kilogram – kg
3. sekunda – s
4. amper – A
5. kelwin – K
6. kandela – cd
7. mol – mol

Jednostki uzupełniające układu SI:

1. radian – rad
2. steradian – sr



Rysunek 1. Graficzne wyobrażenie steradiana.

Każdą jednostkę podstawową lub pochodną można przedstawić w postaci iloczynu jednostek podstawowych i uzupełniających.

$[Y]=\mathbf{m}^a\mathbf{kg}^b\mathbf{s}^c\mathbf{A}^d\mathbf{K}^e\mathbf{cd}^f\mathbf{mol}^g\mathbf{rad}^h\mathbf{sr}^i$

$[m]=m^1kg^0s^0A^0K^0cd^0mol^0rad^0sr^0$ – jednostka podstawowa

$[Pa]=\frac{N}{m^2}=\frac{kg\cdot m}{s^2\cdot m^2}=kg^1s^{-2}m^{-1}$ – jednostka pochodna

Przykłady jednostek pochodnych		Miano
Niuton	**N**	$\frac{kgm}{s^2}$
Pascal	**Pa**	$\frac{N}{m^2}$
Dżul	**J**	$\frac{kgm^2}{s^2}$
Kulomb	**C**	$\frac{A}{s}$
Wat	**W**	$\frac{J}{s}$
Wolt	**V**	$\frac{J}{As}$
Om	**Ω**	$\frac{V}{A}$
Simens	**S**	Ω^{-1}
Farad	**F**	$\frac{As}{V}$
Herc	**Hz**	s^{-1}
Tesla	**T**	$\frac{Wb}{m^2}$
Henr	**H**	$\frac{Wb}{A}$
Weber	**Wb**	Vs

Tabela przedrostków:

1. tera **T** 10^{12}
2. giga **G** 10^{9}
3. mega **M** 10^{6}
4. kilo **k** 10^{3}
5. hekto **h** 10^{2}
6. deka **da** 10^{1}
7. decy **d** 10^{-1}
8. centy **c** 10^{-2}
9. mili **m** 10^{-3}
10. mikro **μ** 10^{-6}
11. nano **n** 10^{-9}
12. piko **p** 10^{-12}
13. femto **f** 10^{-15}
14. atto **a** 10^{-18}

Zadanie 1. Zamiana jednostek np.: m/s na km/h; g/cm^3 na kg/m^3

Zadanie 2. Z ilu mikronów składa się jeden kilometr. Jaką częścią centymetra jest 1mikrometr?

Zadanie 3. Sprawdź wymiar prędkości wyrażonej wzorem (h – stała Plancka [J·s], c – prędkość światła, A – praca, λ – długość fali, m – masa):

$$V = \sqrt{\frac{2h\frac{c}{\lambda} - A}{m}}$$

Zadanie 4. Zastosuj analizę wymiarową do wyprowadzenia równania na szybkość dźwięku w gazie o gęstości ρ, pod ciśnieniem p.

Odp: $V \sim \sqrt{\frac{p}{\rho}}$

2. Pomiary fizyczne, prezentacja wyników.

Pomiary:

- bezpośrednie,
- pośrednie $z = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ np.: $V(s,t)$.

Pomiar, niepewność pomiaru

W ogólnym przypadku wynik pomiaru przedstawiamy w postaci:

$$x_R = x_M \pm \Delta x$$

gdzie:

x_R – wartość rzeczywista wielkości mierzonej,

x_M – wartość uzyskana w wyniku pomiaru,

Δx – niepewność pomiaru.

Niepewności pomiaru: systematyczne, przypadkowe (statystyczne), grube (omyłki, błędy).

Zaokrąglanie wartości wielkości fizycznych i ich niepewności pomiarowych:

1. Zaczynamy zawsze od niepewności pomiarowej;
2. Niepewność zaokrąglamy zawsze w górę do pierwszej cyfry znaczącej (na koniec obliczeń):
   (cyfra znacząca –pierwsza cyfra oprócz stojących na początku zer
   (np.: 0,00523; cyfry znaczące: 5, 2, 3).
3. Jeżeli zaokrąglenie do jednej cyfry znaczącej spowoduje wzrost niepewności większy niż o 10% wtedy zaokrąglamy do dwóch cyfr znaczących;
4. Wartość wielkości fizycznej i jej niepewność mają taką samą ilość miejsc dziesiętnych;
5. Wartość wielkości fizycznej zaokrąglamy stosując następujące zasady:

   Aby zaokrąglić liczbę do *n* cyfr znaczących, należy wszystkie cyfry zapisane z prawej strony *n*-tej cyfry znaczącej obciąć (jeśli znajduje się ona na pozycji ułamkowej) bądź zastąpić je zerami (jeśli *n*-ta cyfra znajduje się na pozycji całkowitej).

   Jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr jest:

   a) mniejsza od 5 to pozostałych cyfr nie zmienia się,

   b) większa od 5, to ostatnią cyfrę zwiększa się o 1 (jeśli ostatnią cyfrą jest 9, to o jeden zwiększa się przedostatnią a ostatnią zamienia na 0).

   c) równa 5 to:
   - jeśli wśród pozostałych cyfr nie wszystkie są zerami to postępujemy jak w p. a)
   - jeśli pozostałe z odrzucanych cyfr są zerami to:
     - jeśli ostatnia pozostawiona cyfra jest parzysta - postępujemy jak w p. a)
     - jeśli ostatnia pozostawiona cyfra jest nieparzysta - postępujemy jak w p. b)

Zadanie 5: Zaokrąglij wynik pomiaru oraz jego niepewność:

Wynik pomiaru i niepewność przed zaokrągleniem:
(136,521 ± 0,115) cm
(136,521 ± 0,195) cm
(0,036255 ± 0,000111) m
$(65{,}273 \pm 0{,}321)10^{-3}$ μF
(251,6767 ± 0,7943) μA
(379823,1245 ± 1245,75) cm^2

Statystyczna analiza serii pomiarów

Skończona liczba pomiarów (10 i więcej), niepewności przypadkowe

Średnia arytmetyczna:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Niepewność standardowa pojedynczego pomiaru (odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru):

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Odchylenie standardowe średniej arytmetycznej:

$$S_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Niepewności pomiarów pośrednich:

Niepewność maksymalna wyznaczona metodą różniczki zupełnej:

Dla wielkości złożonej $z = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$, gdy Δx_1, Δx_2 $\ldots \Delta x_n$ oznaczają odpowiednio niepewności maksymalne wielkości $x_1, x_2 \ldots x_n$ niepewność maksymalną wielkości z wyliczamy:

$$\Delta z = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right| + \cdots . + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right|$$

Niepewność względna:

$$\sigma_w = \frac{\Delta z}{z}$$

Niepewność procentowa:

$$\sigma_w = \frac{\Delta z}{z} * 100\%$$

Odchylenie standardowe pomiaru pośredniego:

$$\delta z = \sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x_1} S_{\overline{x1}}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta x_2} S_{\overline{x2}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\delta f}{\delta x_n} S_{\overline{xn}}\right)^2}$$

gdzie $S_{\bar{X}}$ – odchylenia standardowe średniej arytmetycznej.

Średnia ważona:

Wyniki tej samej wielkości fizycznej otrzymane np.: w trzech różnych laboratoriach

x_1, Δx_1

x_2, Δx_2

...

x_n, Δx_n

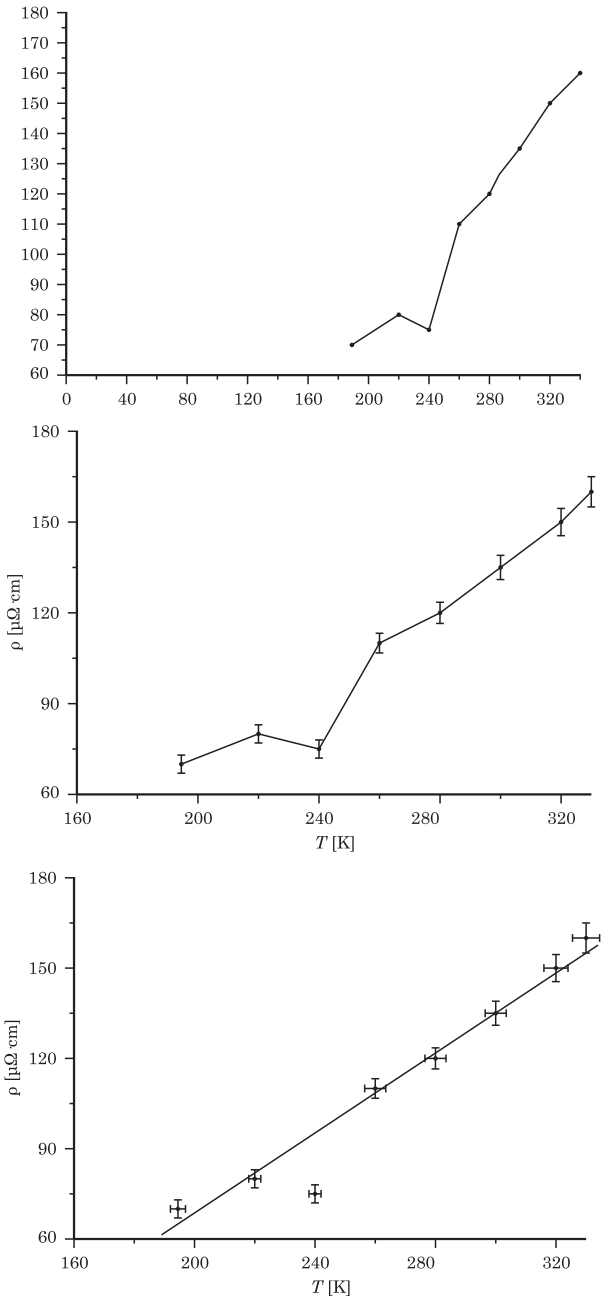
$$\overline{x_w} = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i}$$

$$\overline{\Delta x_w} = \frac{\sum \Delta x_i w_i}{\sum w_i}$$

$$w_i = \frac{1}{(\Delta x_i)^2}$$

Zasady rysowania wykresów:

1. Nie łączymy punktów pomiarowych łamaną! (zależności liniowe – linijka, zależności nieliniowe – krzywik).
2. Krzywą prowadzimy tak, aby przechodziła przez wszystkie prostokąty niepewności maksymalnych lub 70% prostokątów niepewności określonych przez odchylenia standardowe.
3. Nanosimy niepewności pomiarowe (prostokąty niepewności).
4. Odpowiednio dobieramy skalę, opisujemy osie.



Rysunek 2. Zobrazowanie zasad rysowania wykresów

Opracowanie wyników pomiaru wielkości zależnych liniowo

Metoda regresji liniowej:

$$y = ax + b \quad \text{np.: } s = vt \ (a = v,\ b = 0).$$

Określając z wykresu parametry *a* i *b* prostej możemy wyznaczyć niektóre wielkości fizyczne.

$$\overline{a} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} yi}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$\overline{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \overline{a}\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$S_{\overline{a}} = \sqrt{\frac{n}{n-2}\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \overline{a}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{b}\sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}}$$

$$S_{\overline{b}} = S_{\overline{a}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2)(n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2)}}$$

Zadanie 6. Dwóch studentów zmierzyło różnymi przyrządami ten sam opór. Jakie jest najlepsze przybliżenie R i jego niepewność po wzięciu pod uwagę obu wyników.
A: R = (72 $\pm$ 8) Ω
B: R = (78 $\pm$ 5) Ω

Zadanie 7. Celem wyznaczenia prędkości głosu w pręcie aluminiowym zmierzono odległość między 0 a l-tym węzłem w rurze Kundta oraz długość pręta aluminiowego *L*. Prędkość obliczamy ze wzoru $V = V_0 \frac{L}{l}$, gdzie V_0=331m/s. Wykonano 3 serie pomiarów wielkości *l*, *L* otrzymując wyniki:

l: (5,40 $\pm$ 0,01) cm
(5,32 $\pm$ 0,03) cm
(5,40 $\pm$ 0,01) cm
L: (83,5 $\pm$ 0,2) cm
(83,4 $\pm$ 0,1) cm
(83,3 $\pm$ 0,5) cm

Oblicz prędkość głosu oraz wyznacz niepewność maksymalną metodą różniczki zupełnej.

Zadanie 8. W celu wyznaczenia współczynnika załamania światła w pryzmacie metodą kąta najmniejszego odchylenia wyznaczona kąt łamiący oraz kąt najmniejszego odchylenia promieni. Otrzymano następujące wyniki:
$\varphi = 59^0 57` \pm 0^0 05`$
$\delta = 37^0 57` \pm 0^0 05`$
Wyznacz $n = sin\frac{1}{2}(\delta + \varphi)\left(sin\frac{1}{2}\varphi\right)^{-1}$ oraz niepewność *n*.

Zadanie 9. W trakcie pomiaru zmierzono dwie wielkości *x* oraz *y* (tabela). Sprawdź czy istnieje pomiędzy nimi zależność liniowa. Wyznacz parametry nachylenia i przecięcia osi.

x	**y**
-4	-45,6
-2	-19,2
0	6,9
2	32,9
4	58,4
6	85,5
8	103,5
10	140,3

Zadanie 10. W celu wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła rewersyjnego (przy przyjęciu odpowiednich założeń) stosuje się wzór $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$. Wyznacz niepewność g metodą różniczki zupełnej.

3. Rachunek wektorowy: Wektory i skalary. Wersory. Operacje na wektorach. Iloczyn skalarny, wektorowy. Wielkości wektorowe w fizyce.

REPETYTORIUM *- WEKTOR NA PŁASZCZYŹNIE*

WIELKOŚCI FIZYCZNE

Kierunkowe	**Bezkierunkowe**
Wektory	Skalary
Prędkość, siła, pęd, moment magnetyczny	*Masa, czas, temperatura, praca*

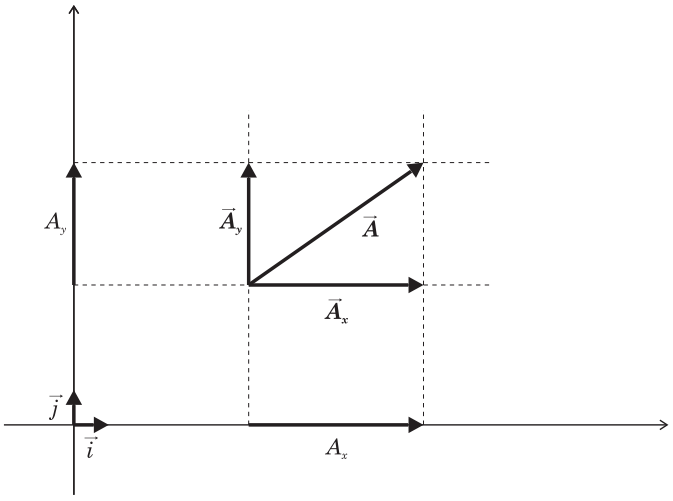
WEKTOR- skierowany odcinek. Podajemy kierunek, długość, punkt zaczepienia.

Każdy wektor, który leży na osi da się zdefiniować jako iloczyn liczby i wersora

Wersor $\hat{a}$ - wektor jednostkowy.

$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \hat{a}$; $|\vec{a}|$-długość wektora $\vec{a}$

$|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = 1$

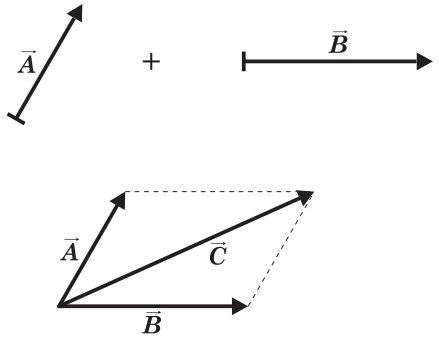


Rysunek 3. Obraz wektora na płaszczyźnie

$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}$ lub inna forma zapisu $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$

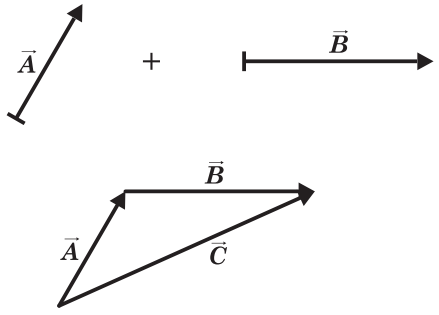
Dodawanie wektorów:

a) Zasada równoległoboku



Rysunek 4. Graficzny obraz zasady równoległoboku

b) Zasada trójkąta



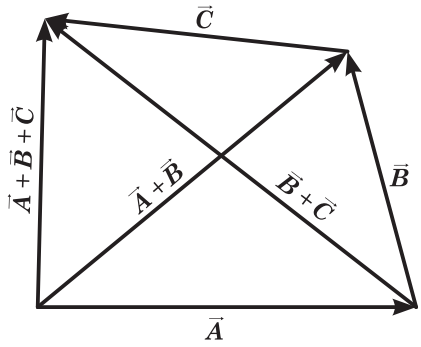
Rysunek 5. Graficzny obraz zasady trójkąta

Prawo przemienności

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

Prawo łączności:

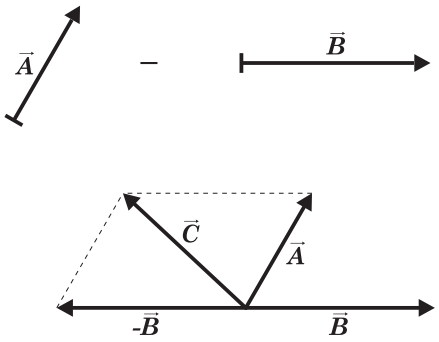
$$\left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$



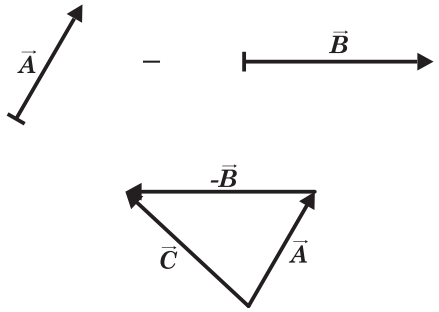
Rysunek 6. Graficzny obraz prawa łączności

Odejmowanie wektorów

A.

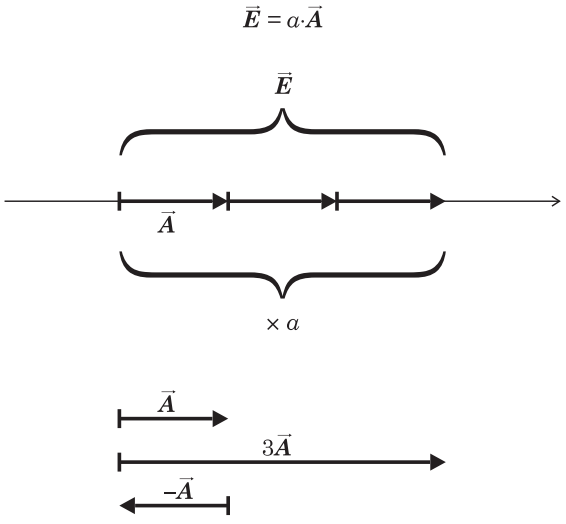


B.



Rysunek 7. Graficzne przedstawienie odejmowania dwóch wektorów na płaszczyźnie A)zasada równoległoboku B) zasada trójkąta

Mnożenie wektora przez liczbę



Rysunek 8. $\vec{A}, 3\vec{A}, -\vec{A}$

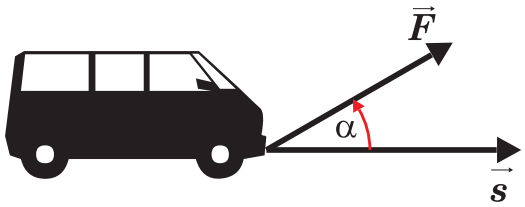
Dla mnożenia wektora przez liczbę zachodzą następujące prawa:

1) $\alpha\vec{A} = \vec{A}\alpha$
2) $\alpha(\beta\vec{A}) = (\alpha\beta)\vec{A} = \alpha\beta\vec{A}$
3) $\alpha(\vec{A} + \vec{B}) = \alpha\vec{A} + \alpha\vec{B}$
4) $(\alpha + \beta)\vec{A} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{A}$
5) $1\vec{A} = \vec{A}$
6) $0\vec{A} = \vec{0}$
7) $\alpha\vec{0} = \vec{0}$

Iloczyn skalarny

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot cos\alpha$$

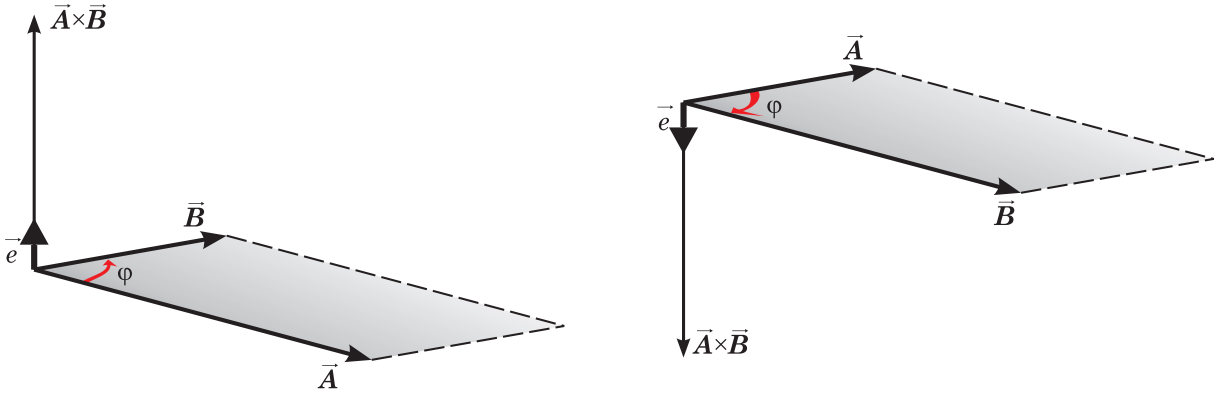
$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha$$



Rysunek 9. Praca $\boldsymbol{W = \vec{F} \cdot \vec{S}}$

Iloczyn wektorowy

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \cdot sin\alpha$$



Rysunek 10. Graficzne przedstawienie iloczynu wektorowego dwóch wektorów

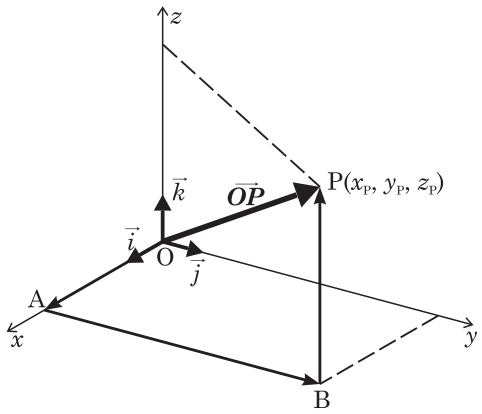
Iloczyn wektorowy **nie jest przemienny**:

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

WEKTOR W PRZESTRZENI

Wektor $\overrightarrow{OP}$, gdzie: O – początek układu współrzędnych

O = (0,0,0); P = (x_p,y_p,z_p)



Rysunek 11.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$$

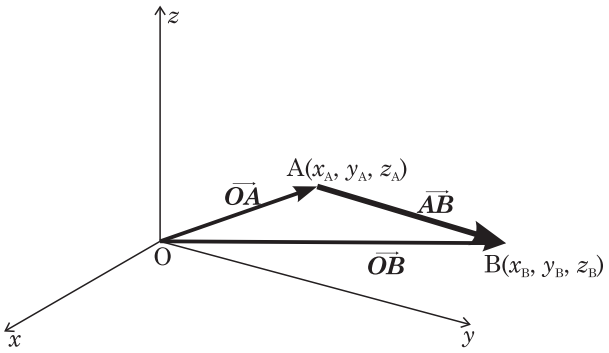
$$\overrightarrow{OA} = [x_p, 0,0]$$

$$\overrightarrow{AB} = [0, y_p, 0]$$

$$\overrightarrow{BP} = [0,0, z_p]$$

$$\overrightarrow{OP} = x_p\vec{\imath} + y_p\vec{\jmath} + z_p\vec{k}$$

Wektor $\overrightarrow{AB}$, gdzie $A = (x_a, y_a, z_a)$ a $B = (x_b, y_b, z_b)$



Rysunek 12.

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OB} = [x_B, y_B, z_B] = x_B\vec{\imath} + y_B\vec{\jmath} + z_B\vec{k}$$

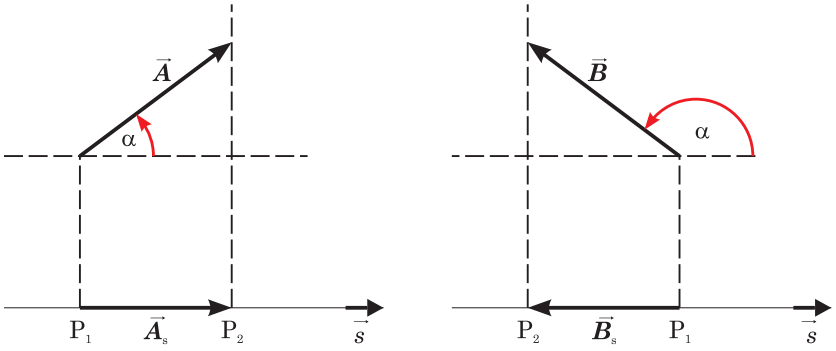
$$\overrightarrow{OA} = [x_A, y_A, z_A] = x_A\vec{\imath} + y_A\vec{\jmath} + z_A\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A]$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Rzut wektora



Rysunek 13 [13]

Wektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ nazywamy rzutem prostokątnym wektora $\vec{A}$ na daną oś

Długość rzutu: $\left|\vec{A}_s\right| = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \left|\vec{A}\right||cos\alpha|$

$$\vec{A}_s = \left|\vec{A}\right| \cdot cos\alpha \cdot \vec{s}$$

Rzut wektora $\vec{A}$ na kierunek wektora $\vec{B}$

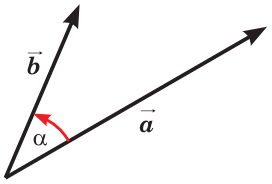
$$\left|\vec{A}\right| \cdot \cos\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = \vec{A} \cdot \hat{B}$$

Dwa wektory $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z], \vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$ są **kolinearne** (równoległe) wtedy, gdy $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

Wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ są **komplanarne** (leżą na jednej płaszczyźnie), wtedy i tylko wtedy gdy

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = 0$$

ILOCZYN SKALARNY WEKTORÓW



Rysunek 14

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Jeżeli $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad |\vec{a}|, |\vec{b}| \neq 0$

$$|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = |\vec{k}| = 1$$

$$\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = |\vec{\imath}| \cdot |\vec{\jmath}| \cdot cos\sphericalangle(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = 0$$

$$\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{z} = 0$$

$$\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = |\vec{\imath}| \cdot |\vec{\imath}| cos\sphericalangle(\vec{\imath}, \vec{\imath}) = 1$$

$$\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Cosinusy kierunkowe – liczby opisujące kierunek wektora w przestrzeni.

Jeżeli dany jest wektor $\vec{a}$ o współrzędnych (wartościach rzutów na osie układu współrzędnych) $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$ i tworzy on odpowiednio z osiami kąty α, β i γ, to cosinusami kierunkowymi wektora $\vec{a}$ są liczby:

$$cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$$

$$cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$$

$$cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Kwadraty cosinusów kierunkowych danego wektora sumują się do jedności:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Wektor jednostkowy: $\vec{e}, |\vec{e}| = 1$

$$\vec{e} = e_x\vec{\imath} + e_y\vec{\jmath} + e_z\vec{k}$$

$$\vec{e} \cdot \vec{\imath} = \left(e_x\vec{\imath} + e_y\vec{\jmath} + e_z\vec{k}\right) \cdot \vec{\imath} = e_x$$

$$\vec{e} \cdot \vec{\imath} = |\vec{e}||\vec{\imath}|cos\sphericalangle(\vec{e}, \vec{\imath}) = cos\alpha = e_x$$

$$\vec{e} \cdot \vec{\jmath} = cos\beta = e_y$$

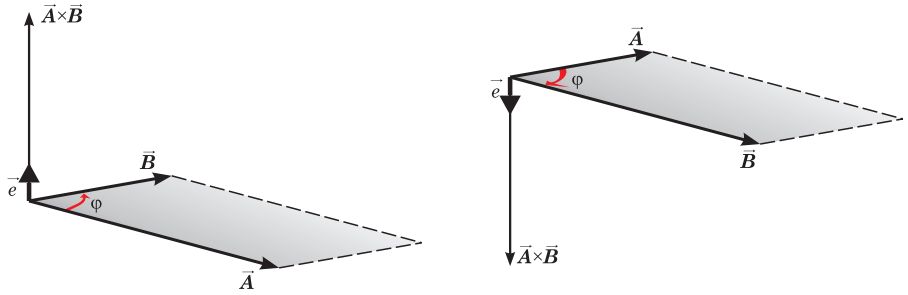
$$\vec{e} \cdot \vec{k} = cos\gamma = e_z$$

$$\vec{e} = \left[e_x, e_y, e_z\right] = [cos\alpha, cos\beta, cos\gamma]$$

Współrzędnymi wektora jednostkowego są jego cosinusy kierunkowe.

ILOCZYN WEKTOROWY

Patrz rys. 10.



$$\vec{A} \times \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|sin\sphericalangle(\vec{A}, \vec{B})$$

$\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|sin\sphericalangle(\vec{A}, \vec{B})$ – pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{A}, \vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} = 0\ lub\ \vec{B} = 0\ lub\ sin\sphericalangle\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = 0$$

$\vec{A} \times \vec{B} = 0 \quad \left|\vec{A}\right|, \left|\vec{B}\right| \neq 0 \quad \vec{A} \parallel \vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}$$

$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = -\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = \vec{k}$$

$$\vec{\jmath} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{\jmath} = \vec{\imath}$$

$$\vec{k} \times \vec{\imath} = -\vec{\imath} \times \vec{k} = \vec{\jmath}$$

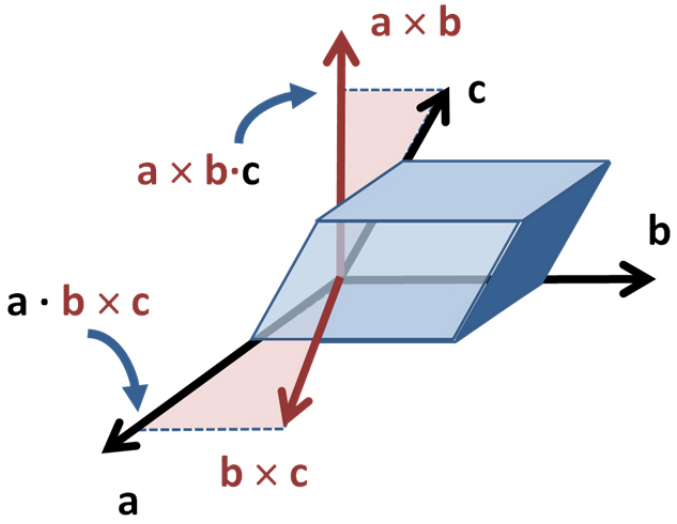
$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}\right) \times \left(B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}\right)$$

$$= \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{\imath} + \left(A_zB_x - A_xB_z\right)\vec{\jmath} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

ILOCZYN MIESZANY

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) * \vec{C}$$

– jego wartość równa się objętości równoległościanu zbudowanego z tych wektorów



Rysunek 15.

REGUŁY RÓŻNICZKOWANIA WEKTORÓW:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{d\vec{a}}{dt}+\frac{d\vec{b}}{dt}+\frac{d\vec{c}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha*\vec{a})=\frac{d\alpha}{dt}\vec{a}+\alpha\frac{d\vec{a}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}*\vec{b}\right)=\frac{d\vec{a}}{dt}\vec{b}+\vec{a}\frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$$

Przykład: $\frac{d\vec{L}}{dt}$, $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$

Zadanie 11 [13]. Jaki warunek muszą spełniać 3 wektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, aby można było zbudować z nich trójkąt?

Zadanie 12 [13]. Dany jest trójkąt zbudowany z trzech wektorów $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Wykazać, że:

a) suma trzech środkowych wynosi 3/2 $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$
b) z trzech środkowych można zbudować trójkąt.

Zadanie 13 [13]. Wyznaczyć środek ciężkości trójkąta, którego wierzchołki są wyznaczone odpowiednio przez wektory $\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3$.

Zadanie 14 [13]. Wykazać, że jeżeli z jednego punktu wychodzą trzy wektory $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$, której końce leżą na tej samej prostej to

$$\vec{C}=\alpha\vec{A}+\mu\vec{B}, gdzie\ \alpha+\mu=1$$

Zadanie 15 [13]. Znaleźć długość i cosinusy kierunkowe wektora: $\vec{A}=-2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+6\vec{k}$

Zadanie 16. Znaleźć iloczyn wektorowy i skalarny dla wektorów podanych w postaci analitycznej:

$$\vec{a}=4\hat{x}+2\hat{y}+1\hat{z}$$

$$\vec{b}=-5\hat{x}+3\hat{y}-2\hat{z}$$

Zadanie 17. Wektory położenia $\vec{r}$ i pędu $\vec{p}$ są dane w postaci analitycznej:

$$\vec{r}=1\hat{x}+2\hat{y}+1\hat{z}$$

$$\vec{p}=2\hat{x}-3\hat{y}+1\hat{z}$$

Oblicz moment bezwładności wiedząc, że moment pędu $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$
$\vec{L}=I*\omega$, a prędkość kątowa jest dana $\vec{\omega}=10\hat{x}+2\hat{y}-14\hat{z}$.

Zadanie 18. Wektor o początku w punkcie P = (–4,2,3) ma długość 14 i cosinusy kierunkowe 2/7, –3/7, –6/7. Znajdź współrzędne końca wektora.

Zadanie 19. Dane są trzy wektory:

$$\vec{A} = 3\vec{\imath} + \boldsymbol{y}\vec{\jmath} + \boldsymbol{z}\vec{k}$$

$$\vec{B} = 1\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$$

$$\vec{C} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 1\vec{k}$$

Wyznacz wartości *y, z* dla których wektor $\vec{A}$ jest prostopadły do wektorów $\vec{B}$ i $\vec{C}$. Jakie kąty tworzy wektor $\vec{A}$ z wektorami $\vec{B} + \vec{C}$ oraz $\vec{A} - 2\vec{B} + \vec{C}$.

Zadanie 20. Wykazać, że $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$

Zadanie 21. Dla zadanego wektora $\vec{A} = 3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}$. Obliczyć:

a) jego długość,
b) długość rzutu wektora na płaszczyznę xy
c) narysować wektor $\vec{B}$ na płaszczyźnie xy prostopadły do $\vec{A}_{xy}$
d) znaleźć wektor jednostkowy $\hat{B}$
e) obliczyć iloczyn skalarny $\vec{A}$ przez wektor $\vec{C} = 2\hat{x}$
f) znaleźć iloczyn wektorowy $\vec{A} \times \vec{C}$
g) znaleźć wektor $\vec{A} - \vec{C}$ oraz $\vec{A} + \vec{C}$

Zadanie 22. Jaki jest kąt między dwiema przekątnymi wewnętrznymi sześcianu?

Zadanie 23. Oblicz objętość czworościanu, którego krawędziami bocznymi są wektory $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ gdy: a) $\vec{A} = [4,5,-2];\ \vec{B} = [-2,3,1];\ \vec{C} = [1,6,-5]$
b) $\vec{A} = [3,2,-4];\ \vec{B} = [1,5,1];\ \vec{C} = [1,6,7]$

Zadanie 24. Dane są wektory, takie że $\vec{a} + \vec{b} = 11\hat{x} - \hat{y} + 5\hat{z}$, $\vec{a} - \vec{b} = -5\hat{x} + 11\hat{y} + 9\hat{z}$. Znaleźć:

a) $\vec{a}\ i\ \vec{b}$
b) kąt $\measuredangle(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b})$

Zadanie 25. Wektory $\vec{a}\ i\ \vec{b}$ spełniają następujące zależności: $4\vec{a} - 5\vec{b} \perp 2\vec{a} + \vec{b}$, $7\vec{a} - 2\vec{b} \perp \vec{a} - 4\vec{b}$. Wyznaczyć kąt zawarty między wektorami $\vec{a}\ i\ \vec{b}$.

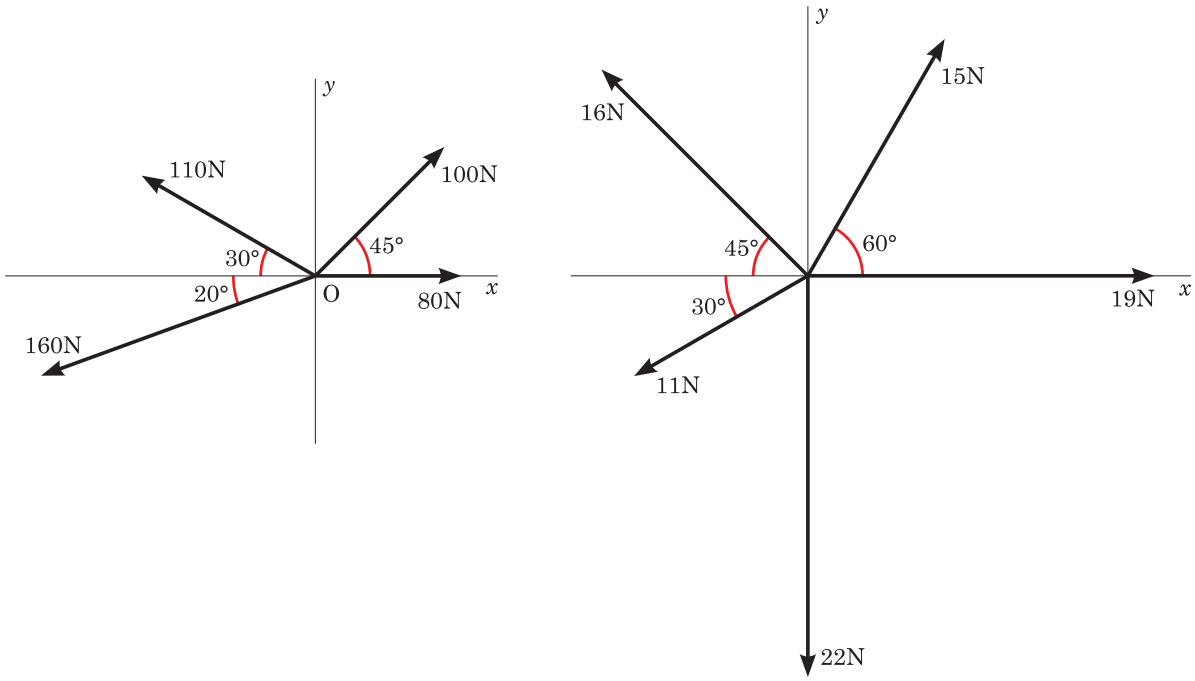
Zadanie 26. Dwie cząstki zostały wysłane z jednego wspólnego źródła i po pewnym czasie przemieszczenia ich wynoszą: $\vec{r}_1 = 4\hat{x} + 3\hat{y} + 8\hat{z}$ oraz $\vec{r}_2 = 2\hat{x} + 10\hat{y} + 5\hat{z}$

a) Narysować położenie cząstek i obliczyć $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$
b) Znaleźć długości wektorów $\vec{r}_1, \vec{r}_2$,
c) Obliczyć iloczyn skalarny oraz wektorowy danych wektorów
d) Obliczyć kąt między wszystkimi możliwymi parami tych wektorów
e) Obliczyć rzut $\vec{r}$ na $\vec{r}_1$

Zadanie 27. Dane są dwa wektory $\vec{a} = 3\hat{x} + 4\hat{y} - 5\hat{z}$, $\vec{b} = -\vec{x} + 2\hat{y} + 6\hat{z}$. Obliczyć:

a) Długość każdego wektora
b) Iloczyn skalarny
c) Kąt zawarty między nimi
d) Kosinusy kierunkowe każdego wektora
e) Sumę, różnicę wektorów
f) Iloczyn wektorowy.

Zadanie 28. Na ciało w punkcie O działają 4 siły w jednej płaszczyźnie jak pokazuje rysunek. Znajdź siłę wypadkową działającą na ciało w punkcie O.



Rysunek 16

Zadanie 29 [5]. Trzy wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ mają długość 50 m każdy i leżą w płaszczyźnie *xy*. Ich kierunki tworzą z dodatnim kierunkiem osi *x* kąty odpowiednio 30°, 195°, 315°.

a) wyznacz długość wektora $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

b) kąt utworzony przez wektor z osią *x*.

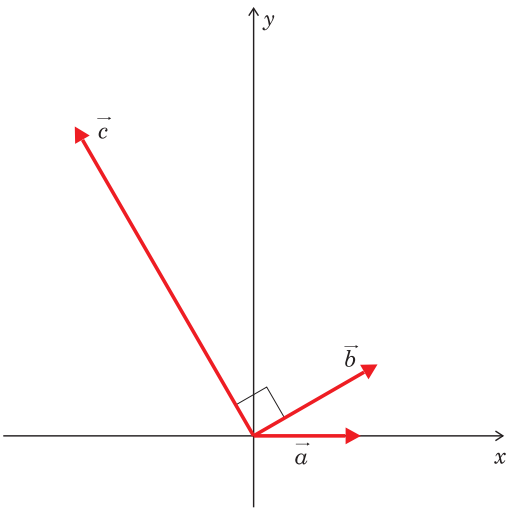
Ile wynosi długość wektora $\vec{d}$ spełniającego związek $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{d})$ oraz kąt utworzony przez ten wektor z osią *x*.

Zadanie 30 [5]. Dane są trzy wektory:

$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$, $\vec{B} = -3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ i $\vec{C} = 7\hat{\imath} - 8\hat{\jmath}$. Ile wynosi $3\vec{C} \cdot (2\vec{A} \times \vec{B})$?

Zadanie 31 [5]. Trzy wektory przedstawione na rysunku mają długość: $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 10$ m. Wyznacz:

a) Składową *x*
b) Składową *y* wektora *a*
c) Składową y wektora *b*
d) Składowa *y* wektora *c*
e) Ile wynoszą wartości *p* i *q* jeśli $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$



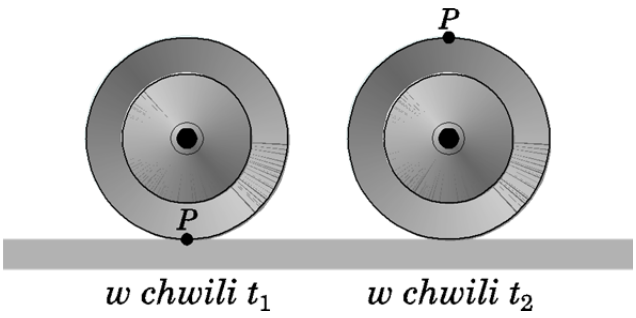
Rysunek 17.

Zadanie 32. Moment siły względem danego punktu jest określony wzorem $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ gdzie $\vec{r}$ jest wektorem o długości równej odległości tego punktu od punktu przyłożenia siły $\vec{F}$.
Niech siła $\vec{F} = -3\hat{x} + \hat{y} + 5\hat{z}$ działającą na punkt (7,3,1)

a) Jaki jest moment siły względem początku układu współrzędnych?
b) Jaki jest moment siły względem punktu (0,10,0)?

Zadanie 33 [5]. Koło o promieniu 45 cm toczy się bez poślizgu po poziomym podłożu (rys. obok). W chwili t_1 kropka P namalowana na jego obręczy znajduje się w punkcie zetknięcia koła z podłożem, a do późniejszej chwili koło wykonuje pół pełnego obrotu. Ile wynosi:

a) Długość wektora przemieszczenia punktu P w przedziale czasu od t_1 do t_2.
b) Kąt utworzony przez ten wektor z podłożem?



Zadanie 34. W równaniu $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ przyjmij q=2, $\vec{v} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 6\hat{k}$, $\vec{F} = 4\hat{\imath} - 20\hat{\jmath} + 12\hat{k}$. Ile wynosi wektor $\vec{B}$ wyrażony przez wektory jednostkowe, jeśli B_x=B_y.

Zadanie 35 [5]. Wektor o składowych A_x=3, A_y=-4, A_z=5 ma początek w punkcie P=(2,-2,-5). Znaleźć współrzędne końca wektora.

Zadanie 36 [14]. W trójkącie o wierzchołkach A=(1,2,3); B=(3,1,4); C=(-1,1,0) znaleźć na prostej AB taki punkt P, aby wektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CP}$ były prostopadłe względem siebie i obliczyć pole trójkąta ABC.

Zadanie 37. Dane są wektory:

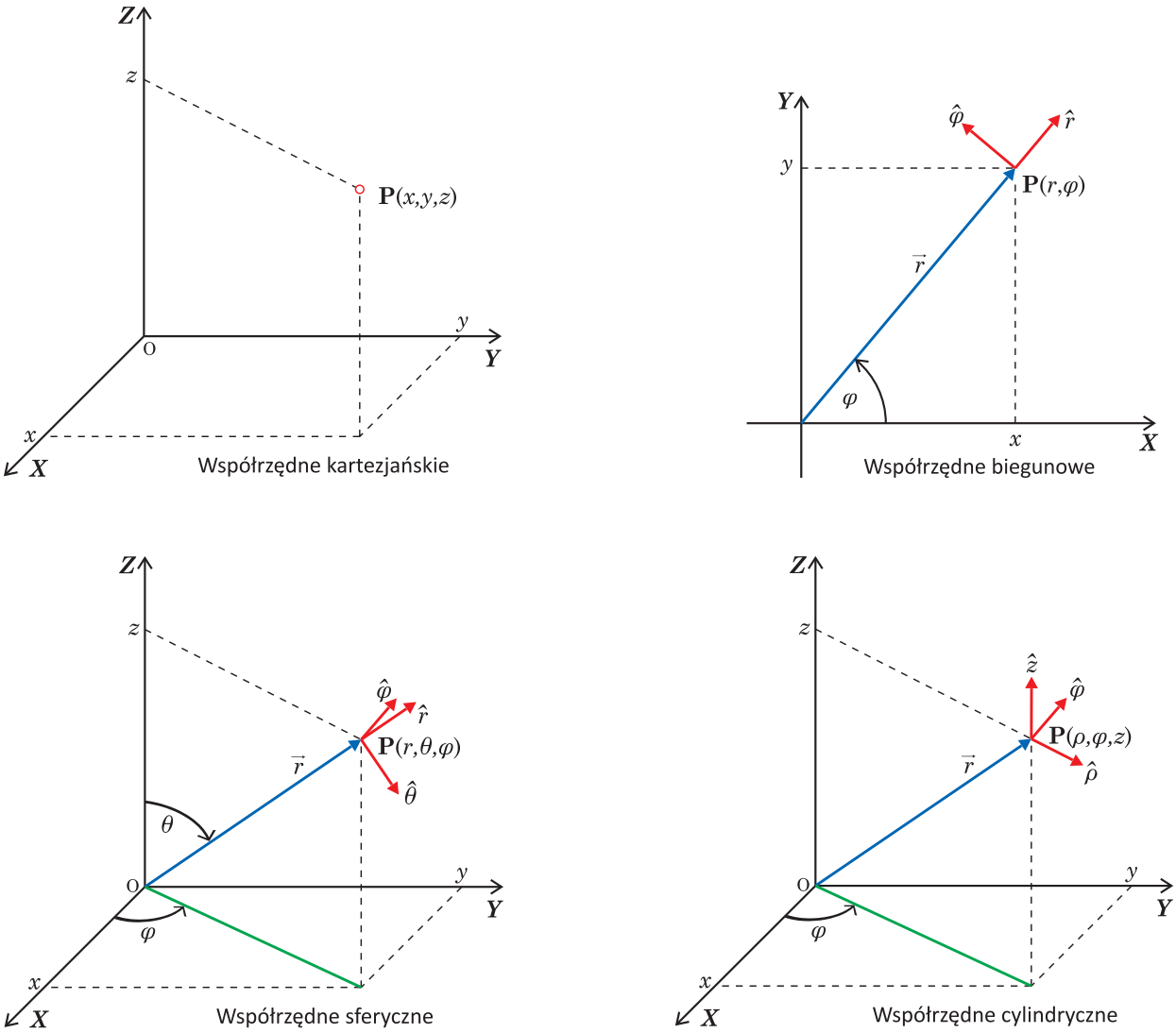
A) $\vec{r}_1 = 3\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z}$, $\vec{r}_2 = -2\hat{x} - \hat{y} - 2\hat{z}$;
B) $\vec{r}_1 = \hat{x} + 3\hat{y} + 4\hat{z}$, $\vec{r}_2 = -2\hat{x} + \hat{y} - 3\hat{z}$.

a) Narysuj $\vec{r}_1$ oraz $\vec{r}_2$oraz $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$
b) Oblicz rzut wektora $\vec{r}$ na $\vec{r}_1$
c) Znaleźć wektory jednostkowe $\hat{r_1}, \hat{r_2}$
d) Oblicz długość rzutu wektora $\vec{r}_2$ na płaszczyznę xy
e) Oblicz kąt między wektorami $\vec{a}$ =3$\vec{r}_1$–2$\vec{r}_2$ oraz $\vec{b} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$
f) Wyznacz cosinusy kierunkowe wektora $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

Zadanie 38. Stałe siły $\vec{F}_1 = \hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}$ i $\vec{F}_2 = 4\hat{x} - 5\hat{y} - 2\hat{z}$ działają równocześnie na cząstkę w czasie przesunięcia z punktu A = (20, 15, 0) do punktu B = (0, 0, 7). Jaka praca została wykonana przy przesunięciu cząstki?

4.Kinematyka punktu materialnego. Układy odniesienia. Ruchy prostoliniowe. Tor. Wektor położenia. Droga. Prędkość. Przyspieszenie.

Układy współrzędnych:



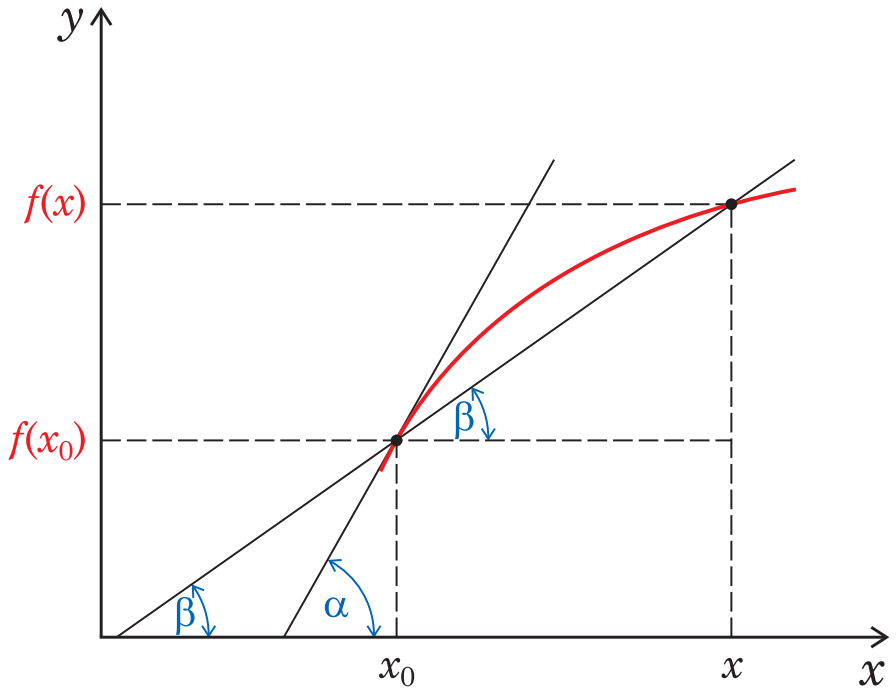
Rysunek 188.

Współrzędne w układzie prostokątnym wyrażone przez współrzędne sferyczne	**Współrzędne w układzie sferycznym wyrażone przez współrzędne prostokątne**
$x = rsin\theta cos\varphi$ $y = rsin\theta sin\varphi$ $z = rcos\theta$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = arctg\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ $\varphi = arctg\frac{y}{x}$

Współrzędne w dwuwymiarowym układzie kartezjańskim wyrażone przez współrzędne biegunowe	**Współrzędne w układzie biegunowym wyrażone przez współrzędne prostokątne**
$x = rcos\varphi$ $y = rsin\varphi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = arctg\frac{y}{x}$

Współrzędne w dwuwymiarowym układzie kartezjańskim wyrażone przez współrzędne cylindryczne	**Współrzędne w układzie cylindrycznym wyrażone przez współrzędne prostokątne**
$\vec{r} = \rho \cdot \hat{\rho} + z \cdot \hat{z}$ $x = \rho \cdot \cos\varphi$ $y = \rho \cdot \sin\varphi$ $z = z$	$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ $z = z$

REPETYTORIUM – elementy rachunku różniczkowego i całkowego



Rysunek 19.

Jeżleli f jest funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej określoną w pewnym otoczeniu punktu x_0 i jeżeli istniej skończona granica ilorazu różnicowego $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ przy $x \to x_0$, to funkja f nazywa się funkcją różniczkowalną w punkcie x_0, a wartość tej granicy nazywa się pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznacza symbolem$f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Punkt x_0 nazywa się punktem różniczkowalności funkcji f.

Geometrycznie:

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

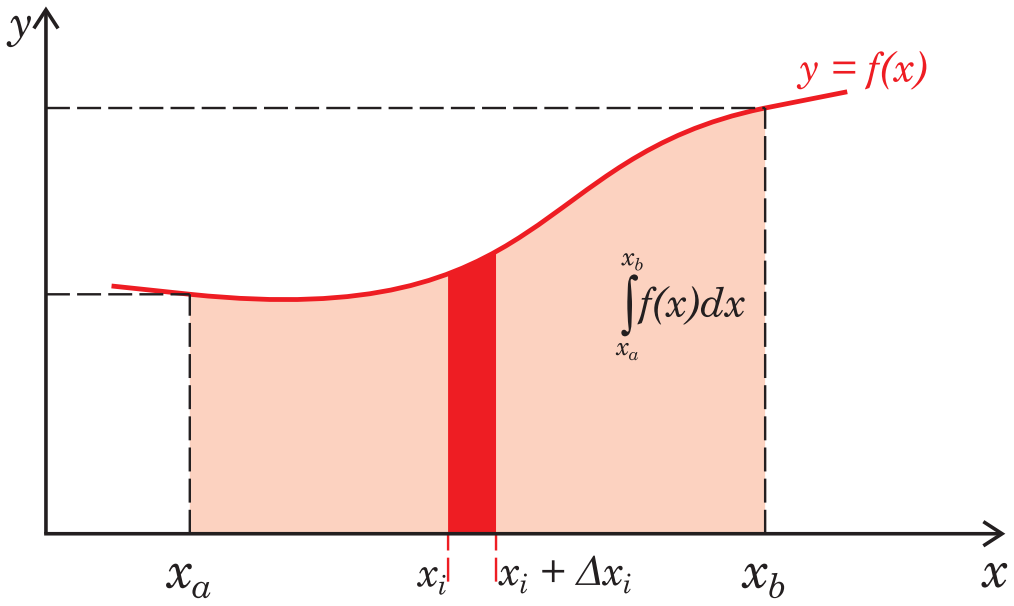
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = tg\beta$$

Fizycznie !!! – pochodna funkcji jest liczbową charakterystyką „szybkości wzrostu" danej funkcji. Pochodna funkcji opisującej pewien proces fizyczny charakteryzuje jego intensywność.

Funkcja	**Pochodna a-stała; f, u, v-funkcje**
$y = a$	$y' = 0$
$y = a \cdot u$	$y' = (a \cdot u)' = a \cdot u'$
$y = u + v$	$y' = (u + v)' = u' + v'$
$y = u \cdot v$	$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$y = x^a$	$y' = a \cdot x^{a-1}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = f(u)$	$y' = f'(u) \cdot u'$ Pochodna funkcji złożonej, np: $y=(\sin x)^4 \quad y'=4(\sin x)^3 \cdot \cos x$ (pochodna "funkcji zewnętrznej" pomnożona przez pochodną "funkcji wewnętrznej")

Jeżeli mamy funkcję wielu zmiennych $z = f(x,y)$ to obliczamy pochodną cząstkową względem jednej ze zmiennych. Drugą ze zmiennych (lub wszystkie pozostałe, jeśli ich jest więcej) traktujemy wtedy jako stałą $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (najpierw ze względu na x, potem y).

Całka oznaczona



Rysunek 190.

Całka oznaczona $\int_{x_a}^{x_b} f(x)dx$ jest liczbowo równa polu pod wykresem funkcji *f*(*x*) w obszarze ograniczonym współrzędnymi x_a *i* x_b.

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)dx = F(x_b) - F(x_a) = F(x)|_{x_a}^{x_b}$$

np.: $\Delta S = \int_t^{t+\Delta t} v dt$

Całkowanie to „działanie odwrotne” w stosunku do różniczkowania.

Podobnie, jak przy obliczaniu pochodnych, całka sumy funkcji równa jest sumie całek. Tak samo, całka iloczynu stałej przez funkcję równa jest iloczynowi tej stałej i całki funkcji.

$$y = \int (u + v)dx = \int u\,dx + \int v\,dx$$

$$y = \int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$$

Niestety, sprawa jest trudniejsza niż przy obliczaniu pochodnych. Odkrycie jakiej funkcji pochodną jest nasze wyrażenie podcałkowe, nie zawsze jest proste.

Pamiętając, jak obliczaliśmy pochodne, łatwo można obliczyć całki typu:

$y = \int x^3 dx = x^4/4+c$ bo $y'=1/4\cdot 4x^3 = x^3$

$y = \int \sin x\, dx = -\cos x + c$ bo $y' = (-1)\,(-\sin x) = \sin x$

$y = \int e^x\, dx = e^x + c$ bo $y' = (e^x + c)' = e^x$

Stosowane najczęściej metody rozwiązywania całek to całkowanie przez części i całkowanie przez podstawienie.

Przy całkowaniu przez części korzysta się ze wzoru**:** $\int \boldsymbol{u\,dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\,du}$.

Przykład: $\int x\cdot\cos x dx = \int x\cdot d(\sin x) = x\sin x - \int \sin x dx = x\cdot\sin x + \cos x$.

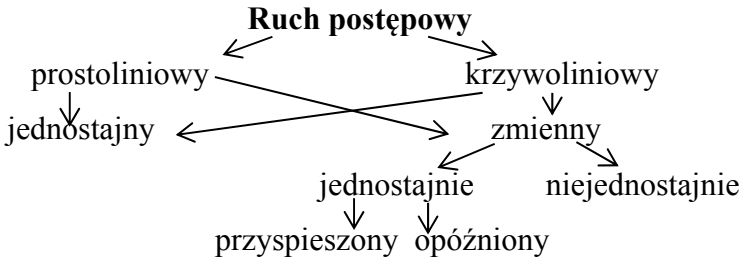
W tym przypadku $u = x$; $v = \sin x$

Przykład całkowania przez podstawienie:

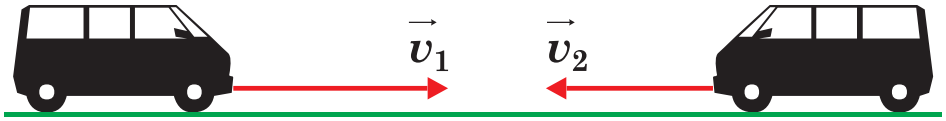
$$\int tgxdx = \int \frac{sinx}{cosx} dx = \int \frac{-1}{t} dt = -ln|t| = -ln|cosx|$$

Podstawiamy $t = \cos x$ czyli $dt = d(\cos x) = -\sin x dx$

REPETYTORIUM – Niektóre rodzaje ruchu punktu materialnego



Składanie prędkości – prędkość względna:

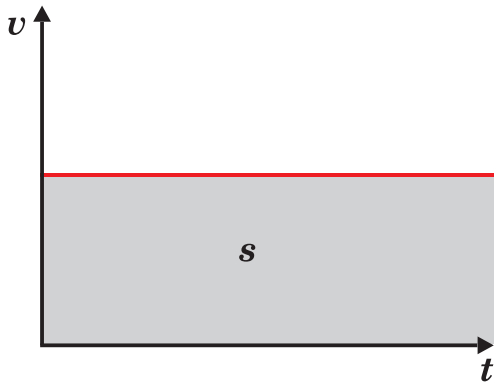


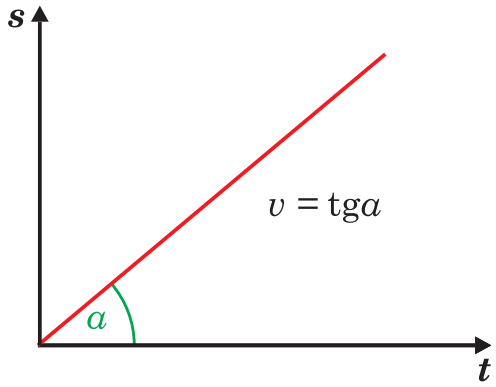
$$v_{wzg} = v_1 + v_2$$



$$v_{wzg} = v_2 - v_1$$

1. Ruch jednostajny prostoliniowy



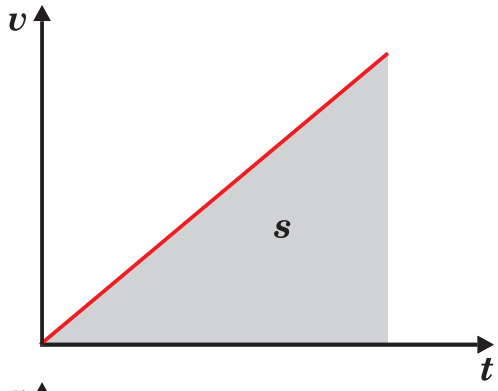


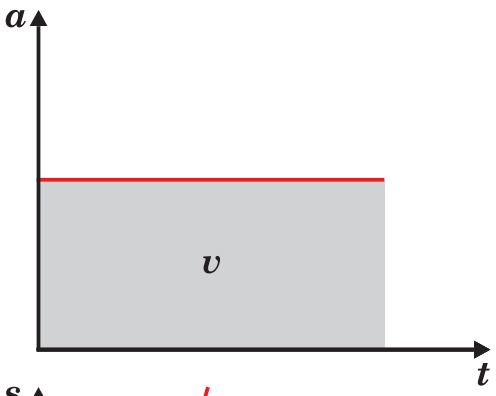
$$\vec{a} = 0$$

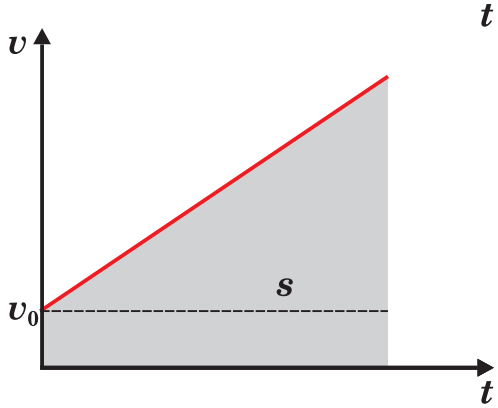
$$\vec{v} = const$$

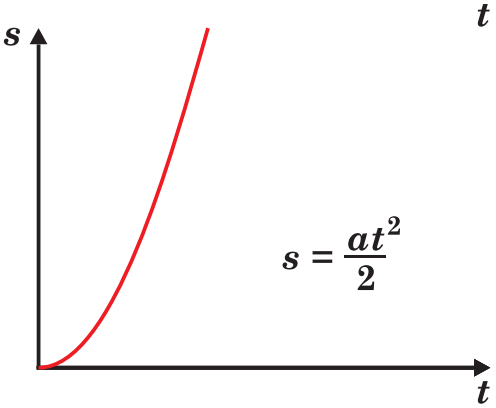
$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{v}t$$

2. Ruch jednostajnie przyspieszony, prostoliniowy







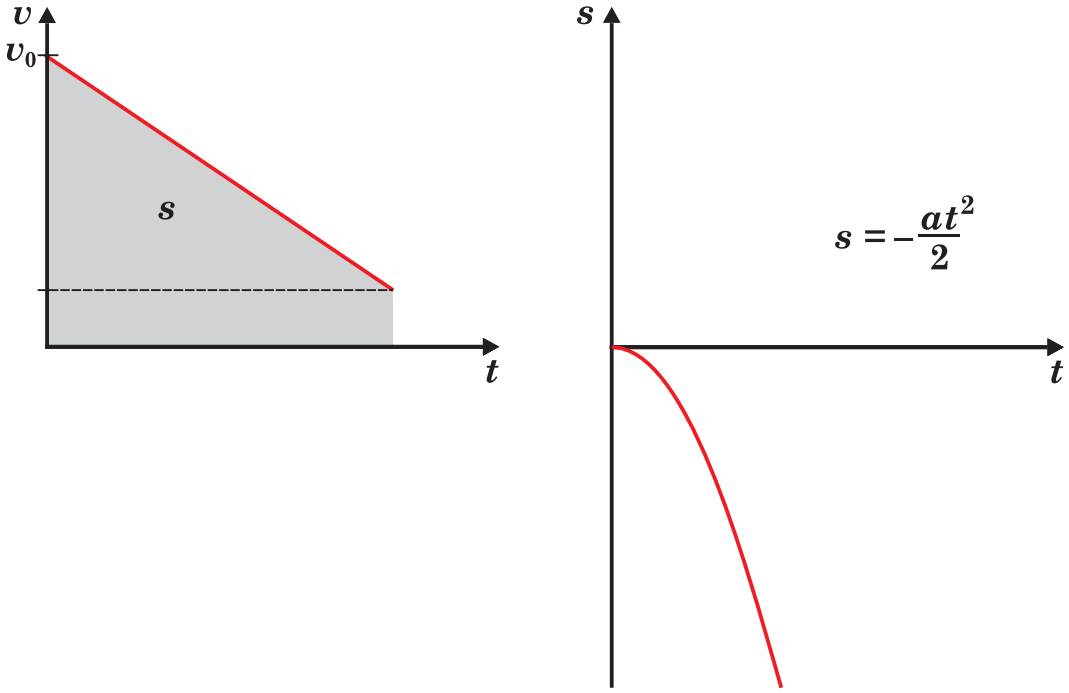


$$\vec{a} = const$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

3. **Ruch jednostajnie opóźniony prostoliniowy**



4. **Spadek swobodny:**

$$t_{sp} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

5. **Rzut pionowy w górę:**

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

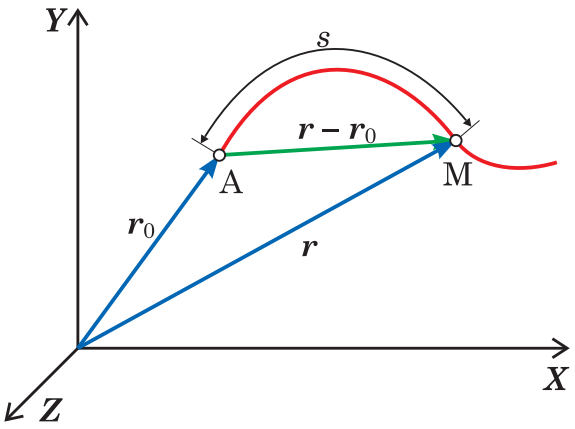
$$t_{wzn} = \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}}$$

6. **Rzut pionowy w dół:**

$$v_k = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Ruch w dwóch i trzech wymiarach

Położenie i przemieszczenie



Wektor $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ poprowadzony z początkowego położenia poruszającego się punktu do jego położenia w danej chwili, nazywamy wektorem przemieszczenia.

Prędkość i przyspieszenie chwilowe

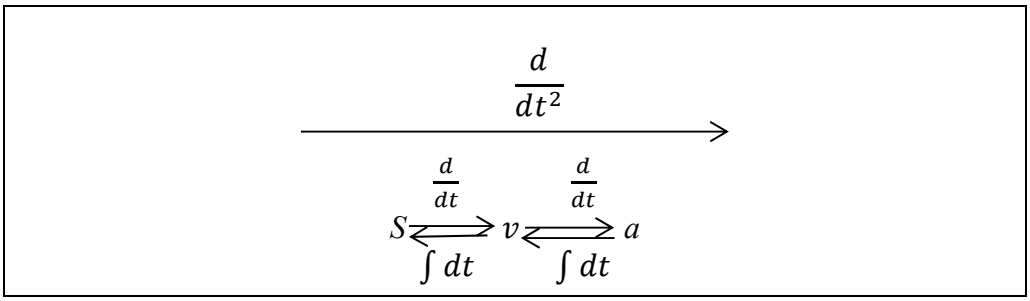
$$f' = \frac{df}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$\vec{v}_{ch} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Prędkość jest styczna do toru.

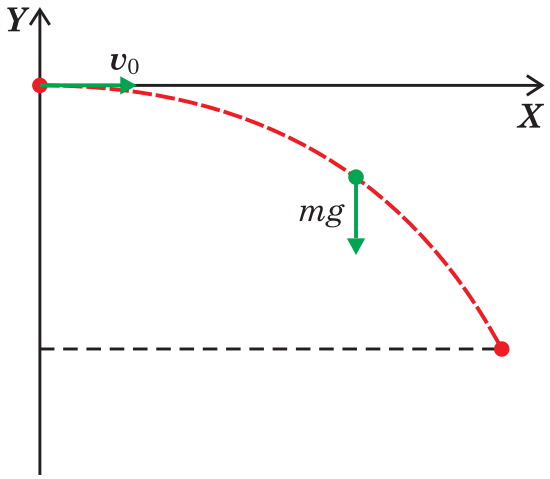
$$\vec{a}_{ch} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Delta S = \int_t^{t+\Delta t} v dt$$

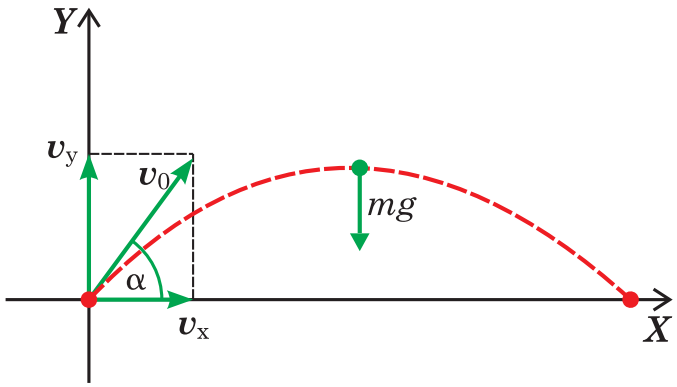


Rzut poziomy

Rzut poziomy jest złożeniem dwóch ruchów: ruchu jednostajnego w kierunku poziomym i spadku swobodnego. Torem ruchu ciała jest parabola.



Rzut ukośny



$0^0 < \alpha < 90^0$

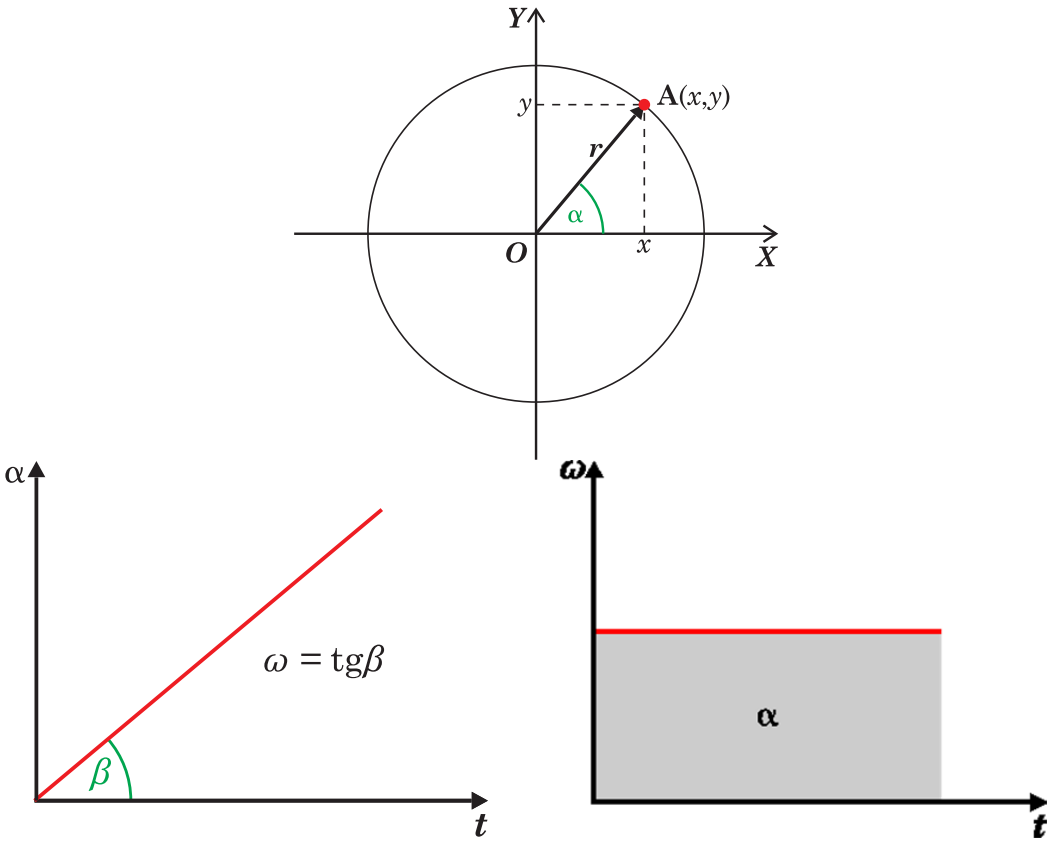
Rzut ukośny złożony jest z dwóch składowych: ruchu jednostajnego w kierunku poziomym i ruchu jednostajnie zmiennego w kierunku pionowym.

Ćwiczenie [8]. Ciało wyrzucono pod kątem α do poziomu z prędkością początkową v_0. Zaniedbując opór powietrza i przyjmując wartość przyspieszenia ziemskiego g, znaleźć
a) Równania ruchu ciała,
b) Równanie toru ciała,
c) Wartość promienia krzywizny toru w zależności od odciętej x położenia ciała
d) Przedyskutować wartość promienia krzywizny dla przypadków $y = 0$ oraz $y = h_{max}$.

Ćwiczenie. Podobnej analizy czyli równania ruchu ciała, równanie toru ciała w przypadku rzutu poziomego.

Ruch punktu materialnego po okręgu

A. Ruch jednostajny



$$\omega = const$$

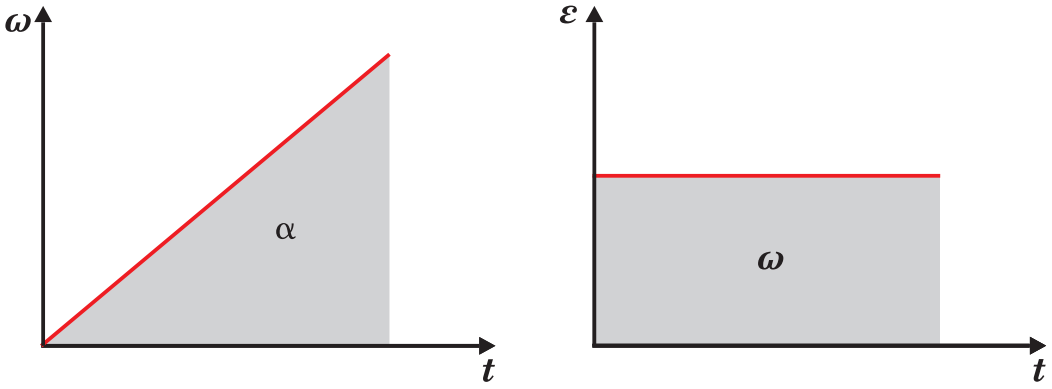
$$\alpha = \omega \cdot t$$

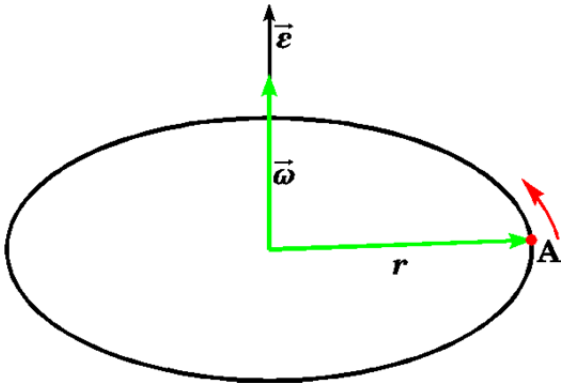
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

T - okres ruchu (czas pełnego obiegu okręgu)

f - częstotliwość (liczba pełnych obiegów okręgu w jednostce czasu)

B. Ruch jednostajnie zmienny





$$\varepsilon = const$$

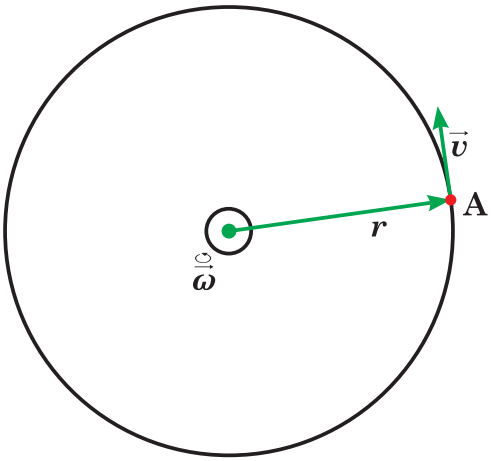
$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Związki między wielkościami liniowymi i kątowymi w kinetyce punktu materialnego w ruchu po okręgu.

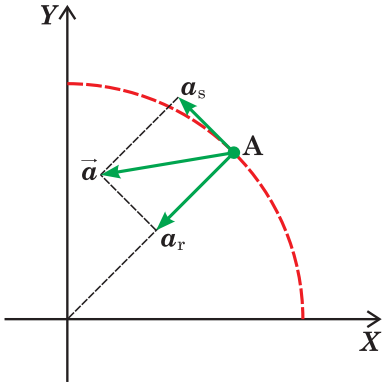


$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$a_r = \omega^2 r$$

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

$$a_s = \varepsilon r$$



$$\vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}_r$$

Kinematyczne równanie ruchu to pewna zależność (lub układ zależności), określająca położenie ciała w przestrzeni w funkcji czasu.

Postać wektorowa kinematycznego równania ruchu to zależność określająca wektor położenia ciała jako funkcję czasu:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

W trójwymiarowej przestrzeni określona następującym układem:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

W przypadku ruchów krzywoliniowych kinematyczne równania ruchu mają postać układu równań z parametrem. Parametrem tym jest czas. Eliminując z tych równań czas można otrzymać jedno równanie współrzędnych przestrzennych, które jest równaniem toru ruchu tego ciała.

Prędkość i przyspieszenie w układzie kartezjańskim i biegunowym

Układ współrzędnych kartezjańskich	Układ współrzędnych biegunowych
$\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$	Prędkość: radialna i transwersalna
$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$	$v_r = \frac{dr}{dt}$ - zbliżanie lub oddalanie się obiektu od centrum układu
$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$	$v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}$ – zmiany położenia w kierunku prostopadłym do promienia wodzącego
$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$	$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}$
$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$	Przyspieszenie: radialne i transwersalne
$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$	$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$
	$a_\varphi = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}$
	$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2}$

Zadanie 39. Rowerzysta przebył 40 km drogi w czasie 2 godzin i 45 km drogi w czasie 3 godzin. Tle wynosiła prędkość średnia?

Zadanie 40. Dwa pociągi oddalone od siebie o 500 m zbliżają się do siebie jadąc w przeciwnych kierunkach z prędkościami odpowiednio 36 km/h i 110 km/h. Po jakim czasie nastąpi spotkanie?

Zadanie 41. Motorówka płynie z prądem rzeki z przystani A do B w czasie $t_1 = 4$ godz., a z B do A w czasie $t_2 = 7$ godz. Prędkość rzeki wynosi 3 m/s. W jakim czasie z przystani A do B dopłynie koło ratunkowe?

Zadanie 42. Samochód przejechał połowę drogi z prędkością v_1 i drugą połowę z prędkością v_2. Ile wynosiła prędkość średnia samochodu?

Zadanie 43. Z balonu wznoszącego się pionowo w górę ruchem jednostajnym z prędkością $v = 45$ m/s upuszczono swobodnie kamień. Jaką drogę w górę przebędzie kamień od momentu wyrzucenia.

Zadanie 44. Zamień prędkość $v = 0.2$ cm/s na km/rok.

Zadanie 45. Piłka spadła z wysokości 50 m nad ziemią. Jaką miała prędkość przed uderzeniem w ziemię. Jak długo spadała? Opór powietrza pomijamy, przyspieszenie ziemskie $g = 9.8$ m/s^2.

Zadanie 46. Poruszający się z prędkością 30 m/s samochód zwolnił do prędkości 10 m/s. Oblicz przyspieszenie z jakim poruszał się samochód. Oblicz dystans jaki przebył w trzeciej sekundzie?

Zadanie 47. Z balonu wznoszącego się z prędkością 13 m/s 300 m nad ziemią wypadła piłka. Znajdź

a) maksymalną wysokość jaką osiągnie piłka,
b) pozycję oraz prędkość 5s po wypuszczeniu,
c) czas po którym uderzy w ziemię.

Opór powietrza pomijamy. Przyspieszenie ziemskie g = 9.81m/s^2.

Zadanie 48 [8]. Ruch punktu dany jest w układzie kartezjańskim układem równań:

$$x = ct \cdot \cos bt$$
$$y = ct \cdot \sin bt$$

gdzie b oraz c są stałymi współczynnikami dodatnimi. Znaleźć w biegunowym układzie współrzędnych:

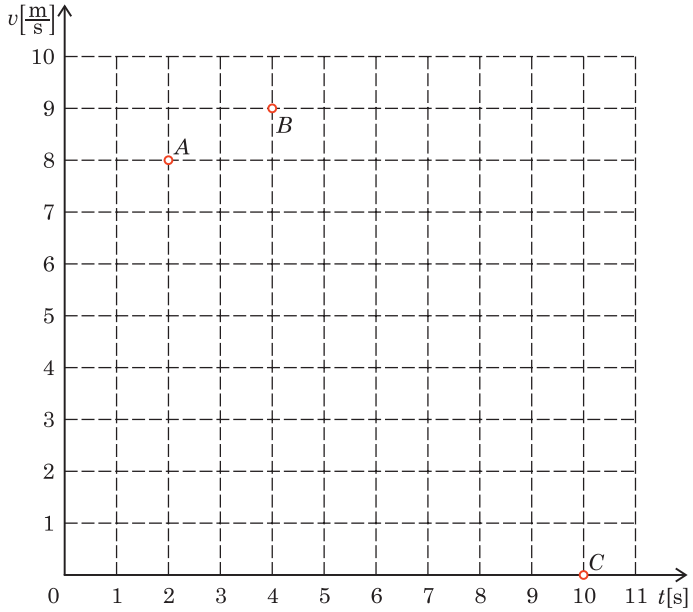
a) Równania ruchu punktu
b) Równanie toru punktu
c) Wartość wektora prędkości punktu
d) Wartość wektora przyspieszenia punktu
e) Składowe wektora przyspieszenia – styczną i normalną
f) Promień krzywizny toru jako funkcje położenia punktu.

Zadanie 49 [8]. Kolista tarcza o promieniu R wiruje wokół swojej osi ze stałą prędkością kątową ω. Ze środka tarczy wyrusza biedronka, porusza się ona wzdłuż wybranego promienia ze stałą prędkością v_0. Znaleźć:

a) Równania ruchu i toru biedronki w nieruchomym układzie odniesienia we współrzędnych kartezjańskich i biegunowych
b) Zależność od czasu wartości wektora prędkości $\vec{v}$ oraz jego składowej radialnej i transwersalnej
c) Zależność od czasu wartości wektora przyspieszenia $\vec{a}$, jak również jego składowych: radialnej, transwersalnej, normalnej i stycznej
d) Zależność wartości promienia krzywizny od czasu
e) Całkowitą długość drogi przebytej przez biedronkę względem nieruchomego układu odniesienia

Zadanie 50 [8]. Rysunek przedstawiam wyniki trzech różnych pomiarów prędkości pewnego ciała w funkcji czasu. Wiedząc, że ciało poruszało się po prostej, zatrzymało się po 10 sek. (tzn. $v = 0$ dopiero w momencie pomiaru C) oraz, że zależność $v(t)$ jest zależnością paraboliczną:

a) Znaleźć analityczną postać $v(t)$
b) Znaleźć prędkość początkową ciała v_0
c) Znaleźć maksymalną wartość prędkości i czas w jakim ciało ją osiągnęło
d) Narysować zależność $v(t)$
e) Obliczyć długość drogi, jaką ciało przebyło w ciągu drugiej i trzeciej sekundy ruchu.

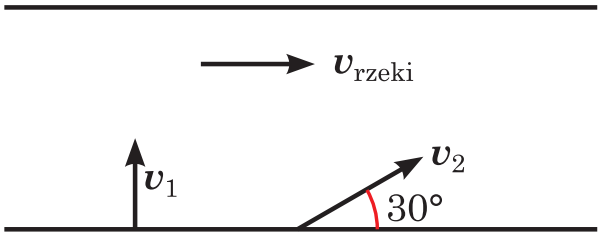


Zadanie 51 [8]. Ciało porusza się ruchem płaskim, przy czym jego prędkość polowa $\dot{s} = br^2$ ($b > 0$), natomiast prędkość radialna $v_r = 0$. Znaleźć równania ruchu oraz równanie toru. Przyjąć warunki początkowe $r(0) = r_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$.

Zadanie 52. Zależność drogi od czasu dla bryły sztywnej przedstawia równanie $S = 5t^2+3t+8$. Jaką wartość ma przyspieszenie w tym ruchu?

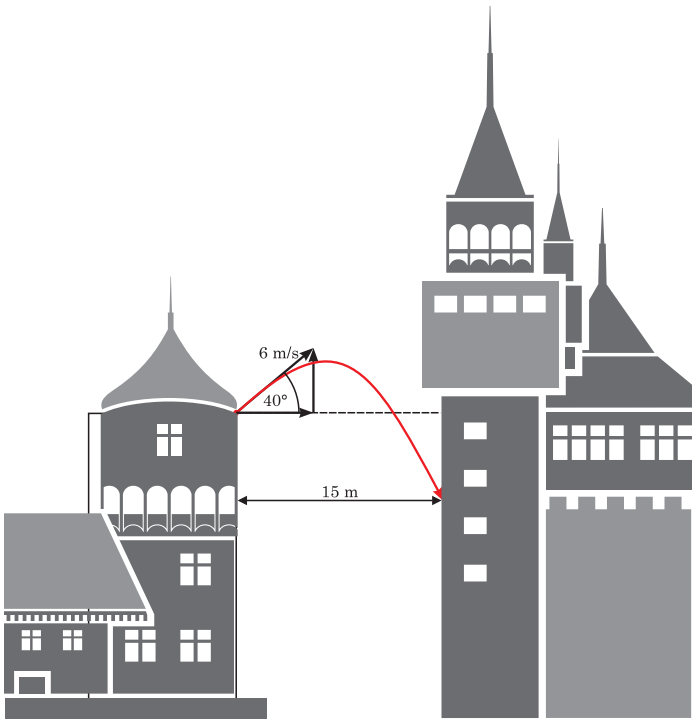
Zadanie 53. Pomiędzy okładki kondensatora płaskiego (odległość d, przyłożone napięcie U) usytuowano pionowo wprowadzono cząstkę o masie m, naładowano dodatnio ładunek q w punkcie równo oddalonym od każdej z okładek i swobodnie puszczono. Znaleźć równanie toru cząstki oraz punkt zetknięcia z okładką.

Zadanie 54. Łódki przepływają rzekę o szerokości 50 m. Wektory łódek o wartości $v_1 = 10$ m/s i $v_2 = 20$ m/s przedstawia rysunek. Rzeka płynie z prędkością 5 m/s. Oblicz czas przepływu obu łódek na drugą stronę.



Zadanie 55 [16].

Z dachu jednego budynku, pod kątem 40° i z prędkością 20 m/s została wyrzucona piłka. Jak daleko powyżej lub poniżej oryginalnego poziomu (tj. poziomu dachu I budynku) uderzy piłka w ścianę sąsiadującego budynku stojącego 50 m dalej przy tej samej ulicy.



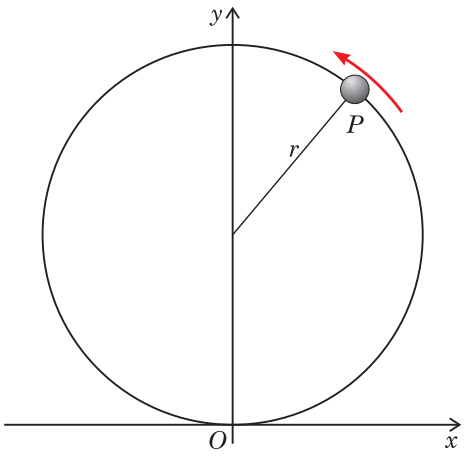
Zadanie 56 [5]. Położenie ciała poruszającego się wzdłuż osi x jest dane wzorem $x = 3t–4t^2+t^3$ przy czym x[m] a t[s].

a) Ile wynosi położenie ciała w chwilach $t = 1, 2, 3$ i 4 s.
b) Jakie jest przemieszczenie ciała od chwili $t = 0$ do chwili $t = 4$ s.
c) Ile wynosi średnia prędkość ciała w przedziale czasu od $t = 2$ s do $t = 4$ s.

Zadanie 57 [5].W czasie ćwiczeń na poziomej wirówce astronauta znajduje się w odległości 5 m od osi obrotu. Jaką drogę przebywa koniec skrzydła w czasie jednego obrotu? Jaka jest wartość jego: prędkości, przyspieszenia? Ile wynosi wówczas okres ruchu?

Zadanie 58 [5]. Jaka jest wartość przyspieszenia dośrodkowego ciała na równiku, wynikająca z ruchu obrotowego Ziemi? Ile musiałby wynosić okres obrotu Ziemi, aby ciała na równiku doznawały przyspieszenia dośrodkowego o wartości 9,81 m/s^2.

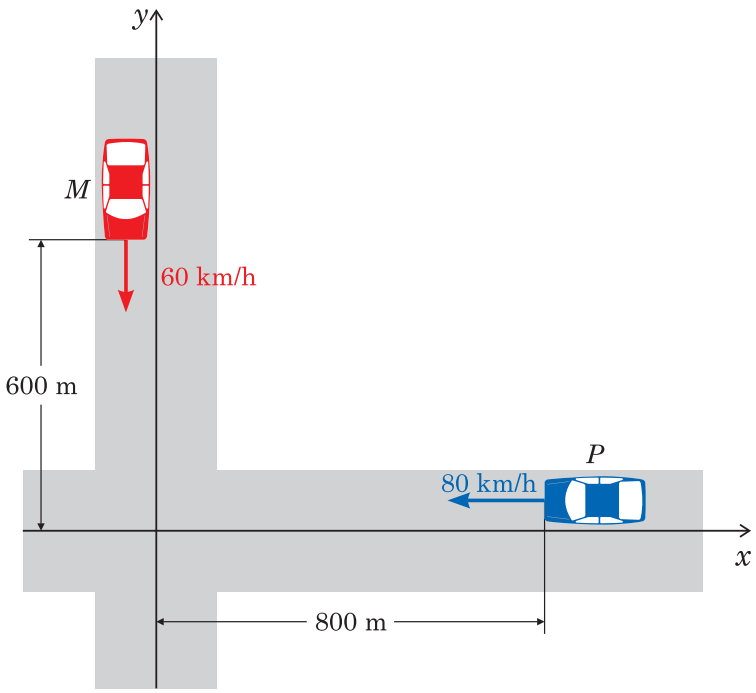
Zadanie 59 [5]. Cząstka P porusza się z prędkością o stałej wartości po okręgu o promieniu $r = 3$ m (rysunek obok) wykonując pełen obieg toru w czasie 20 s. W chwili $t = 0$ cząstka przechodzi przez punkt O. Znajdź wektory położenia cząstki (w stosunku do punktu zero) w chwili, gdy t = 5 s, 7.5 s oraz 10 s podając ich wartości i kąt utworzony z dodatnim kierunkiem osi x. Wyznacz przemieszczenie cząstki w przedziale czasu od końca piątej do końca dziesiątej sekundy ruchu. Oblicz średnią prędkość cząstki w tym przedziale czasu oraz prędkość cząstki na początku końcu tego przedziału. Wyznacz przyspieszenie cząstki na początku i na końcu tego przedziału czasu.



Zadanie 60 [5]. Schody ruchome o długości 15 m przewożą stającą na nich osobę w czasie 60 s. Gdy schody są nieruchome osoba ta wchodzi po nich na górę w czasie 60 s. W jakim czasie dotrze na piętro ta osoba, wchodząc po schodach w ruchu? Czy odpowiedź zależy od długości schodów?

Zadanie 61 [5]. Dwa statki A i B wychodzą jednocześnie z portu. Statek A płynie na północ z prędkością 24 węzłów, a statek b płynie z prędkością 28 węzłów w kierunku 40° na zachód od kierunku południowego. Jaka jest wartość i kierunek prędkości statku A względem B? Po jakim czasie statki będą od siebie odległe o 160 mil morskich? W jakim kierunku względem A będzie się wówczas znajdował statek B?

Zadanie 62 [5]. Dwie drogi przecinają się pod kątem prostym, jak pokazano na rysunku obok. W pewnej chwili samochód policyjny jest odległy od skrzyżowania o 800 m i porusza się z prędkością 80 km/h, a drugi pojazd jest odległy od skrzyżowania o 600 m i porusza się z prędkością 60 km/h.



(a) Ile wynosi prędkość pojazdu M w stosunku do samochodu policyjnego, wyrażona za pomocą wektorów jednostkowych?

(b) Jaki jest kierunek prędkości obliczonej w punkcie (a) w stosunku do linii łączącej obydwa pojazdy w tej chwili?

Zadanie 63. Przyspieszenie punktu poruszającego się po prostej wynosi $a = 12 \cdot Bt$. Oblicz prędkość i przesunięcie, jeśli dla chwili $t = 0$, $v = 0$, $x = 0$. (B – stała)

Zadanie 64. Równanie ruchu punktu materialnego we współrzędnych biegunowych wynosi $r = Ae^{Kt}$, $\varphi = Kt$, gdzie A i K to stałe. Napisać równanie ruchu oraz wyrazić prędkość i przyspieszenie jako funkcję współrzędnych biegunowych.

Zadanie 65. Dwa samochody poruszają się ze stałą prędkością v_A i v_B po torach wzajemnie prostopadłych względem siebie, w kierunkach ich przecięcia. W chwili t_0 współrzędne samochodu A wynoszą: $(x_0, 0)$ a samochodu B: $(0, y_0)$. Po jakim czasie od chwili rozpoczęcia ruchu odległość pomiędzy samochodami będzie najmniejsza?

Zadanie 66. Pociąg jedzie ze stałą prędkością $v_1 = 80$ km/h na wschód w czasie $t_1 = 60$ min, potem w kierunku 50° na wschód od kierunku północnego w czasie $t_2 = 10$ min, a następnie na zachód w czasie $t_3 = 40$ min. Obliczyć średnią prędkość (wartość i kierunek) w czasie tej podróży.

Zadanie 67. Cząstka startuje z początku układu współrzędnych z prędkością początkową $\vec{v}_0 = 3\hat{x}$ m/s i stałym przyspieszeniem $\vec{a} = -1\hat{x} - 0.5\hat{y}$ m/s^2. Wyznaczyć prędkość oraz wektor położenia cząstki w chwili gdy współrzędna *x* cząstki osiąga wartość największą.

Zadanie 68. Wykorzystując właściwości iloczynu skalarnego wektorów wykazać, że w ruchu jednostajnym po okręgu przyspieszenie ciała jest stałe i skierowane do środka okręgu wzdłuż promienia.

Zadanie 69. Po uwiązaniu kamienia na sznurku dziecko zatacza nim w poziomie okrąg o promieniu R = 1.2 m na wysokości h = 1.7 m nad ziemią. Sznurek pęka, kamień odlatuje w bok i spada na ziemię po przebyciu w poziomie odległości z = 7 m. Jaka była wartość jego przyspieszenia dośrodkowego, kiedy poruszał się po okręgu?

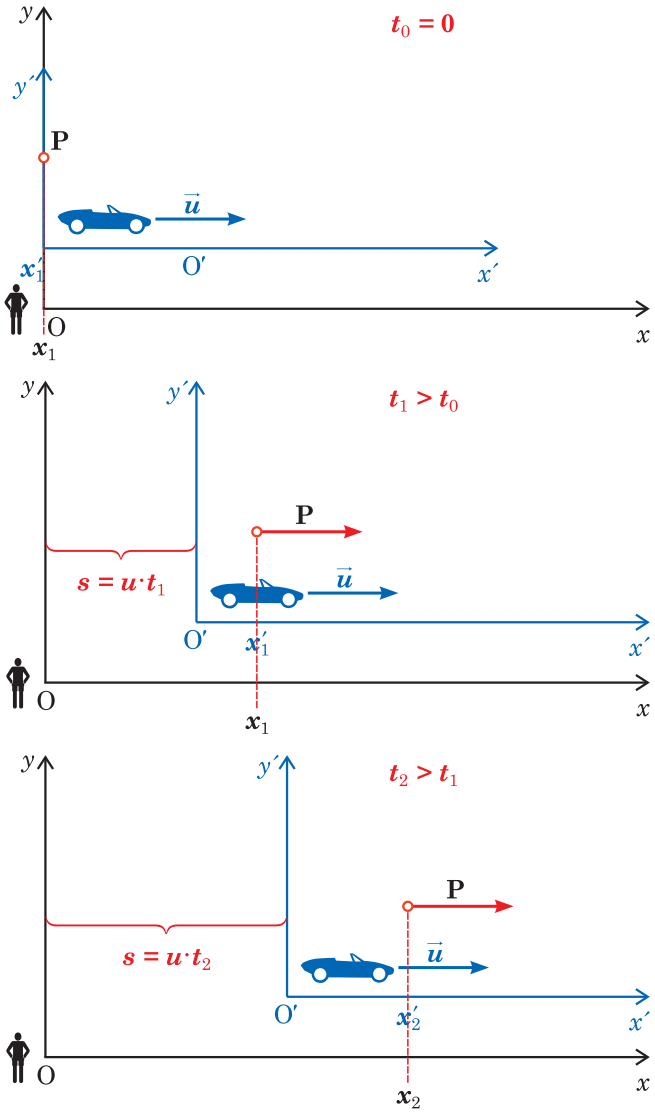
Zadanie 70. Punkt porusza się po okręgu o promieniu r = 0.3 m ze stałym przyspieszeniem stycznym a_s = 0.075 m/s^2. Po jakim czasie od chwili rozpoczęcia ruchu przyspieszenie normalne punktu będzie równe przyspieszeniu stycznemu?

Zadanie 71. Ciało zaczyna się obracać ze stałym przyspieszeniem kątowym ε = 0.04 rad·s^{-2}. Po jakim czasie od chwili rozpoczęcia ruchu wypadkowe przyspieszenie dowolnego punktu ciała będzie tworzyło z prędkością tego punktu kąt 76°?

Zadanie 72. Koło wiruje ze stałym przyspieszeniem kątowym ε = 2 rad·s^{-2}. Po upływie czasu t = 0.5 s od rozpoczęcia ruchu przyspieszenie całkowite koła stało się równe a = 13.5 cm/s^2. Ile wynosi promień koła?

5.Układ inercjalny i nieinercjalny. Względność ruchu. Zasada względności Galileusza. Zasada równoważności. Zasady dynamiki Newtona. Zasada zachowania pędu. Zasada zachowania energii. Praca. Moc. Bryła sztywna. Newtonowskie prawo powszechnego ciążenia.

Transformacje Galileusza:



Ćwiczenie. Zmiana położenia Δx =?

Składanie prędkości v =?

$$\Delta x = \Delta x' + u\Delta t$$

$$v = v' + u$$

$$a' = a$$

$$F' = F$$

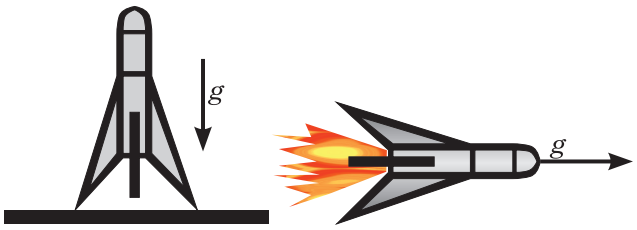
Wnioski:

Ruch jest względny – opis zależy od wyboru układu odniesienia.

Zasada względności Galileusza mówi, że jednostajny prostoliniowy ruch układu jako całości nie wpływa na bieg zachodzących w nim procesów mechanicznych.

Równania Newtona dla punktu materialnego są jednakowe we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Zasada równoważności (w skrócie) mówi, że lokalnie przyspieszenie grawitacyjne jest nierozróżnialne od przyspieszenia bezwładności.



Zasady dynamiki, równania ruchu.

I. Istnieje taki układ odniesienia, względem którego ciało niepoddane działaniu żadnych sił lub poddane działaniu sił równoważących się pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem prostoliniowym jednostajnym. Taki układ odniesienia nosi nazwę inercjalnego układu odniesienia.

II. Przyspieszenie z jakim porusza się ciało względem inercjalnego układu odniesienia jest wprost proporcjonalne do siły wypadkowej sił działających na to ciało i odwrotnie proporcjonalne do jego masy.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m}$$

Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły

$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ - klasycznie

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ - uogólnienie.

Zmiana pędu $\vec{p} = m\vec{v}$ pod wpływem działającej siły:

$$\Delta\vec{p} = \int_{\Delta t} \vec{F}\,dt$$

III. **Jeżeli na ciało A (którego ruch jest rozpatrywany względem inercjalnego układu odniesienia) działa jakaś siła to źródłem tej siły jest inne ciało B. Jeżeli ciało B działa na ciało A siłą $\vec{F}_{BA}$, to ciało A działa na ciało B siła $\vec{F}_{AB}$, której wartość i kierunek są takie same jak wartość i kierunek siły $\vec{F}_{BA}$, ale zwrot jest przeciwny do zwrotu siły $\vec{F}_{BA}$**

Podstawowym zagadnieniem dynamiki jest rozwiązywanie równań ruchu.

Postać ogólna: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$

Równanie ruchu:

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

Układ trzech równań różniczkowych drugiego rzędu

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) = (F_x, F_y, F_z)$$

Aby określić ruch ciała musimy poza rozwiązaniem równań ruchu wyznaczyć wartości wolnych parametrów. Najczęściej dokonujemy tego określając warunki początkowe:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$$
$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$$

gdzie t_0 – wybrana chwila początkowa.

W mechanice klasycznej obowiązuje zasada przyczynowości. Jeśli znamy równania ruchu oraz warunki początkowe możemy jednoznacznie określić stan układu.

Zasada zachowania pędu

W układzie izolowanym, gdy nie działają siły zewnętrzne pęd cząstki nie zmienia się.

$\vec{F}_w = 0 \;\; d\vec{p} = 0$ czyli $\vec{p} = const.$

Środek masy ciała (układu ciał) jest punktem, w którym skupiona jest cała masa w opisie układu jako masy punktowej. Pojęcie środka masy jest użyteczne, pozwala na uproszczenie opisu ruchu układu składającego się z wielu ciał. Wektor wodzący środka masy ma postać:

$$\vec{r} = \frac{\sum_k m_k \vec{r}_k}{\sum_k m_k}$$

Ogólne równanie ruchu ciała ze zmienną masą:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}\frac{dm}{dt} + \vec{F}$$

$\vec{F}$ - zewnętrzna siła działająca na ciało
$\vec{u}$ – zewnętrzna siła działająca na ciało

Wzór Ciołkowskiego (dla rakiety)

$v = uln\left(\frac{m_0}{m}\right)$
m_0 – masa początkowa rakiety

Tarcie

Całość zjawisk towarzyszących przemieszczaniu się względem siebie dwóch ciał fizycznych (t. zewnętrzne) lub elementów tego samego ciała (t. wewnętrzne) i powodujących rozpraszanie energii podczas ruchu. Tarcie jest niezbędnym warunkiem poruszania się istot żywych oraz pojazdów a także funkcjonowania różnych mechanizmów np. sprzęgła. Tam, gdzie jest ono zjawiskiem niekorzystnym, zmniejsza się je, wprowadzając pomiędzy trące mechanizmy odpowiednie substancje. Wzorem jest tu problemu tarcia w stawach łączących kości.

$$\vec{T}_{st} = f_s\vec{N}$$

$$\vec{T}_{kin} = f_k N\frac{\vec{v}}{v}$$

$$T_{kin} < T_{st,max}$$

$$T_{tocz} = f_t\frac{N}{r}$$

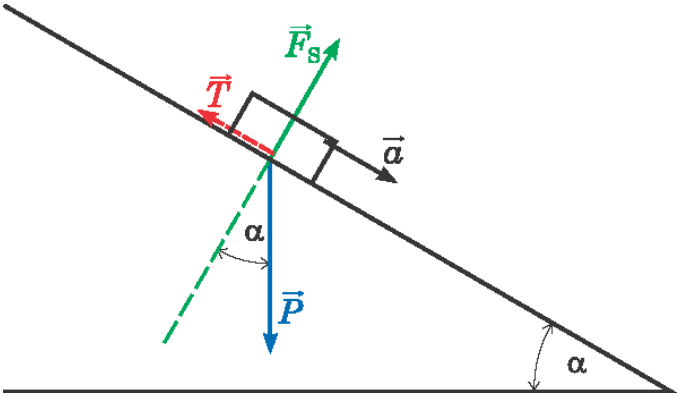
Siła oporu ośrodka

Dla małych prędkości

$$\vec{R} = -b\vec{v}$$

b – współczynnik oporu zależny od rodzaju ośrodka i kształtu ciała

Równia pochyła



$$ma = P_{II} - T = mgsin\alpha - fmgcos\alpha$$

Siły bezwładności (pozorne)

Pojawiają się w układzie nieinercjalnym.

W ruchu postępowym: $\vec{F}_b = -m\vec{a}_{układu}$

Siła odśrodkowa bezwładności: $\vec{F}_{od} = m\omega^2 r$, gdzie ω- prędkośc kątowa wirującego nieinercjalnego układu odniesienia.

Siła Coriolisa:$\vec{F}_C = 2m\,\vec{v} \times \vec{\omega}$, gdzie $\vec{v}$- wektor prędkości ciała poruszającego się względem wirującego układu odniesienia, $\vec{\omega}$-wektor prędkości kątowej wirującego układu odniesienia.

W układzie nieinercjalnym: $m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_b + \vec{F}_C + \vec{F}_{od}$, gdzie $\vec{a}'$-przyspieszenie ciała w układzie nieinercjalnym, $\vec{F}$-wypadkowa wszystkich sił działających na ciało ze strony innych ciał.

Siły zachowawcze

Siła jest zachowawcza jeśli praca przez nią wykonana na drodze o początku *A* i końcu *B* zależy tylko od położenia punktów *A* i *B*, nie zależy zaś od przebiegu drogi, czyli od toru ruchu

Praca siły zachowawczej *F* na zamkniętym torze *S* zawsze równa jest 0

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

Siły sprężystości: $F_S = -kx$

Praca

Jeżeli ruch ciała jest prostoliniowy a wektor siły jest stały, pracę tej siły określa wzór

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = F \cdot S \cdot cos\alpha$$

gdzie: $\vec{F}$ – siła, $\vec{S}$ – przemieszczenie.

W zależności od kąta praca może być liczbą dodatnią, ujemną lub zerowa.

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ praca jest dodatnia

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ praca jest zerowa

$\frac{\pi}{2} = \alpha = \pi$ praca jest ujemna

$\alpha = 0$ wartość pracy jest maksymalna.

W ogólnym przypadku, gdy wektor siły nie jest stały lub przemieszczenie nie jest prostoliniowe, praca jest sumą prac wykonanych na niewielkich odcinkach:

$$W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

gdzie: *L* – całkowita droga, jaką pokonuje ciało.

Jednostką miary pracy w układzie jednostek miar SI jest 1 dżul: 1J = 1N·1m

W ogólności praca zależy od kształtu drogi.

Moc

Szybkość wykonania pracy

Jednostką miary pracy w układzie jednostek miar SI jest 1Wat: 1W = 1J/1s

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Energia potencjalna

Energia jaką ma układ ciał umieszczony w polu sił zachowawczych, wynikająca z rozmieszczenia tych ciał.

Praca wykonana przez siłę pola zachowawczego odbywa się kosztem ubytku energii potencjalnej zgromadzonej w polu.

$$dW = -dE_p$$

Znając rozkład przestrzenny energii potencjalnej pewnego ciała umieszczonego w polu sił można wyznaczyć siłę działającą na to ciało obliczając gradient

$$\vec{F} = -\nabla E_p$$

W pobliżu powierzchni Ziemi, dla niezbyt dużych wysokości (znacznie mniejszych od promienia Ziemi) można przyjąć, że pole grawitacyjne Ziemi jest jednorodnym polem o kierunku pionowym i zwrocie w dół. Przyrost energii potencjalnej grawitacji ciała jest równy pracy siły zewnętrznej, wykonanej przy jego podnoszeniu na wysokość h.

$$E_p = W = mgh$$

W centralnym polu grawitacyjnym trzeba uwzględnić niejednorodność pola grawitacyjnego

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

gdzie: r – odległość od środka masy źródła pola grawitacyjnego do przyciąganego obiektu, G – stała grawitacyjna, M – masa źródła pola grawitacyjnego, m – masa przenoszonego ciała.

Energia potencjalna sprężystości jest energią określaną dla ciała odkształcanego sprężyście.

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

gdzie: k – współczynnik sprężystości, x – odkształcenie, czyli odległość od położenia równowagi.

Jednostką energii potencjalnej jest dżul [J].

Energia kinetyczna

Dla ciała o masie m i prędkości v dużo mniejszej od prędkości światła energia kinetyczna wynosi:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Niezależnie od kształtu przebytej drogi ani postaci siły praca tej siły jest zawsze równa różnicy energii kinetycznej obliczonej na końcu i początku drogi.

Zasada zachowania energii

W układzie izolowanym suma wszystkich rodzajów energii układu jest stała. W konsekwencji, energia w układzie izolowanym nie może być ani utworzona, ani zniszczona, może jedynie zmienić się forma energii.

Newtonowskie prawo ciążenia powszechnego

Ciała w przestrzeni oddziałują pomiędzy sobą siłami grawitacji, które są proporcjonalne do iloczynu mas obu ciał a odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości pomiędzy nimi. Siła oddziaływania działa wzdłuż linii łączącej oba ciała.

$$\vec{F}_{12} = G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Wektor natężenia pola grawitacyjnego:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Energia potencjalna grawitacji:

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

Potencjał pola grawitacyjnego:

$$\varphi = \frac{E_p}{m} = -\frac{GM}{m}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

Powierzchnie, na których potencjał pola ma jednakową wartość φ = const. nazywamy powierzchniami ekwipotencjalnymi. Przy przesunięciu pomiędzy punktami powierzchni ekwipotencjalnej praca sił pola wynosi zero.

Prawa Keplera

I Prawo: Każda planeta Układu Słonecznego porusza się wokół Słońca po elipsie, w której w jednym z ognisk jest Słońce.

II Prawo: W równych odstępach czasu, promień wodzący planety poprowadzony od Słońca zakreśla równe pola.

III Prawo: Stosunek kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca do sześcianu wielkiej półosi jej orbity jest stały dla wszystkich planet w Układzie Słonecznym.

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = const$$

gdzie: T_1, T_2 – okresy obiegu dwóch planet,

a_1, a_2 – wielkie półosie orbit tych planet.

Bryła sztywna - ciało w którym poszczególne punkty pozostają w niezmiennej odległości niezależnie od działających sił.

Kinematyka ruchu postępowego bryły sztywnej sprowadza się do kinematyki punktu materialnego, poruszającego się ruchem postępowym.
Kinematyka ruchu obrotowego bryły sztywnej sprowadza się do kinematyki punktu materialnego poruszającego się po okręgu.
Moment bezwładności punktu materialnego jest iloczynem jego masy i kwadratu odległości od osi obrotu:

$$I = mr^2$$

gdzie: m – masa, r – odległość punktu od osi obrotu.

Moment bezwładności ciała składającego się z n punktów materialnych jest sumą momentów bezwładności wszystkich tych punktów względem obranej osi obrotu:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Dla ciał o ciągłym rozkładzie masy:

$$I = \int_V r^2 dm$$

gdzie V – objętość ciała.

$$E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Moment bezwładności ciała zależy od wyboru osi obrotu, od kształtu ciała i od rozmieszczenia masy w ciele. Podaje się go w kg·m².

Moment siły: $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$

Moment pędu: $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p}$

Twierdzenie Steinera
Moment bezwładności bryły sztywnej względem dowolnej osi jest równy sumie momentu bezwładności względem osi równoległej do danej i przechodzącej przez środek masy bryły oraz iloczynu masy bryły i kwadratu odległości między tymi dwiema osiami.

$$I = I_0 + md^2$$

gdzie: I_0 – moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy, I - moment bezwładności względem osi równoległej do pierwszej osi, d – odległość między osiami, m - masa.

Zestawienie wzorów z kinematyki punktu materialnego i bryły sztywnej

Ruch postępowy	Ruch obrotowy
Przemieszczenie S	Kąt α
Prędkość liniowa v $v = \frac{ds}{dt}$	Prędkość kątowa ω $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$
Przyspieszenie liniowe $a = \frac{dv}{dt}$	Przyspieszenie kątowe $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
Ruch jednostajny	
$S = v \cdot t$	$\alpha = \omega t$
Ruch jednostajnie zmienny	
$S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$	$\alpha = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$

Zastawienie związków pomiędzy wielkościami liniowymi i kątowymi w kinematyce punktu materialnego i bryły sztywnej

$$S = \alpha r$$

$$v = \omega r$$

$$a_s = \varepsilon r$$

$$a_r = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Zestawienie wzorów z dynamiki punktu materialnego i bryły sztywnej

Ruch postępowy	**Ruch obrotowy**
Masa m Siła $\vec{F}$ Przyspieszenie $\vec{a}$	Moment bezwładności I Moment siły $\vec{M}$ Przyspieszenie kątowe $\vec{\varepsilon}$
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$
Prędkość $\vec{v}$ Pęd $\vec{p}$	Prędkość kątowa $\vec{\omega}$ Moment pędu $\vec{L}$
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
$E_k = \frac{mv^2}{2}$	$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$
Zasady dynamiki	
Jeżeli $\sum \vec{F}_{zew} = 0$ to $\vec{v}$ = const.	Jeżeli $\sum \vec{M}_{zew} = 0$ to $\vec{\omega}$=const.
Jeżeli $\sum \vec{F}_{zew}$ = const. to $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$	Jeżeli $\sum \vec{M}_{zew}$ = const. to $\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$

Zadanie 73 [8]. W pewnym polu sił równania ruchu cząstki o masie m = 0.5 kg są następujące: $x = 5t^2 - t$, $y = 2t^3$, $z = -3t + 2$.

Znaleźć zależność od czasu: prędkości cząstki, pędu cząstki, przyspieszenia cząstki, siły działającej na cząstkę, mocy przekazywanej przez pole cząstce.

Zadanie 74 [8]. Cząstka o masie $m = 3$ kg porusza się w polu siły $\vec{F}$ zależnej od czasu w następujący sposób $\vec{F}$ = [15t, 3t – 12,–6t^2] N.
Przyjmując warunki początkowe $\vec{r}_0 = [5,2,-3]\,m$, $\vec{v}_0 = [2,0,1]$ m/s znaleźć zależność położenia i prędkości cząstki od czasu.

Zadanie 75 [8]. Cząstka o masie m porusza się w płaszczyźnie xy zgodnie z następującymi równaniami ruchu

$$x = a\cdot\cos\omega t,\ y = b\cdot\sin\omega t$$

a) Po jakim torze porusza się cząstka?
b) Jak zależy od czasu jej prędkość i energia kinetyczna?
c) Jaka jest wartość i kierunek siły działającej na cząstkę?
d) Ile wynosi praca wykonana przez siłę działającą na cząstkę pomiędzy punktami (a, 0) i (0, b).

Zadanie 76 [8]. Cząstka znajduje się w polu o energii potencjalnej danej wzorem $E_p = Ax^2(x - 3)$. Znaleźć i sklasyfikować punkty równowagi.

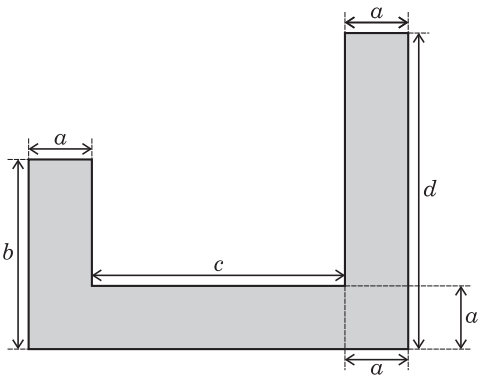
Zadanie 77. [8] Znaleźć siły działające w polach w których energia potencjalna dana jest następującymi wzorami

a) $E_{p1} = \frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{2r^2}$
b) $E_{p2} = \frac{k}{\pi}\cos(\pi r)$
c) $E_{p3} = kr$

Zadanie 78 [8]. Na stole leży sznur, ¼ długości sznura zwisa pionowo w dół. Znaleźć czas, po którym cały sznur spadnie ze stołu, jeżeli w chwili t = 0 jego prędkość jest równa zeru, a całkowita długość sznura wynosi l.

Zadanie 79 [8]. Samochód o masie m hamowany jest siłą oporu $F = -kv^2$. Jaką drogę przebędzie samochód zanim jego prędkość zmaleje do połowy.

Zadanie 80. Znaleźć współrzędne środka masy wzornik wykonanego z płyty stalowej o kształcie jak na rysunku obok. Grubość płyty wynosi k.



Zadanie 81. Ile wynosi w temperaturze pokojowej 300 K prędkość protonu termicznego o energii kinetycznej $E_k = 3/2kT$. Porównać tę prędkość z uzyskaną w dziale protonowym o różnicy potencjałów między katodą i anodą równej 300 kV.

Zadanie 82. Wirnik silnika elektrycznego o mocy 10 kW i prędkości obrotowej 2800 obrotów/min ma moment bezwładności I = 0.025 kg·m^2. Obliczyć moment obrotowy czyli moment siły, przyspieszenie kątowe, moment pędu, energię kinetyczną oraz czas rozruchu.

Zadanie 83. Metalowa tarcza o promieniu r i masie m w czasie Δt pod wpływem zewnętrznego momentu siły doznaje spowolnienia z prędkości ω_0 do $\frac{1}{2}\omega_0$. Podobny efekt zmiany momentu pędu można uzyskać poprzez odchylenie płaszczyzny ruchu o odpowiedni kąt. Jaki? Jak są skierowane momenty sił w I i II przypadku prowadzące do zmiany pędu?

Zadanie 84. Z równi pochyłej nachylonej pod kątem α do poziomu, stacza się bez tarcia i poślizgu pełna, jednorodna tarcza ($I = ½\ mr^2$). Znaleźć przyspieszenie liniowe środka masy tarczy. Tarcza rozpoczynając ruch jest w spoczynku.

Zadanie 85. Jaka powinna być długość drutu miedzianego zawieszonego pionowo na jednym ze swych końców, aby zerwał się pod własnym ciężarem ($R_{Cu} = 2{,}2 \cdot 108$ N/m^2, $\gamma_{Cu} = 8{,}76 \cdot 10^{\,4}$ N/m^3).

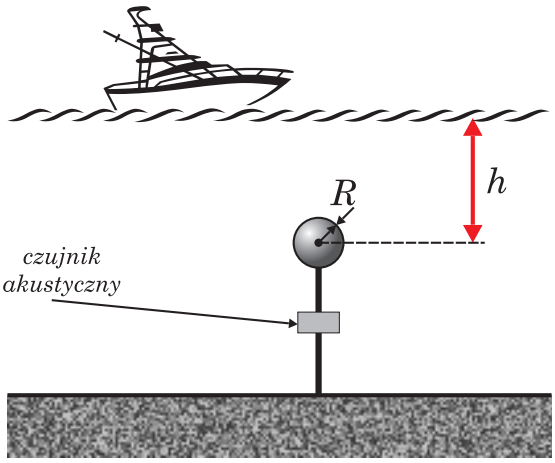
Zadanie 86. Drut stalowy o długości l = 1 m i przekroju poprzecznym s = 0,8 mm^2 jest zawieszony trwale na jednym końcu. Na końcu dolnym zamocowano ciężarek o Q = 49 N. Naciągnięty drut odchylamy do wysokości zawieszenia i swobodnie puszczany. Obliczyć wydłużenie drutu w dowolnym końcu toru ($E = 1{,}96 \cdot 10^{11}$N/m^2).

Zadanie 87. Każde koło samochodu przenosi 25% ciężaru samochodu. Załóżmy, że współczynnik tarcia kinematycznego ślizgowego pomiędzy oponą a nawierzchnią jezdni μ_k = 0,8. Jaki jest czas minimalny zatrzymania się od 100 km/h.

Zadanie 88. Ciężka kulka metalowa o średnicy d = 2,16 cm stacza się po równi pochyłej o długości l = 42 cm i h = 7 cm i potoczywszy się dalej na odległość s = 142 cm zatrzymuje się. Obliczyć współczynnik tarcia przy toczeniu.

Zadanie 89. Pręt aluminiowy o długości l = 10 m i średnicy d = 5 cm^2 umocowany jest górnym końcem i zwisa pionowo w dół. Obliczyć o ile wydłuży się po przyłożeniu ciężaru Q = 500 N. $E_{Al} = 0.7 \cdot 10^{11}$ N/m^2. O ile stopni należałoby podnieść temperaturę pręta, aby otrzymać taki sam efekt wydłużenia liniowego. Współczynnik rozszerzalności cieplnej aluminium $\alpha_{Al} = 2.55 \cdot 10^{-5}$ 1/K.

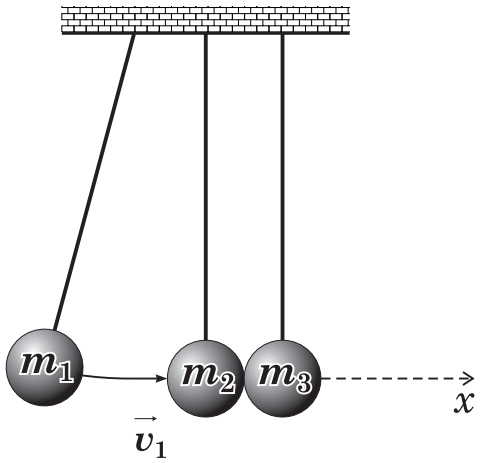
Zadanie 90. W toni morskiej postawiono minę o masie M = 100 kg w postaci kuli o promieniu R, na głębokości h przymocowaną do balastu spoczywającego na dnie, zwalnianego czujnikiem akustycznym. Obliczyć prędkość wypływania boi uwzględniając opór ośrodka lepkiego jakim jest woda. Na jaką wysokość wzniesie się boja po minięciu powierzchni.
($\eta = 1.04 \cdot 10^3$ Pa·s, $\rho_w = 1 \cdot 10^3$ kg/m^3)



Zadanie 91. Ciało o masie $m_1 = 2$ kg zderza się z innym ciałem, które przed zderzeniem znajdowało się w spoczynku i po zderzeniu porusza się w tym samym kierunku z prędkością v_k czterokrotnie mniejszą od swej prędkości początkowej. Ile wynosi masa drugiego ciała? Wyznacz prędkość środka masy tych ciał, jeżeli prędkość początkowa ciała o masie m_1 wynosi $v_p = 4$ m/s.

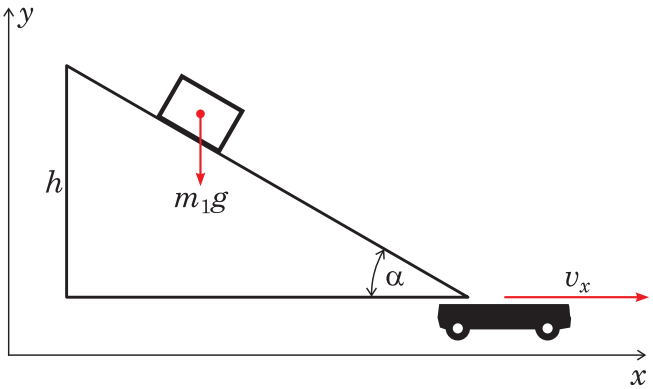
Zadanie 92. Dwie kule o masach m_1 i m_2 poruszające się wzdłuż osi x z prędkościami v_1 i v_2 przeciwnie skierowanymi, zderzają się centralnie ze sobą. Obliczyć prędkość kul po zderzeniu w przypadku a) zderzenia doskonale sprężystego; b) zderzenia całkowicie niesprężystego.

Zadanie 93. Trzy kulki o masach m_1 = 50 g, m_2 = 40 g, m_3 = 30 g wiszą na pionowych równoległych nitkach tak, że ich środki stykają się ze sobą. Pierwsza z nich odchylona w płaszczyźnie zawieszenia uderza w drugą kulkę z prędkością v_1 = 30 cm/s. Jaką prędkość uzyska druga i ostatnia kulka, jeśli przyjmujemy, że zderzenia są sprężyste.



Zadanie 94. Dziecko o masie m_1 = 15 kg stoi na łodzi o masie m_2 = 20 kg. Łódź znajduje się w odległości x = 10 m od brzegu. Następnie dziecko przechodzi wzdłuż łodzi na odległość l = 3 m w kierunku brzegu i zatrzymuje się. Jak daleko od brzegu znajduje się dziecko kończąc spacer?

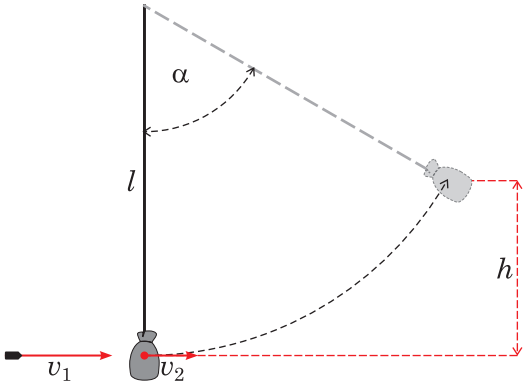
Zadanie 95. Bloczek o masie m_1 = 10 kg ześlizguje się bez tarcia z równi pochyłej z wysokości h = 10 m i nachylonej pod kątem 30^0 na nieruchomy wagonik o masie m_2 = 20 kg. Jaką prędkość uzyska wagon po upadku na niego ciała o masie m_1? Zakładamy, że wagonik porusza się bez tarcia.



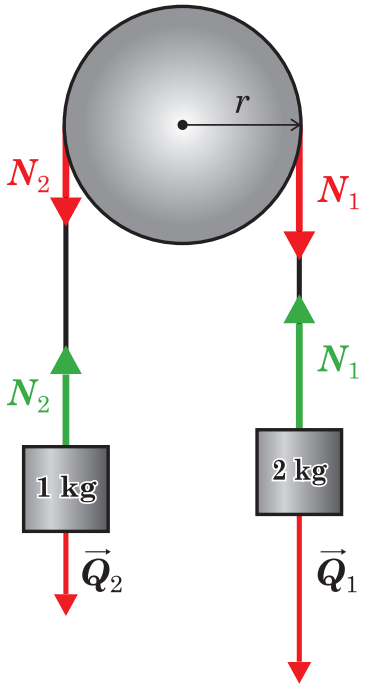
Zadanie 96. Rakieta porusza się z prędkością v_1 = 4500 km/h względem Ziemi. W pewnym momencie zużyty człon napędowy zostaje odłączony od kabiny statku i odrzucony w tył z prędkością v_2 = 80 km/h względem kabiny. Masa członu jest czterokrotnie większa od masy kabiny. Z jaką prędkością porusza się kabina względem Ziemi tuż po odłączeniu od niej członu napędowego?

Zadanie 97. Dwa ciała o jednakowych masach m=2kg zderzają się ze sobą. Ich prędkości przed zderzeniem wynoszą $\vec{v}_1 = 15\hat{\imath} + 30\hat{\jmath}$ oraz $\vec{v}_2 = -10\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$. Po zderzeniu $\vec{v}_1' = -5\hat{\imath} + 20\hat{\jmath}$. Wyznacz prędkość drugiego ciała oraz zysk lub stratę energii w tym zderzeniu. Prędkości podane są w m/s.

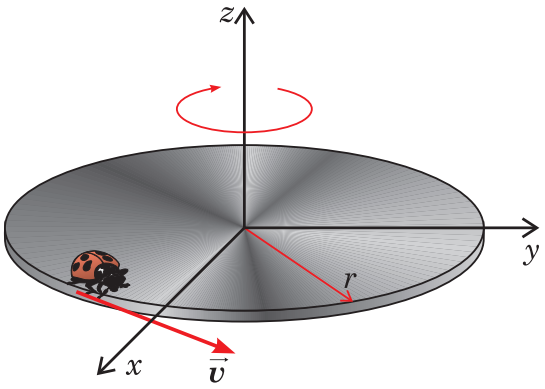
Zadanie 98. Kula karabinowa o masie m_1 = 0.01 kg została wystrzelona do worka z piaskiem o masie m_2 = 1 kg, zawieszonego na sznurze o długości l = 3 m i spowodowała jego odchylenie o 60^0. Jaka jest prędkość kuli? Jaka część energii zamienia się na ciepło?



Zadanie 99 [16]. Przez bloczek stały o promieniu r = 0.1 m i masie m = 1 kg przerzucona linkę na której końcach umieszczona dwa ciężarki o masie m_1 = 2 kg oraz m_2 = 1 kg. Z jakim przyspieszeniem poruszają się ciężarki. Jaki jest naciąg nici na których zawieszone są ciężarki. Tarcie zaniedbujemy.



Zadanie 100. Biedronka o masie m biegnie z prędkością v wzdłuż obwodu tarczy o promieniu r obracającej się wokół osi prostopadłej z prędkością kątową ω zgodną z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Jaka jest prędkość kątowa tarczy po zatrzymaniu biedronki, jeżeli tarcza obraca się bez tarcia?



Zadanie 101. Biedronka o masie m wędruje do środka tarczy o promieniu R i masie M. Tarcza obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół osi pionowej. Jak zmieni się prędkość kątowa układu, jeżeli żuczek zatrzyma się w połowie odległości od środka.

Zadanie 102. Obliczyć moment bezwładności prostopadłościanu o bokach a i b obracającego się wokół osi jednego z boków.

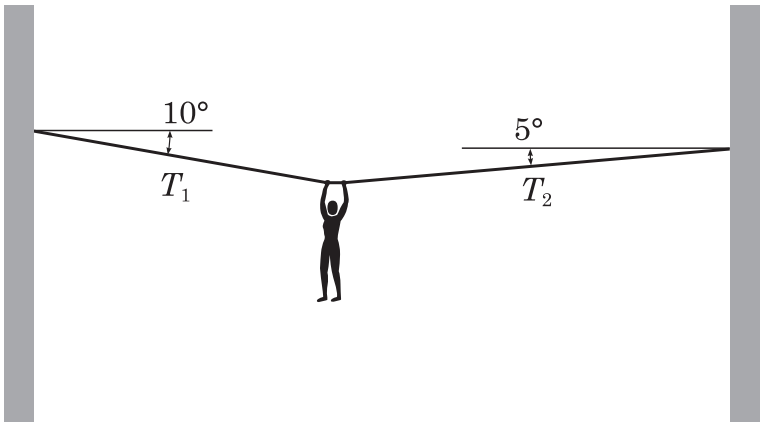
Zadanie 103. Obliczyć moment bezwładności wokół osi stycznej do powierzchni kuli.

Zadanie 104. Obliczyć jaką część całkowitej energii kinetycznej stanowi energia obrotu w przypadku toczących się bez poślizgu po poziomej płaszczyźnie

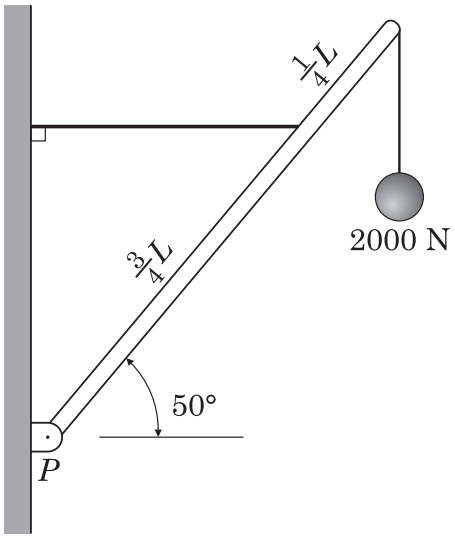
a) obręcz $I = mR^2$
b) pełen walec $I = ½mR^2$
c) kuli $I = 2/5\ mR^2$).

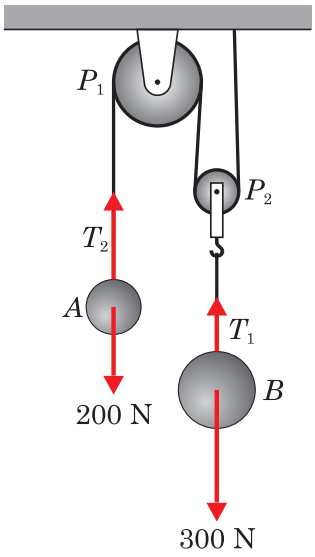
Zadanie 105. Z równi staczają się cienka obręcz, walec i kula. Wysokość równi h, tarcie pomijamy. Znaleźć prędkość ich ruchu. Porównaj tą prędkość z prędkością zsuwającego się ciała.

Zadanie 106 [16]. Pomiędzy dwoma słupami zawieszono linę. Chłopiec (500 N) wisi jak pokazano na rysunku obok. Znaleźć siły działające na dwie części liny T_1 i T_2

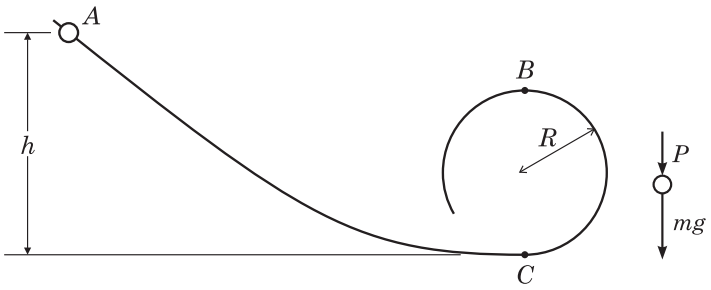


Zadanie 107 [16]. Wysięgnik jest przymocowany do ściany jak pokazuje rysunek poniżej, po lewej. Znaleźć siłę naprężenia liny oraz siłę wywieraną przez wysięgnik na ścianę w punkcie P.





Zadanie 108 [16]. Ciężary kul A i B (rysunek powyżej, po prawej) wynoszą odpowiednio 200 N i 300 N. Zakładamy, że masa bloczków jest nieistotna oraz działają one bez tarcia. Przekładnia P_1 ma mocowanie stałe, natomiast P_2 może się poruszać w górę i w dół. Znaleźć siły T_1 i T_2 oraz przyspieszenie z jakim poruszają się kule A i B.



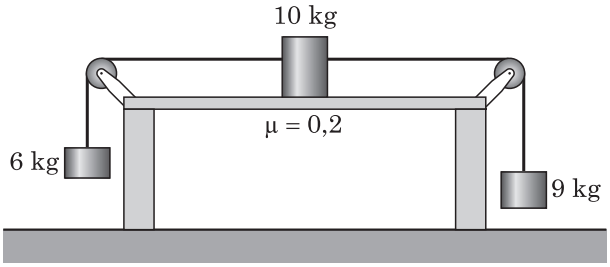
Zadanie 109.

a) Kulka A (rysunek powyżej) o promieniu r stacza się po pochyłości i dociera do pętli o promieniu R. Tarcie pomijamy. Znaleźć największą wysokość h na jaką wzniesie się środek kulki nad środkiem pętli.

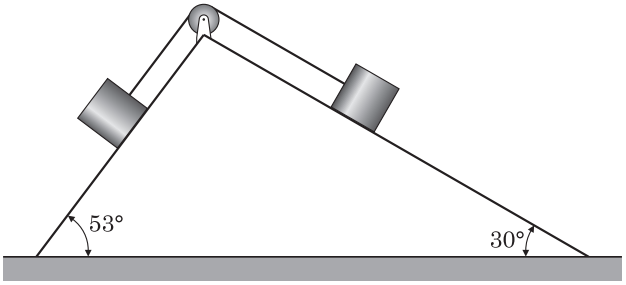
b) Kulka A o masie 25 g stacza się po pochyłości i dociera do pętli o promieniu $R = 5$ cm. Tarcie pomijamy. Wysokość $h = 25$ cm. Oblicz siłę jaką pętla wywiera na kulkę w punkcie B?

Zadanie 110 [16].

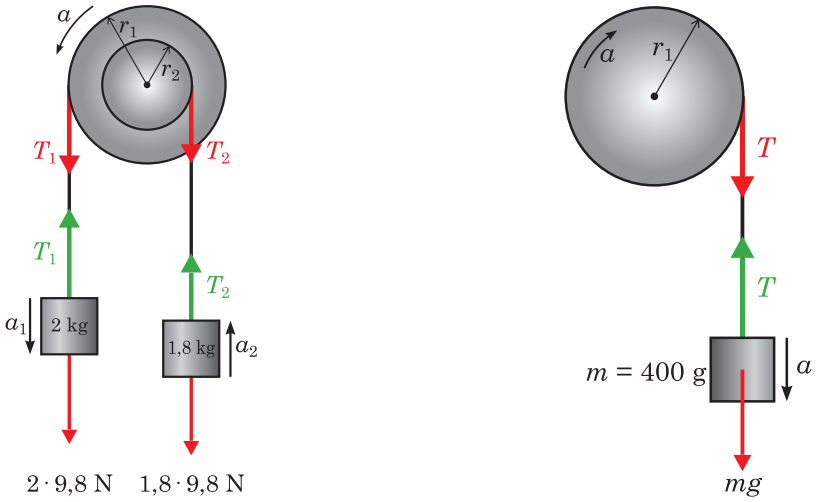
a) Oblicz wartość przyspieszenia z jakim porusza się układ ciał pokazany na rysunku poniżej. Współczynnik tarcia pomiędzy stołem a ciężarkiem o masie 10 kg wynosi 0.2. Oblicz ile wynoszą siły naprężenia działająca na liny z prawej i lewej strony stołu.



b) Pokazane na rysunku ciężarki mają jednakową masę. Współczynniki tarcia statycznego i dynamicznego są równe i wynoszą 0.3. Czy układ po zwolnieniu pozostaje w spoczynku? Jaką drogę przebędzie układ jeśli nadamy mu początkową prędkość 0.9 m/s skierowaną w lewą stronę?



Zadanie 111 [16]. Moment bezwładności systemu kół o promieniach $r_1 = 50$ cm i $r_2 = 20$ cm pokazanych na rysunku poniżej, po lewej, wynosi $I = 1.7$ kgm^2. Znajdź przyspieszenie kątowe systemu kół oraz siły T_1 i T_2.

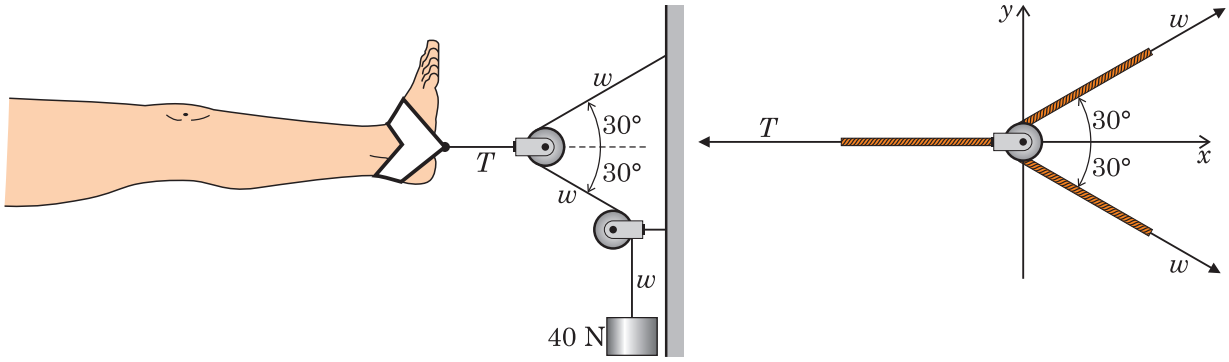


Zadanie 112.

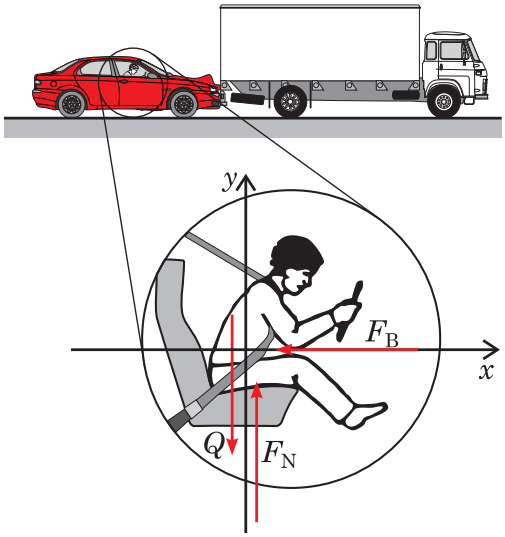
a) Na nitce nawiniętej na walec o masie $M = 5$ kg o promieniu $r_1 = 50$ cm i zawieszono ciężarek o masie $m_1 = 1$ kg. Znajdź przyspieszenie liniowe z jakim opada klocek, naciąg nitki i przyspieszenie kątowe walca.

b) Na nitce nawiniętej na obręcz o promieniu $r_1 = 15$ cm i zawieszono ciężarek o masie $m_1 = 400$ g. Po zwolnieniu układu ciężarek opada w dół o 2 m z prędkością 6.5 s. Znajdź moment bezwładności obręczy.

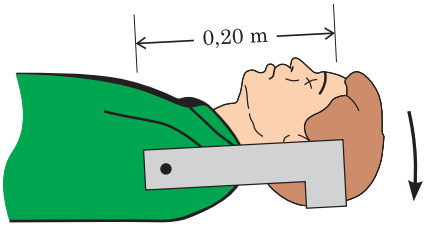
Zadanie 113 [16]. Rysunek przedstawia nogę na wyciągu. Oszacuj wartość siły naprężenia liny T.



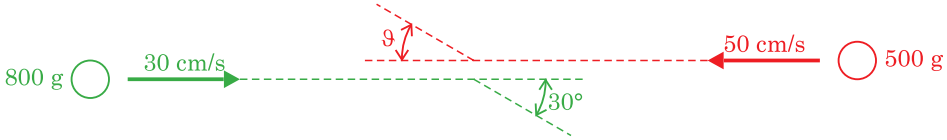
Zadanie 114 [16]. Samochód jedzie z prędkością 18 m/s. Uderza w zaparkowany samochód dostawczy jak pokazuje rysunek poniżej. Kierowca samochodu osobowego przytrzymywany przez pasy zatrzymuje się 1 m od punktu uderzenia. Oblicz siłę jaką pasy wywierają na kierowcę. Kierowca waży 80 kg.



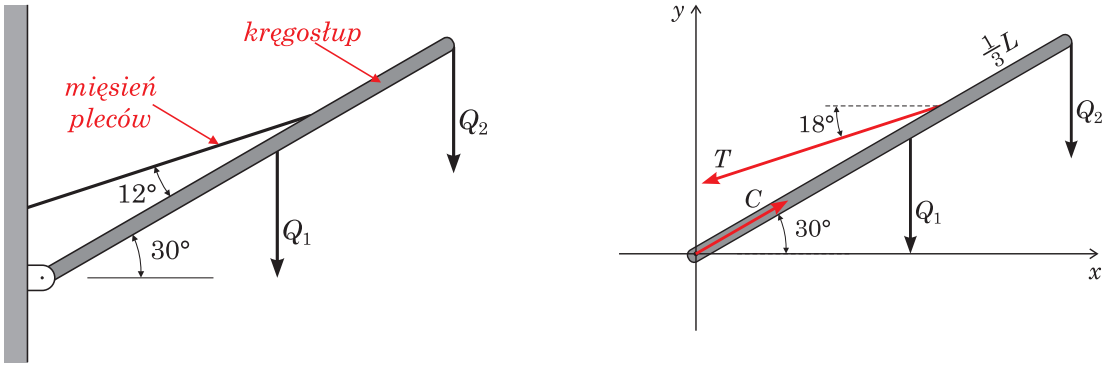
Zadanie 115 [16]. Mdlejąca osoba upada. Przed uderzeniem głową w podłogę obraca się ona z prędkością kątową $\omega = 8rad/s$. Oś obrotu znajduje się w ramionach. Głowa uderza o podłogę po czasie 0.005 s a odległość od osi obrotu do środka ciężkości głowy wynosi 0.2 m. Moment bezwładności obracającej się części ciała wynosi 0.25 kg/m^2. Oblicz moment siły działający na głowę oraz wielkość siły z jaką głowa uderza w podłogę.



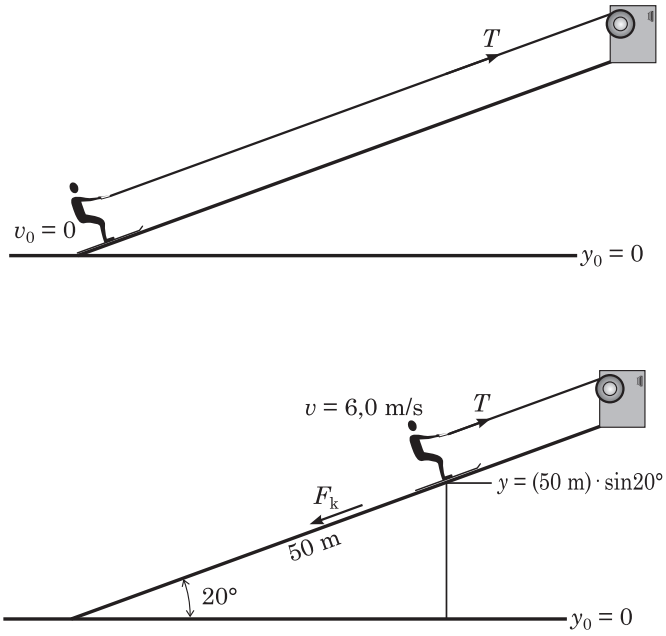
Zadanie 116 [16]. Zderzenie dwóch kul pokazuje rysunek. Jaka jest prędkość kuli o masie 500 g, jeżeli prędkość kuli o masie 800 g po zderzeniu wynosi 15 cm/s. Czy jest to zderzenie sprężyste?



Zadanie 117 [16]. [*Przykład z L.A.Strait, V.T. Inman, H.J. Ralston, American Journal of Physics, 15 (1947) 375-382.*] Problemy z dolną partią kręgosłupa ma wiele osób. Oszacuj siłę działającą na kręgosłup oraz siłę naprężenia mięśni pleców podczas nieprawidłowego podnoszenia ciężkich przedmiotów. Rysunek przedstawia schemat kręgosłupa osoby o masie 90 kg i siły na niego działające podczas podnoszenia przedmiotu o masie 25 kg. Załóż, że siła ciężkości Q_1 działa na masę 36 kg (tułów) a Q_2 na masę 44 kg (masa głowy, ramion i przedmiotu – 25 kg).

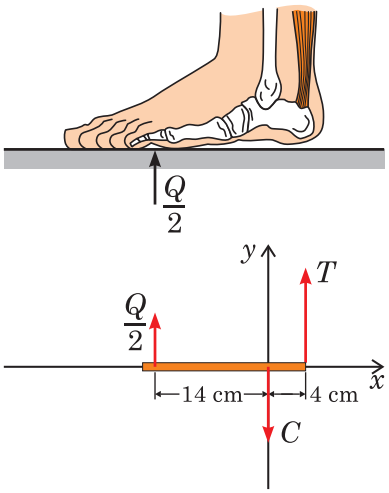


Zadanie 118. Budujemy wyciąg narciarski w ogródku. Linka ma wciągnąć 100 kg narciarza na wzgórze nachylone pod kątem 20^0. Na początku wyciągu prędkość narciarza wynosi zero, a na końcu wzniesienia 6 m/s. Długość stoku wynosi 50 m. Siła tarcia wynosi 150 N. Oblicz siłę T potrzebną do wciągnięcia narciarza na stok.



Zadanie 119. Ścięgno Achillesa jest przykładem działania dźwigni w naszym ciele. Śródstopie dotykające ziemi jest punktem podparcia a kości stopy są ramieniem dźwigni. Ścięgno Achillesa wraz z towarzyszącym mu mięśniem dają siłę naprężenia

potrzebną do podniesienia kości łydki. Śródstopie naciska na ziemię z ciężarem równym połowie ciężaru człowieka. Pięta jest lekko uniesiona jak widać na rysunku. Znajdź siłę naprężenia T ścięgna Achillesa oraz siłę nacisku C w miejscu połączenia kości stopy i łydki. Ciężar osoby 800 N.



Zadanie 120. Dwie gwiazdy o masach m_1 oraz m_2 znajdują się w stałej od siebie odległości równej l. Jaki jest charakter ich ruchu. Znaleźć promienie r_1 oraz r_2 i okresy obiegu?

Zadanie 121 [7]. Obliczyć moment bezwładności rury o przekroju kołowym względem osi. Długość rury wynosi l, promień wewnętrzny R_1, zewnętrzny R_2, gęstość materiału ρ.

Zadanie 122 [7]. Wyznaczyć moment bezwładności walca kołowego względem jego osi. Promień podstawy walca wynosi R, wysokość h, gęstość materiału ρ.

Zadanie 123 [7]. Jaki jest moment bezwładności kuli o promieniu R z materiału o gęstości ρ dla osi przechodzącej przez środek kuli.

Zadanie 124 [7]. Wyznaczyć moment bezwładności pręta cienkiego o długości l, powierzchni przekroju S, względem osi:

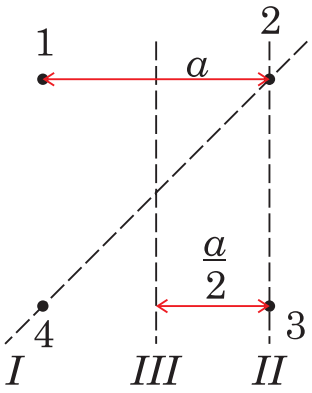
1) Prostopadłej do pręta, przechodzącej przez a) środek pręta, b) koniec pręta.
2) Przechodzącej przez środek pręta i tworzącej z prętem kąt α.
3) Równoległej do pręta i znajdującej się w odległości a od niego.

Zadanie 125 [7]. Obliczyć moment bezwładności prostokąta o bokach a i b i gęstości powierzchniowej ρ

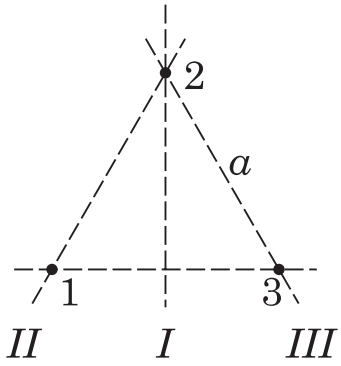
1) Względem podstawy a, jako osi
2) Względem osi prostopadłej do boku b, przechodzącej przez środek prostokąta.

Zadanie 126 [8]. Obliczyć moment bezwładności układu punktów materialnych na rysunku A i B o jednakowych masach względem różnych osi obrotu (I, II, III).

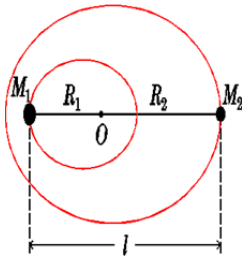
A) Kwadrat o boku a



B) trójkąt równoboczny o boku a



Zadanie 127. Dwie gwiazdy o masach M_1 oraz M_2 znajdują się w stałej od siebie odległości równej l. Jaki jest charakter ich ruchu? Znaleźć promienie R_1 oraz R_2 (patrz rys.) i okresy obiegu? (O - środek masy)



Zadanie 128 [8]. Cząstka znajduje się w polu o energii potencjalnej danej wzorem

$$E_p = Ax^2(x - 3).$$

Znaleźć i sklasyfikować punkty równowagi.

Zadanie 129 [8]. Znaleźć siły działające w polach w których energia potencjalna dana jest następującymi wzorami

a) $E_{p1} = k_1/r + k_2/(2r^2)$
b) $E_{p2} = k/\pi \cos(\pi r)$
c) $E_{p3} = kr$

Zadanie 130 [8]. Czy siły a) $F = (2xz^2 - 2y, -2x - 6yz, 2x^2z - 3y^2)$;
b) $F = (x^2z, -xy, 5)$,
c) $F = (-2x - yz, z - zx, y - xy)$
są siłami zachowawczymi? Jeżeli tak to znaleźć odpowiadającą im energie potencjalne.

Zadanie 131.Obliczyć odchylenie ku wschodowi ciała spadającego swobodnie pionowo w dół z wysokości x na szerokości geograficznej φ.

Zadanie 132. Obliczyć odchylenie pod wpływem siły Coriolisa dla ciała poruszającego się wzdłuż południka geograficznego na północ.

Zadanie 133. Układ Z-K wykonuje ruch obrotowy dookoła środka masy który znajduje się w odległości a od środka kuli ziemskiej. Obliczyć wartość siły przypływowej w punktach A i B leżących na powierzchni kuli Ziemskiej po obu jej stronach na prostej łączącej środki obu mas.

Zadanie 134. Obliczyć natężenie pole grawitacyjne wewnątrz środka Ziemi.

Zadanie 135. Przyspieszenie ziemskie na biegunach wynosi $g = 9{,}83\ \mathrm{m/s^2}$. O ile zmniejszy się ona na szerokości geograficznej φ wskutek ruchu obrotowego Ziemi dookoła swej osi?

Zadanie 136 [7]. Czas obiegu Jowisza dookoła Słońca jest 12 razy dłuższy od czasu obiegu Ziemi dookoła Słońca. Jaka jest odległość Jowisza od Słońca, jeżeli odległość Ziemi od Słońca wynosi 150 000 000 km. Przyjąć orbity obu planet jako kołowe.

Zadanie 137. Znaleźć odległość D planety od Słońca, jeżeli znamy masę Słońca M i okres obiegu planety dookoła Słońca.

Zagadnienie. Energia potencjalna w pobliżu Ziemi

Zagadnienie. Punkt materialny poruszający się tunelem na wylot przez Ziemię.

6.Ruch drgający

Równanie różniczkowe oscylatora harmonicznego:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

gdzie:

- x - położenie zależne od czasu,
- ω_0 - częstość drgań oscylatora.

Równania oscylatora harmonicznego można zapisać w postaci:

$$x = Acos(\omega t + \varphi)$$

gdzie: A – amplituda, φ – faza początkowa.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

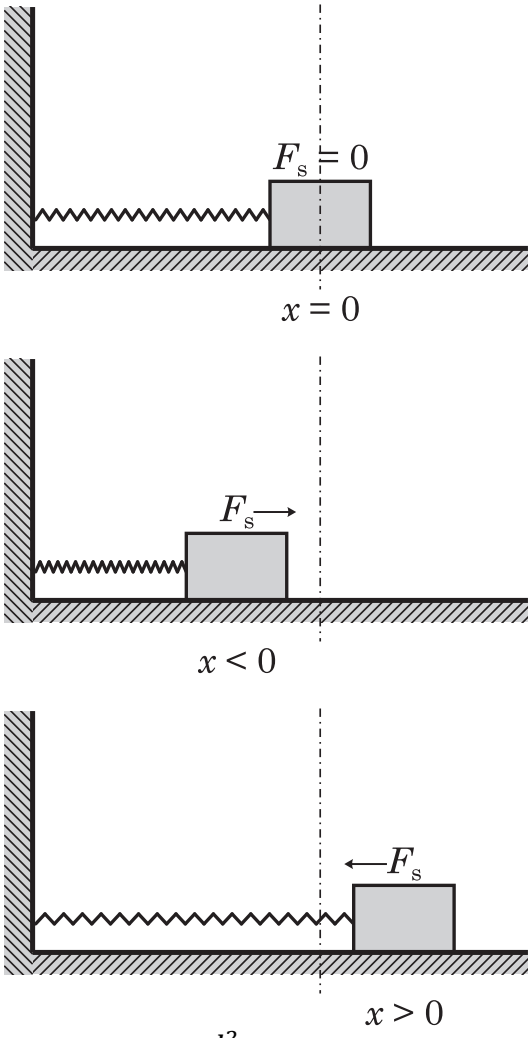
Okres drgań T wynosi

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Częstotliwość drgań $f = 1/T$

Przykłady oscylatorów:

1) masa na sprężynie

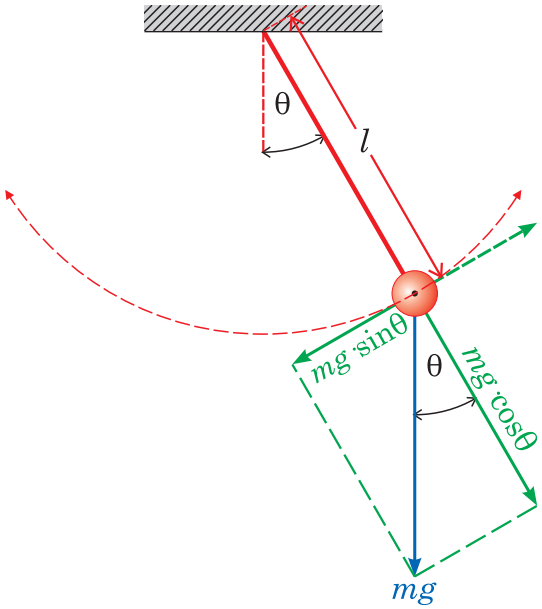


$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2) wahadło matematyczne



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Ćwiczenie: Równania oscylatora harmonicznego można zapisać w postaci:

$$x = A\cos\omega t$$

Znajdź wyrażenie na prędkość, przyspieszenie, energię kinetyczną, potencjalną i całkowitą.

v, a, E_p, E_k , E_c= ?

Prędkość: $v = \frac{dx}{dt}$…

Przyspieszenie: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ =…

Energia kinetyczna: $E_k = \frac{mv^2}{2}$ =…

Energia potencjalna: $E_p = \frac{kx^2}{2}$ =…

Energia całkowita: $E_C = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$

Oscylator harmoniczny tłumiony

W układzie fizycznym zazwyczaj występują siły tarcia, oporu lub innego rodzaju tłumienie proporcjonalne do prędkości oscylatora.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = A(t)sin\omega t = A_0 e^{-\beta t} sin\omega t; x = A_0 e^{-\beta t} cos\omega t$$

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-t/\tau}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_2} = \cdots = e^{-\beta t}$$

Czas relaksacji jest to czas po którym wielkość zanikająca wykładniczo maleje do 1/e wartości początkowej.

$$\tau_{amplitudy} = \frac{1}{\beta}$$

$$\tau_{energii} = \frac{1}{2\beta}$$

$$2\beta = \frac{\gamma}{m}$$

$$\tau = \frac{m}{\gamma}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_{tł} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$\beta - współczynnik\ tłumienia, \tau - stała\ czasowa\ (relaksacji), Q - dobroć\ układu,$
$\omega_0 - częstość\ drgań\ własnych, \gamma - współczynnik\ oporu\ ośrodka$

Logarytmiczny dekrement tłumienia – logarytm stosunku amplitud odpowiadających chwilom t i $(t+T)$.

$$\Lambda = ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T$$

Dobroć układu drgającego

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi\tau}{T} = \pi N_e$$

N_e- ilość drgań wykonywanych przez układ zanim amplituda zmaleje e-razy.

W przypadku słabego tłumienia dobroć układu definiujemy:

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$

E - energia w chwili t

ΔE –strata energii w czasie jednego okresu.

Oscylator harmoniczny wymuszony

Oscylator może być pobudzany zewnętrznymi siłami.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = F(t)/m \quad \text{lub}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = F(t)/m$$

$$F(t) = F_0 sin\omega t$$

$$\frac{F(t)}{m} = \alpha_0 sin\omega t$$

$\alpha_0 = \frac{F_0}{m}$ – [wymiar przyspieszenia]

$$\tau = \frac{m}{\gamma};\ \omega_0^2 = \frac{k}{m};\ \tau = \frac{1}{2\beta}$$

Równanie w postaci:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

φ – kąt przesunięcia fazowego pomiędzy siłą wymuszającą a wychyleniem
A – amplituda drgań wymuszonych oscylatora

$$A = \frac{\alpha_0}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$\varphi = arc\tan\frac{\omega/\tau}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_{rez}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$$

$$\omega_{rez}^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}$$

Zakresy ruchu (przybliżenia)

1. Siła wymuszająca o małej częstości $\omega \ll \omega_0$, $\varphi \to 0$
   Zakres sprężysty
   $$A = \frac{\alpha_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

2. Rezonans $\omega = \omega_0$, $\varphi \to -\frac{\pi}{2}$
   Zakres lepki
   $$A = \frac{\alpha_0 \tau}{\omega_0}$$

3. Siła zewnętrzna o dużej $\omega \gg \omega_0$, $\varphi \to -\pi$
   Zakres bezwładny
   $$A = \frac{\alpha_0}{\omega^2} = \frac{F_0}{m\omega^2}$$

Stała siła zmienia jedynie położenie równowagi oscylatora. Siła wymuszająca o charakterze oscylacyjnym zmienia częstość drgań oscylatora.

Zadanie 138. Ciało o masie m = 1 kg wykonuje drgania harmoniczne wzdłuż dwóch wzajemnie prostopadłych osi OX i OY tworzących na płaszczyźnie układ współrzędnych XOY. Wychylenie wzdłuż X dane jest wzorem $x = -10\ \sin(\frac{2\pi}{6}t)$, wzdłuż Y: $y = 20\cos(\frac{2\pi}{6}t)$. Jaki jest tor masy? Znaleźć maksymalną wartość energii potencjalnej i kinetycznej.

Zadanie 139. Na linie o długości l i przekroju poprzecznym S wykonanej ze stali zawieszono źródło dźwięku o masie m. Układ wykonuje drgania swobodne pionowe. Obliczyć okres drgań tego wahadła.

Zadanie 140. Struna, której końce zostały zamocowane w punktach A i B jest napięta siłą F = 10 N. Znaleźć okres drgań lekkiego ciężarka o masie m = 2 g umocowanego w środku struny, jeśli został wychylony z położenia równowagi o a = 0.02 m. Długość struny w stanie równowagi AB = 2 m.

Zadanie 141. Obliczyć średnią w czasie energię kinetyczna i potencjalną oscylatora harmonicznego (masa zawieszona na sprężynie).

Zadanie 142 [7]. Wyznaczyć okres drgań masy m = 150 g rtęci w rurce o kształcie litery U. Przekrój poprzeczny rurki S = 0.4 cm^2.

Zadanie 143 [15]. Ciało o masie m = 5 g wykonuje drgania, które opisujemy $x = 0.1\cdot\sin(\pi/2t+1/3)$. Znaleźć wartości liczbowe energii kinetycznej i potencjalnej po upływie czasu t = 20 s od chwili początkowej. Jaka jest energia całkowita?

Zadanie 144. Punkt materialny wykonuje ruch harmoniczny zgodnie z równaniem $x = A\cdot\cos\omega t$. Jaki jest stosunek energii kinetycznej do energii potencjalnej w chwili czasu t = $T/12$ od chwili rozpoczęcia ruchu.

Zadanie 145. Równanie ruchu punktu materialnego opisane jest zależnością $x = 0.1\cdot\sin(\pi/8t+\pi/4)$. Znaleźć okres drgań tego ruchu, maksymalna prędkość i moment jej osiągnięcia, maksymalne przyspieszenie i moment jego osiągnięcia.

Zadanie 146. Ciężarek zawieszony na nieważkiej sprężynie posiada energię całkowitą 1 J. Znaleźć współczynnik siły K wiedząc, że amplituda drgań wynosi 10 cm. Obliczyć częstotliwość drgań własnych jeśli masa ciężarka wynosi m = 2 g.

Zadanie 147 [7]. Amplituda drgania tłumionego zmalała w ciągu czasu t = 5 s od wartości A_1 = 3 cm do wartości A_2 = 1 cm. Obliczyć stałą tłumienia β. Po jakim czasie t_1 (od 5sek) amplituda tego drgania zmaleje do A_3 = 0,5 cm.

Zadanie 148. Amplituda drgania tłumionego maleje w ciągu jednego okresu do ⅓ swojej wartości początkowej. Obliczyć logarytmiczny dekrement tłumienia.

Zadanie 149. Obliczyć średnią moc prądu sinusoidalnie zmiennego.

Zadanie 150. Do drgań w prostym obwodzie elektrycznym zawierający szeregowo połączono opór R, indukcyjność L i pojemność C stosuje się takie samo równanie różniczkowe jak do swobodnie drgającej tłumionej masy na sprężynie. Poprzez analogie elektro-mechaniczne znaleźć wyrażenie na stałą tłumienia β, częstotliwość własną w funkcji L, R, C częstotliwość drgań tłumionych układu RLC Obliczyć dobroć układu Q. Obliczenia wykonać dla L = 100 mH, R = 100 Ω, C = 10 μF.

Zadanie 151. Masa m = 1 kg jest zawieszona na sprężynie dla której stała sprężystości $k = 10^6$ dyn/cm a współczynnik tłumienia γ = 50 dyn·sek/cm.(dyn –jednostka siły) Na sprężynę działa siła zewnętrzna $F = F_0\cdot\sin\omega t$, $F_0 = 2{,}5\cdot10^5$ dyn. Częstotliwość siły wymuszającej jest dwa razy większa od częstotliwości drgań własnych układu $\omega = 2\omega_0$. Obliczyć amplitudę ruchu wypadkowego, dobroć układu. Jak wielkie jest (w radianach) przesunięcie fazowe wychylenia względem siły wymuszającej? W jakim zakresie znajduje się układ:

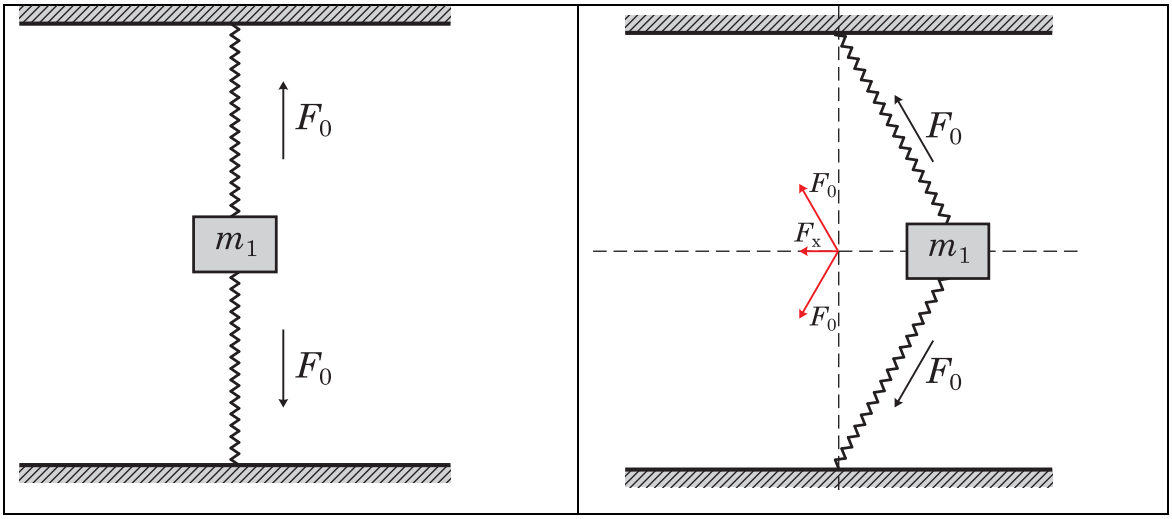
a) sprężystym
b) lepkim
c) bezwładnym.

Zadanie 152. Obliczyć częstotliwość kątową, rezonansową, dobroć Q oraz amplitudę rezonansową drgań harmonicznych wymuszonych punktu materialnego o masie M = 0,2 kg, jeśli współczynnik tłumienia 2β = 5 s^{-1} o częstotliwość drgań własnych ω_0 = 25 rad/sek oraz amplituda siły wymuszającej F_0 = 14 N.

Zadanie 153. W celu oszacowania współczynnika lepkości dynamicznej ośrodka płynnego (gaz, ciecz) dokonano pomiaru tłumienia amplitudy drgań (o małej amplitudzie) wahadła matematycznego o długości l złożonego z metalowej kulki o masie M i promieniu r zawieszonej na nieważkiej nici. Amplituda drgań w chwili początkowej wynosiła A_0 a po czasie Δt = 50 T amplituda zmalała do $0.8A_0$.

Zadanie 154. Znaleźć amplitudę złożenia dwóch drgań harmonicznych o jednakowych amplitudach A, o częstościach ω_1 *i* ω_2.Zakładamy, że fazy obu drgań w chwili t = 0 są jednakowe i równe zero. Obliczenia wykonać dla f_1 = 10 Hz, f_2 = 20 Hz i A = 1 m, w chwili t = 10 s. Obliczyć okres dudnienia.

Zadanie 155 [6]. Masa m = 10 g jest zawieszona między dwoma rozciągniętymi sprężynami, każda działa z siłą F_0 = 15 N. Masie nadano przesunięcie x-poziome. Jeśli długość sprężyny l = 10 cm jaki będzie okres drgań T lub częstotliwość?



Zadanie 156 [7]. W rurce o przekroju S i zgiętej w kształcie litery U znajduje się słup wody o długości l, przy czym w chwili początkowej poziom wody w jednym ramieniu jest wyższy niż w drugim. Jaki będzie okres drgań słupa wody. Napisać równanie kinetyczne ruchu drgającego (zależność $x(t)$), jeśli największa różnica poziomu cieczy wynosi 10 cm.

Zadanie 157 [9]. Dekrement logarytmiczny tłumienia dla ciała sprężystego drgającego w ośrodku stawiającym opór wynosi Λ = 0.7. Czy mogą zaistnieć drgania zanikające tegoż ciała w ośrodku o współczynniku oporu 10 razy większym od współczynnika oporu danego ośrodka.

DODATEK A

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \; jeżeli \; i = j \\ 0 \; jeżeli \; i \neq j \end{cases}$ Delta KRONECKERA

$(u_i \delta_{ik} = u_k \; (wymiana \; wskaźników))$

$$\delta_{jk}\delta_{jk} = \delta_{kk} = \delta_{jj} = 3$$

$$\delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$$

ILOCZYN SKALARNY

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i$$

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{3} y_i \vec{e}_i$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{3} y_j \vec{e}_j\right) = \sum_i \sum_j x_i \, y_j \vec{e}_i \vec{e}_j = \sum_i \sum_j x_i y_j \delta_{ij} = \sum_i x_i y_i$$

Umowa sumacyjna Einsteina:

$$\sum_i x_i y_i = x_i y_i \qquad i = 1,2,3 \quad aby \; uniknąć \; w \; zapisie \; zbyt \; wielu \; symboli$$

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$A_{iij} = A_{11j} + A_{22j} + A_{33j}$$

ILOCZYN WEKTOROWY

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k \quad gdzie \; i, j, k \; są \; parzystą \; permutacją \; 1,2,3.$$

Symbol LEVI-CIVITA:

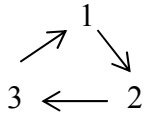
$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \; jeżeli \; (i,j,k) jest \; parzystą \; permutacją \; liczb \; (1,2,3) \\ -1 \; jeżeli \; (i,j,k) jest \; nieparzystą \; permutacją \; liczb \; (1,2,3) \\ 0 \qquad w \; pozostałych \; przypadkach \; i = j, j = k, k = i \end{cases}$$

Przykład:

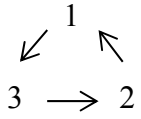
$$\varepsilon_{132} = -1$$

$$\varepsilon_{123} = 1$$

$$\varepsilon_{112} = 0$$



Permutacja dodatnia



Permutacja ujemna

$$\varepsilon_{ikm}\varepsilon_{inp} = \delta_{kn}\delta_{mp} - \delta_{kp}\delta_{mn}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pjk} = 2\delta_{ip}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj}$$

Czyli w prawoskrętnym układzie

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k$$

Zadanie A1: Pokazać, że:

a) $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = \vec{y}(\vec{x} \cdot \vec{z}) - \vec{z}(\vec{x} \cdot \vec{y})$

b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$

c) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

d) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

e) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$

f) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = -2(\vec{a} \times \vec{b})$

DODATEK B

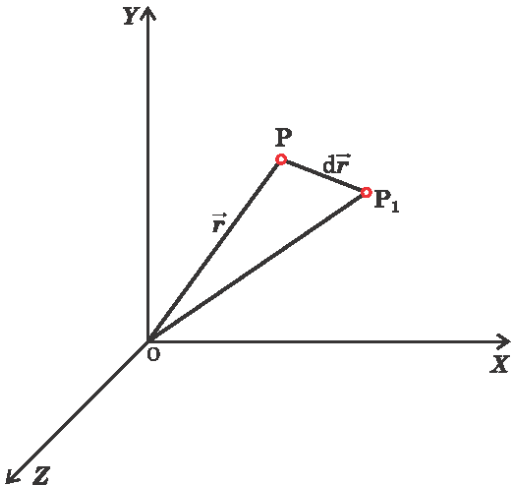
FUNKCJE POLA

Jeżeli każdemu punktowi pewnego obszaru przyporządkujemy pewną wartość liczbową, to ten obszar nazywamy polem skalarnym.

Jeżeli każdemu punktowi przyporządkujemy pewien wektor, to obszar ten nazywamy polem wektorowym.

Funkcja pola φ (*x,y,z*)

Punkty w których funkcja pola przyjmuje wartość stałą tworzą powierzchnię ekwiskalarną. Przy przesuwaniu się po powierzchni ekwiskalarnej nie zmienia się wartość funkcji więc $d\varphi = 0$.



$d\varphi$ = ?

Różniczka funkcji pola przy przejściu od P do P_1 wynosi:

$$d\varphi = (\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz)$$

lub w postaci iloczynu skalarnego:

$$d\varphi = (\vec{\imath}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}) \cdot (\vec{\imath}dx + \vec{\jmath}dy + \vec{k}dz)$$

$$grad\varphi = \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \nabla \cdot \varphi$$

$$d\varphi = grad\varphi \cdot d\vec{r}$$

Wektorowy operator *nabla* może działać również na dowolne pole wektorowe.

$$\nabla \cdot \vec{h} = div\,\vec{h}$$

$$\nabla \times \vec{h} = rot\,\vec{h}$$

$$\vec{h}(x,y,z) = h_x(x,y,z)\vec{\imath} + h_y(x,y,z)\vec{\jmath} + h_z(x,y,z)\vec{k}$$

$$\nabla \cdot \vec{h} = (\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot (\vec{\imath}h_x + \vec{\jmath}h_y + \vec{k}h_z)$$

$$\nabla \times \vec{h} = (\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}) \times (\vec{\imath}h_x + \vec{\jmath}h_y + \vec{k}h_z)$$

$$\nabla \times \vec{h} = rot\,\vec{h} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z}\right) + \vec{\jmath}\left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}\right)$$

$$\Delta = \nabla\nabla = \nabla^2$$

$$\Delta = \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$f(x,y,z)$; $g(x,y,z)$ – funkcje skalarne

$\vec{u}(x,y,z)$; $\vec{v}(x,y,z)$ – funkcje wektorowe

$\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$ $\qquad$ $grad(f \pm g) = grad\,f \pm grad\,g$

$\nabla \cdot (\vec{u} \pm \vec{v}) = \nabla\vec{u} \pm \nabla\vec{v}$ $\qquad$ $div\,(\vec{u} \pm \vec{v}) = \mathrm{div}\,\vec{u} \pm \mathrm{div}\,\vec{v}$

$\nabla \times (\vec{u} \pm \vec{v}) = \nabla \times \vec{u} \pm \nabla \times \vec{v}$ $\qquad$ $rot\,(\vec{u} \pm \vec{v}) = rot\,\vec{u} \pm rot\,\vec{v}$

$\nabla fg = (\nabla f)g + f(\nabla g)$ $\qquad$ $grad\,(fg) = (grad\,f)\,g + f(grad\,g)$

$\nabla \cdot f\vec{v} = (\nabla f) \cdot \vec{v} + f \cdot \nabla \vec{v}$ $\quad div(f\overrightarrow{v}) = grad\, f\vec{v} + f\, div\vec{v}$

$\nabla \times f\vec{v} = \nabla f \times \vec{v} + f\nabla \times \vec{v}$ $\quad rot(f\vec{v}) = (grad\, f) \times \vec{v} + f\, (rot\, \vec{v})$

$\nabla(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\nabla\vec{u}) \cdot \vec{v} + (\nabla\vec{v}) \cdot \vec{u}$

Zadanie B1. Obliczyć ∇r, gdzie $r = |\vec{r}|$, korzystając z definicji gradientu.

Zadanie B2. Znaleźć gradient następujących pól:
a) $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$
b) $pola\ skalarnego\ sferycznego,$
c) $pola\ skalarnego\ osiowego,$
d) $\Phi(r) = \frac{1}{r}$.

Zadanie B3. Obliczyć dywergencję wektora jednostkowego a) na podstawie definicji oraz b) za pomocą operatora ∇.

Zadanie B4. Udowodnić, że $\nabla \cdot (\varphi\vec{A}) = \varphi(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \nabla\varphi$.

Zadanie B5. Obliczyć: $div\vec{A}(\vec{A} \cdot \vec{r})$, gdzie: $\vec{A}$ – wektor stały a) korzystając z definicji dywergencji oraz b) za pomocą operatora ∇.

Zadanie B6. Znaleźć dywergencję następujących pól:
a) pola wektorowego sferycznego,
b) pola wektorowego osiowego,
c) $\vec{F} = (x^2 + yz)\vec{\imath} + (y^2 + xz)\vec{\jmath} + (z^2 + xy)\vec{k}$ w punkcie P(1,-3,1).

Zadanie B7. Wyznaczyć $\Delta\vec{r}$ oraz $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$.

Zadanie B8. Udowodnić, że $\Delta(\phi\psi) = \phi\Delta\psi + 2\nabla\phi \cdot \nabla\psi + \psi\Delta\phi$.

Zadanie B9. Znaleźć rotację pola wektorowego sferycznego i pola wektorowego osiowego.

Zadanie B10. Znaleźć $rot\, \vec{r}$.

Zadanie B11. Wykazać, że dla pól wektorowych $\vec{A}, \vec{B}$ prawdziwy jest wzór $div(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}\, rot\, \vec{A} - \vec{A}\, rot\, \vec{B}$

Zadanie B12. Pokazać, że:
a) $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$,
b) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h}) = 0$,

Zadanie B13. Udowodnić równania:
a) $\nabla \times (\phi\vec{A}) = (\nabla\phi) \times \vec{A} + \phi(\nabla \times \vec{A})$,
b) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$,
c) $rot(\varphi \cdot \vec{A}) = (grad\varphi) \times \vec{A} + \varphi rot\vec{A}$.

DODATEK C

Obrót i odbicie lustrzane układów współrzędnych

Weźmy 2 wektory jednostkowe $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

$\vec{e}_1$ tworzy z osiami układu kąty $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

$\vec{e}_2$ tworzy z osiami układu kąty $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$

$$\vec{e}_1 = \vec{\imath}\cos\alpha_1 + \vec{\jmath}\cos\beta_1 + \vec{k}\cos\gamma_1$$

$$\vec{e}_2 = \vec{\imath}\cos\alpha_2 + \vec{\jmath}\cos\beta_2 + \vec{k}\cos\gamma_2$$

stąd

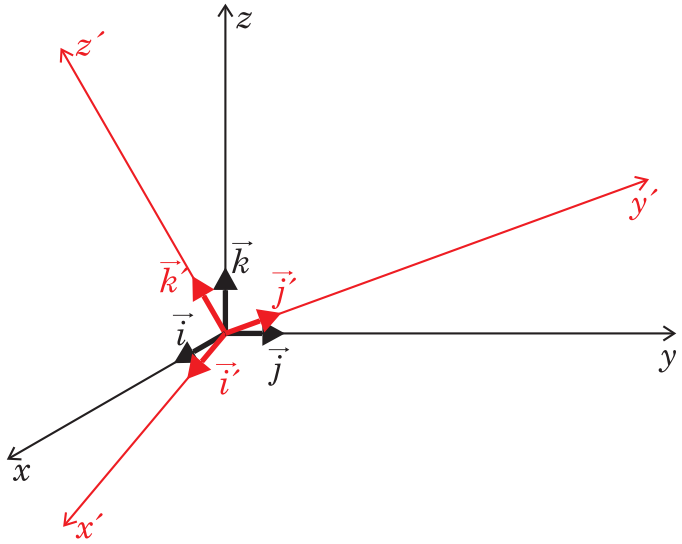
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1 = \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1$$

Weźmy pod uwagę 2 układy prostokątne o wspólnym początku!

układ x, y, z (z podstawą jednostkową $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$)

x', y', z' (z podstawą jednostkową $\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}'$)



		$\vec{\imath}'$	$\vec{\jmath}'$	$\vec{k}'$
		x'	y'	z'
$\vec{\imath}$	x	α_1	β_1	γ_1
$\vec{\jmath}$	y	α_2	β_2	γ_2
$\vec{k}$	z	α_3	β_3	γ_3

Osie tych układów tworzą ze sobą 9 różnych kątów

$\vec{\imath} \cdot \vec{\imath}', = \cos\alpha_1$ $\quad \vec{\jmath} \cdot \vec{\imath}', = \cos\alpha_2$ $\quad \vec{k} \cdot \vec{\imath}', = \cos\alpha_3$

$\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath}' = \cos\beta_1$ $\quad \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath}' = \cos\beta_2$ $\quad \vec{k} \cdot \vec{\jmath}' = \cos\beta_3$

$\vec{\imath} \cdot \vec{k}' = \cos\gamma_1$ $\quad \vec{\jmath} \cdot \vec{k}' = \cos\gamma_2$ $\quad \vec{k} \cdot \vec{k}' = \cos\gamma_3$

Wzory transformacyjne

$$\vec{\imath}' = \vec{\imath}\cos\alpha_1 + \vec{\jmath}\cos\alpha_2 + \vec{k}\cos\alpha_3$$

$$\vec{\jmath}' = \vec{\imath}\cos\beta_1 + \vec{\jmath}\cos\beta_2 + \vec{k}\cos\beta_3$$

$$\vec{k}' = \vec{\imath}\cos\gamma_1 + \vec{\jmath}\cos\gamma_2 + \vec{k}\cos\gamma_3$$

$$\vec{\imath} = \vec{\imath}'\cos\alpha_1 + \vec{\jmath}'\cos\beta_1 + \vec{k}'\cos\gamma_1$$

$$\vec{\jmath} = \vec{\imath}'\cos\alpha_2 + \vec{\jmath}'\cos\beta_2 + \vec{k}'\cos\gamma_2$$

$$\vec{k} = \vec{\imath}'\cos\alpha_3 + \vec{\jmath}'\cos\beta_3 + \vec{k}'\cos\gamma_3$$

Wzory te można za pomocą macierzy napisać w postaci

$$\begin{Bmatrix} \vec{\imath}' \\ \vec{\jmath}' \\ \vec{k}' \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{Bmatrix} = A' \begin{Bmatrix} \vec{\imath}' \\ \vec{\jmath}' \\ \vec{k}' \end{Bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} A' = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix}$$

Wyraźmy dowolny wektor $\vec{B}$ przez wektory jednostkowe obydwu podstaw

$$\vec{B} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'$$

Mnożąc skalarnie przez $\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}'$ oraz $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$

$$x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3$$

$$y' = x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3$$

$$z' = x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3$$

$$x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\beta_1 + z'\cos\gamma_1$$

$$y = x'\cos\alpha_2 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\gamma_2$$

$$z = x'\cos\alpha_3 + y'\cos\beta_3 + z'\cos\gamma_3$$

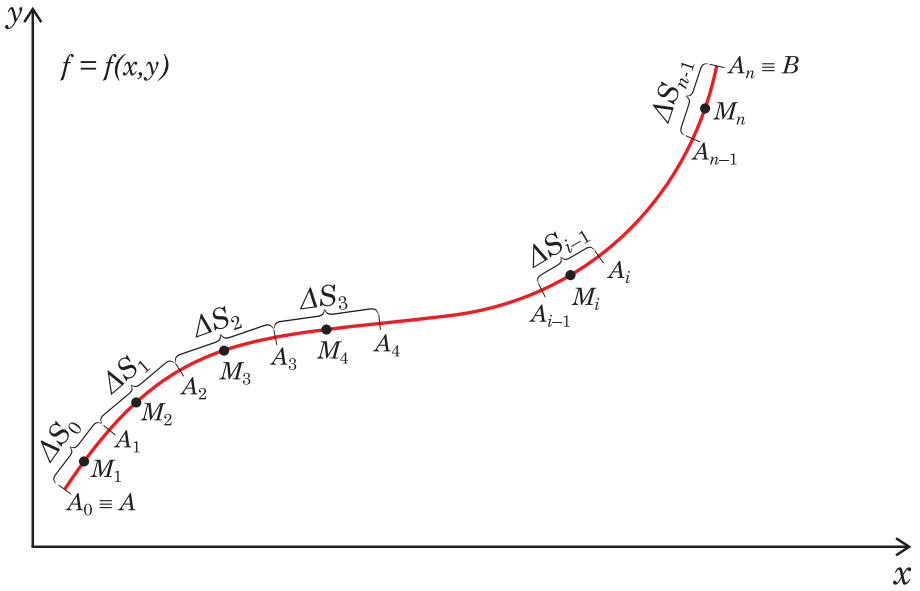
$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = A' \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix}$$

$$|A|^2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix}$$

DODATEK D

Całka krzywoliniowa i powierzchniowa funkcji skalarnej



Rysunek 21

Całką krzywoliniową funkcji f(x,y) po krzywej L

$$\int_L f(x,y)dl = lim_{\substack{\Delta S_{i\to 0} \\ n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\cdot \Delta S_{i-1}$$

Twierdzenie

Jeżeli krzywa L dana jest na płaszczyźnie jawnie równaniem y=φ(x), $x \in [a,b]$ a funkcja jest ciągła na L, to całka krzywoliniowa funkcji f po krzywej L istnieje i zachodzi równość

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}dx$$

Twierdzenie

Jeżeli krzywa L dana jest na płaszczyźnie równaniami parametrycznymi x=φ(x), y=$\psi(x)$, $t\epsilon[a,b]$, to całka krzywoliniowa funkcji f po krzywej L istnieje i

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt$$

W przestrzeni analogicznie:

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\varpi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\varpi'(t)]^2}dt$$

Całka krzywoliniowa funkcji wektorowej

$$\vec{W} = \vec{\imath}P(x,y,z) + \vec{\jmath}Q(x,y,z) + \vec{k}R(x,y,z)$$

Funkcja wektorowa, która każdemu punktowi (x,y,z) łuku L przyporządkowuje wektor $\vec{W}(x,y,z) = [P,Q,R]$.

$$\int_L \vec{W}d\vec{r} = \int_L P(x,y,z) + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

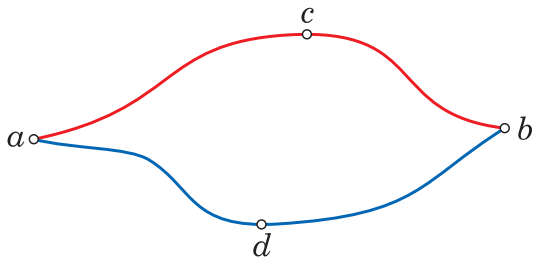
Jeżeli łuk L można przedstawić równaniami parametrycznymi:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \varpi(t); t\epsilon[\alpha,\beta]$$

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[P\big(\varphi(t),\psi(t),\varpi(t)\big)\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t),\psi(t),\varpi(t)\big)\psi'(t)\right.$$
$$\left. + R\big(\varphi(t),\psi(t),\varpi(t)\big)\varpi'(t)\right]dt$$

Twierdzenie



$$\int_{\widetilde{acb}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\widetilde{adb}} Pdx + Qdy + Rdz$$

wtedy gdy istnieje funkcja U(x,y,z) (funkcja pierwotna) taka, że jej różniczka zupełna jest równa funkcji podcałkowej

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{dx}; \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial R}{dx}; \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial R}{dy}$$

Zadanie D1. Oblicz całkę krzywoliniową $\int_L x^2 ydl$, gdzie *L* jest półokręgiem

$$x^2 + y^2 = 1 \; i \; y \geq 1.$$

Zadanie D2. Znaleźć moment bezwładności względem osi współrzędnych *x* i *y* oraz początku układu współrzędnych ćwiartki jednorodnego okręgu (gęstość liniowa $\rho(x,y)=1$), gdzie *L*={*x=2cost, y=2sint,* $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$}.

Zadanie D3.W pewnym polu składowe sił wynoszą *P*(*x,y,z*) = *xy; Q*(*x,y,z*) = *y*+*z; R*(*x,y,z*) = *z.* Wyznaczyć pracę jaką trzeba wykonać przesuwając masę jednostkową wzdłuż linii C o równaniach parametrycznych *C: x* = *2*cos*t, y* = *2*sin*t, z* = *t*; od punktu *A* = (2,0,0) *do B* = (0,2,$\frac{\pi}{2}$).

Zadanie D4. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_C \vec{A}d\vec{r}$*:*

A. wzdłuż okręgu o promieniu r gdzie $\vec{A}=x\vec{\imath}-y\vec{\jmath}+z\vec{k}$; $\begin{cases}x(t)=rcost\\ y(t)=rsint\end{cases}$

B. po obwodzie elipsy, gdy $\vec{A}=(x+y)\vec{z}+(y-z)\vec{\jmath}+(z-x)\vec{k}$; $\begin{cases}x(t)=acost\\ y(t)=bsint\end{cases}$

Zadanie D5. Obliczyć pracę siły $\vec{F}$ działającej przy przenoszeniu masy jednostkowej wzdłuż I ćwiartki elipsy $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ (skierowanej dodatnio), jeżeli wielkość siły jest wprost proporcjonalna do odległości punktu zaczepienia siły od początku układu (siła ta skierowana jest do początku układu, $\vec{F}=-c\vec{r}$).

Pole wektorowe $\overrightarrow{W}$ *jest potencjalne (zachowawcze), jeżeli* $\int_{\widetilde{ab}}\overrightarrow{W}dr$*- nie zależy od drogi całkowania.*

<u>Całki powierzchniowe.</u>

Możemy zdefiniować je dla pola skalarnego i wektorowego. Ogólnie 3 rodzaje całek powierzchniowych (strumieni)

$\int_\Sigma \varphi d\vec{S}$ *– strumień pola skalarnego*

$\int_\Sigma \vec{h}\cdot d\vec{S}$ *- strumień skalarny pola wektorowego*

$\int_\Sigma \vec{h}\times d\vec{S}$ *- strumień wektorowy pola wektorowego*

DODATEK E

Zadania różne

Zadanie E1. Na linie przerzuconej przez nieruchomy blok i przyczepionej do ciężarka o masie m znajduje się człowiek o masie M. Z jakim przyspieszeniem będzie poruszać się ciężarek gdy:

a) Człowiek nie porusza się względem liny,
b) Człowiek wspina się po linie ze stałym przyspieszeniem względem liny
c) Człowiek wspina się po linie ze stałą prędkością względem liny.

Zadanie E2. Na poziomie desce o masie M leży ciało o masie m. Z jakim przyspieszeniem będzie się poruszać deska i ciało, jeżeli na deskę działa poziomo skierowana siła F. Zbadać siły działające i napisać równanie ruchu, gdy

a) Działają siły tarcia (między deską i ciałem oraz między deską i podłożem). Jaka powinna być siła F, żeby masa m poruszała się z tym samym przyspieszeniem co deska.
b) Tarcie pomijamy.

Zadanie E3. Na brzegu poziomo ustawionej tarczy o momencie bezwładności I (względem osi pionowej przechodzącej przez środek tarczy) i promieniu r znajduje się człowiek o masie M. Obliczyć prędkość kątową tarczy, gdy człowiek zacznie się poruszać wzdłuż jej brzegu z prędkością v względem niej.

Zadanie E4. Jaki jest moment bezwładności trójkąta o podstawie a i wysokości h oraz gęstości powierzchniowej ρ względem podstawy jako osi.

Zadanie E5. Wyznaczyć położenie środka masy stożka prostego o wysokości h.

Zadanie E6. Cząstka o masie m_1 i prędkości v_1 zderza się doskonale sprężyście z inna cząstką o masie m_2=3m_1, znajdującą się w spoczynku. Po zderzeniu cząstka o masie m_2 porusza się pod kątem 45° względem pierwotnego kierunku cząstki o masie m_1. Znajdź kąt odchylenia masy m_1 oraz końcowe prędkości cząstek.

Zadanie E7. Zakładamy, że planeta porusza się wokół nieruchomego Słońca. Największa odległość planety od Słońca wynosi A_1 a najmniejsza A_2. Ile wynosi moment pędu planety?
Masę planety, masę Słońca i stałą grawitacji przyjąć za dane.

Zadanie E8. Dane jest pole sił: $\vec{F} = (y^2\vec{\imath} - x^2\vec{\jmath})\ N$

a) Oblicz pracę pola przy przesuwaniu cząstki od położenia A = (0,1) do położenia B = (1,0) Zakładamy przy tym, że praca jest wykonywana:
   - po linii prostej $y = 1 - x$
   - po okręgu $x^2 + y^2 = 1$
   - po osiach współrzędnych $x = 0, y = 0$. Współrzędne wyrażone są w metrach.

b) czy jest to pole potencjalne?

Zadanie E9. Oszacuj odchylenie ku wschodowi ciała spadającego z wieży z wysokości h w polu grawitacyjnym ziemskim. Wynik przedyskutować z zależności od szerokości geograficznej miejscowości w której znajduje się wieża.

Zadanie E10. Oblicz moment bezwładności pręta o długości L i masie m względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez:

a) Środek pręta
b) Koniec pręta.

Zadanie E11. Do końca nici nawiniętej na bęben o promieniu $R = 10$ cm przywiązano ciężar o masie 0.5 kg. Znaleźć moment bezwładności bębna, jeśli widomo, że ciężar opuszcza się z przyspieszeniem $a = 1$ m/s^2.

Zadanie E12. Dwa odważniki i masach $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1$ kg są połączone nicią przerzucona przez krążek. Promień krążka $R = 0.1$ m a jego masa $m = 1$ kg. Obliczyć:

a) Przyspieszenie z jakim poruszają się odważniki,
b) Naciąg F_1 i F_2 nici na których zawieszone są odważniki

Krążek uważać za jednorodny, tarcie pominąć. Moment bezwładności krążka względem osi obrotu pokrywającej się z osią symetrii krążka: $I = ½ mR^2$.

Zadanie E13. Wirnik silnika o $P = 5$ W i $f_{obr} = 3000$ obr/min ma moment bezwładności równy $I = 0{,}025$ kg·m^2.Oblicz moment siły, czas rozruchu oraz energię kinetyczną wirnika.

Zadanie E14. Ciało zsuwa się po powierzchni nachylonej pod kątem α do poziomu. Współczynnik tarcia f zależy od przebytej drogi przez ciało $f(s) = c \cdot s$, gdzie $c > 0$. Wyznaczyć drogę s_x przebytą przez ciało do momentu zatrzymania się oraz maksymalną prędkość ciała na drodze s_x.

Zadanie E 15. Ciało o masie $m = 0{,}02$ kg wykonuje drgania harmoniczne opisywane zależnością: $x(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ (x w metrach, t w sekundach). W chwili, gdy wychylenie masy z położenia równowagi wynosi $x = -1$ m obliczyć przyspieszenie oraz energię kinetyczną i potencjalną. Ile wynosi maksymalna siła działająca na masę?

Zadanie E16. Pozioma platforma wykonuje drgania o amplitudzie A. Jaka może być maksymalna częstość drgań platformy, by leżące na niej ciało nie oderwało się?

Zadanie E17. Jak zmieni się okres drgań pionowych ciężaru wiszącego na dwóch jednakowych sprężynach, gdy połączenie szeregowe zostanie zastąpione równoległym?

Zadanie E18. Punkt bierze udział w dwóch drganiach równoległych o jednakowych częstościach i różnicy faz wynoszącej $\Delta\varphi = 2\pi/3$. Amplitudy tych drgań wynoszą $A_1 = 3$ cm i $A_2 = 4$ cm. Znaleźć amplitudę drgania wypadkowego.

Zadanie E19. Punkt porusza się pod wpływem dwóch prostopadłych drgań składowych. Oblicz trajektorie :

a) $x = 2\sin(\pi t)\ \ y = cos\pi(t + 0.5)$
b) $x = 2\cos(\omega t)\, y = 3\sin(\omega t)$.

Zadanie E20. Promień wodzący punktu materialnego zmienia się w czasie w następujący sposób:$\vec{r} = 4t\vec{\imath} + \exp(-2t)\,\vec{\jmath} + \cos(3t)\vec{k}$. Znajdź zależność od czasu prędkości punktu materialnego oraz jego przyspieszenia.

Zadanie E21. Turysta płynie łódką w górę rzeki. Przepływając pod mostem gubi zapasowe wiosło, które wpada do wody. Po 45 minutach rybak spostrzega brak wiosła. Wraca z powrotem i dogania wiosło w odległości 5 km poniżej mostu. Jaka jest prędkość rzeki, jeśli rybak poruszając się zarówno w górę, jak i w dół rzeki wiosłuje jednakowo.

Zadanie E22. Przy powierzchni ziemi rzucono poziomo ciało z prędkością v_0. Znaleźć przyspieszenie styczne i normalne po czasie *t*.

Zadanie E23. Piłka została rzucona ukośnie w powietrze. Na wysokości h = 9 m jej prędkość wynosi $\vec{v}_h = 7\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$ [m/s]. Podać zależności czasowe $\vec{v}(t)$ oraz $\vec{r}(t)$ oraz określić:

a) Do jakiej maksymalnej wysokości *H* wzniesie się piłka,
b) Ile wynosi całkowity czas przebywania piłki w powietrzu,
c) Pod jakim kątem piłka została wyrzucona,
d) Przyspieszenie styczne i normalne w chwili, gdy piłka jest na wysokości *h*.

Zadanie E24. Cząstka porusza się w dodatnim kierunku osi 0*X*. Jej prędkość zależy od *x* i jest określona wzorem $v = ax$, gdzie *a* – dodatni współczynnik. Wyznaczyć:

a) Zależność prędkości i przyspieszenia od czasu,
b) Średnią prędkość cząstki w czasie, w którym przebędzie ona pierwszych *s* metrów. Przyjąć, że dla $t = 0$ $x = x_0$.

Zadanie E25. Znaleźć prędkość i przyspieszenie w ruchu opisanym równaniami: $x = A\cos(Bt^2)$, $y = A\sin(Bt^2)$, gdzie *A* i *B* są stałymi. Znaleźć równanie toru. Jaki to jest ruch?

Zadanie E26. Motylek porusza się po krzywej, której długość s dana jest wzorem: $s = A\exp(ct)$, gdzie *A*, *c* to stałe. Wiedząc, że wektor przyspieszenia tworzy stały kąt φ ze styczną do tego toru w każdym punkcie znaleźć wartość:

a) Prędkości,
b) Przyspieszenia normalnego i stycznego
c) Promienia krzywizny toru jako funkcji długości łuku krzywej.

Zadanie E27. Koło o promieniu *R* obraca się tak, że kąt obrotu promienia koła φ zależy od czasu w następujący sposób:$\varphi(t) = A + Bt + Ct^3$. Wyznaczyć po czasie *t* od momentu rozpoczęcia ruchu dla punktów położonych w odległości 3*R*/4 od osi obrotu:

a) Prędkość kątową
b) Prędkość liniową
c) Przyspieszenie styczne, normalne i całkowite.

Zadanie E28. Ruch punktu poruszającego się na płaszczyźnie dany jest w układzie kartezjańskim równaniami: $x = bt^2$, $y = ct^2$, gdzie *b, c* – stałe, *b, c*>0. Znaleźć parametryczne równania ruchu w układzie biegunowym, tor ruchu punktu oraz prędkość i przyspieszenie w obu układach odniesienia.

Zadanie E29 [17]. Dwa wektory wychodzące z początku układu współrzędnych mają końce odpowiednio w punktach *A* = (3,0,4) i *B* = (2,2,1). Znaleźć cosinus kąta zawartego między nimi.

Zadanie E30 [17]. Znaleźć rzut siły $\vec{F} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ na kierunek wektora $\vec{P} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

Zadanie E31 [17]. Znaleźć sumę dwóch wektorów równoległych, odległych od siebie o *l*.

Zadanie E 32. Rakieta o masie początkowej M_0 poruszając się w przestrzeni kosmicznej wyrzuca spalone paliwo ze stałą szybkością $dm_s/dt = r$ nadając mu prędkość (względem rakiety równą u. Napisz równanie różniczkowe wiążące prędkość rakiety z jej zmienną masą i znajdź jego rozwiązanie. Oblicz początkowe przyspieszenie rakiety. Przyjąć, że siły zewnętrzne działające na rakietę są równe zero.

Zadanie E 33. Znaleźć odchylenie ku wschodowi ciała spadającego z wieży o wysokości h w polu grawitacyjnym ziemskim. Wynik przedyskutować w zależności od szerokości geograficznej miejscowości w której znajduje się wieża.

Zadanie E34. Na podłodze leży łańcuch o masie m_0 i długości l. Jeden z jego końców podnosimy do góry do póki łańcuch nie oderwie się od podłogi. Wyznaczyć minimalną wartość pracy jaką należy wykonać, aby podnieść łańcuch z podłogi w polu grawitacyjnym Ziemi, gdy:

a) Łańcuch jest jednorodny
b) Łańcuch jest niejednorodny i jego masa zależy od odległości x od jednego z końców według wzoru $m(x)=m_0(x/l)^2$.

Zadanie E35. Ciało o masie 3 kg połączone ze sprężyną wykonuje drgania o amplitudzie 4 cm i okresie 2s.

a) Ile wynosi całkowita energia? Jaka jest maksymalna prędkość ciała? Dla jakiego położenia x_1 prędkość będzie równa połowie swojej maksymalnej wartości?

Zadanie E36. Wyprowadź równanie ruchu drgań wahadła matematycznego. Oblicz okres T wahadła matematycznego o długości l=10m.

Zadanie E37. Wyprowadź równanie ruchu drgań wahadła fizycznego wokół osi O umieszczonej w odległości d od środka ciężkości S tego wahadła. Masa wahadła – m, zaś moment bezwładności I.

Zadanie E38. Człowiek ciągnie sanie po lodzie trzymając naprężona linę z siłą 150 N pod kątem 25° do poziomu. Masa sań wynosi 20 kg, tarcie jest zaniedbywalne. Znajdź przyspieszenie sań po śniegu i składową normalną wywierana przez powierzchnie na sanki.

Zadanie E39. Ciało o ciężarze 100 N porusza się pod wpływem zmiennej siły $F = p(q - t)$, gdzie p = 100 N/s i q = 1 s. po jakim czasie ciało zatrzyma się, jeżeli w chwili t = 0 prędkość jego wynosiła v_0 = 0.2 m/s, a siła miała kierunek prędkości. Jaką drogę przebędzie ciało do chwili zatrzymania się?

Zadanie E40. Dwa ciała o masach m i M powiązane nierozciągliwa nicią umieszczono na równi pochyłej. Wyznacz przyspieszenie ciał oraz siłę naciągu nici. Tarcie pomiędzy nicią a bloczkiem zaniedbujemy. Współczynnik tarcia pomiędzy masami a podłożem wynosi f, kąty pomiędzy równią a podłożem wynoszą α i β.

Zadanie E41. Jaki jest moment bezwładności trójkąta o podstawie a i wysokości h oraz gęstości powierzchniowej ρ względem podstawy jako osi.

Zadanie E42. Wyznaczyć położenie środka masy stożka prostego o wysokości h.