1. Działania arytmetyczne

1.1 Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus (B \cap C)$, $(A \setminus B) \cap C$, $A \cap (B \cup C)$.
a) $A = \langle 0, 2\rangle$, $B = \langle -2, 0\rangle$, $C = \{-2, 0\}$ b) $A = (-\infty, 1\rangle$, $B = \langle -1, 5\rangle$, $C = (-4, \infty)$

1.2 Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus (B \cap C)$, $(A \setminus B) \cap C$.
a) $A = \langle -1, 1\rangle$, $B = \langle 0, 1\rangle$, $C = \{0\}$ b) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = (1, 3)$, $C = \langle 1, 3)$
c) $A = (-\infty, 5\rangle$, $B = \langle -1, 3)$, $C = (-2, 2)$ d) $A = \langle 3, 7)$, $B = \{3, 5, 7\}$, $C = \{7, 8\}$

1.3 Oblicz. Przypomnij umowę co do kolejności działań.
a) $26 - 15 + 3 \cdot 4$ b) $26 - (15 + 3 \cdot 4)$ c) $(26 - 15 + 3) \cdot 4$
d) $36 : 9 : 3$ e) $36 : (9 : 3)$ f) $36 : 9 \cdot 3$ g) $36 : (9 \cdot 3)$

1.4 W oparciu o zapis $6 \cdot 24 - 12 : 4$ i przy użyciu nawiasów, zapisz 4 różne działania tak, aby uzyskać 4 różne wyniki.

1.5 Oblicz (przykłady a, b, c, d – w pamięci).
a) $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot 20$ b) $\left(\frac{9}{2} - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{8}{3}$ c) $\left(\frac{2}{9} + \frac{4}{3}\right) : \frac{1}{9}$ d) $\sqrt[5]{30 + \sqrt[5]{30 + \sqrt[5]{30 + \sqrt[5]{32}}}}$
e) $\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}}$ f) $\frac{1\frac{1}{2} - 2,75}{1\frac{5}{6} - 2\frac{1}{12}}$ g) $\frac{\frac{3}{5} : \frac{9}{10} - 2\frac{1}{5} : (-1,1)}{(2\frac{1}{3} - \frac{3}{4}) \cdot 2\frac{2}{5}}$

1.6 Oblicz.
a) $\frac{\frac{9}{10} : \frac{3}{14} - 3\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{5\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7}}$ b) $\frac{5 \cdot \left(2\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2}\right) \cdot \left(2\frac{2}{3} - 2\frac{1}{5}\right)}{3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{2}{3} - 10\left(2\frac{1}{2} - \frac{11}{5}\right)}$ c) $\frac{12,8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4,5 \cdot \frac{2}{9}}{0,6 \cdot (-1,5) + 4,4 : 0,4} : 3\frac{1}{4}$

1.7 Oblicz. Podaj prawa działań na potęgach wykorzystane w obliczeniach.
a) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^2$ b) $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}\right)^3 : 125^2$ c) $\left(3 - \sqrt{8}\right)^{\sqrt{2}} \cdot \left(3 + \sqrt{8}\right)^{\sqrt{2}}$

1.8 Oblicz.
a) $49^{0,7} \cdot 7^{-1,4}$ b) $(0,0036 \cdot 625)^{-0,5}$ c) $(81 \cdot 0,0049)^{0,5}$

1.9 Oblicz.
a) $\sqrt[4]{32} \cdot 10^{0,75} \cdot 5^{\frac{1}{4}}$ b) $\frac{5^{17} + 5^{15}}{5^{15} + 5^{14}}$ c) $\left(9^{-0,25} + \left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{4}{3}}\right) \cdot \left(9^{-0,25} - \left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)$

1.10 Oblicz.
a) $(0,75)^{-28} \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{-30}$ b) $\frac{5 \cdot 4^7 - 17 \cdot 4^5}{2 \cdot 8^3 - 5 \cdot 2^{11}}$ c) $\left[(4 + 7^{0,5})^{0,5} + (4 - 7^{0,5})^{0,5}\right]^2$

1.11 Wyłącz czynnik przed pierwiastek. Wykonaj działania.
a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{150}$ c) $\sqrt{20n^3}$ d) $\sqrt[3]{-81}$ e) $\sqrt[3]{250}$ f) $\sqrt[3]{64n^4}$
g) $\sqrt[3]{6\frac{1}{8}} : \sqrt[3]{1\frac{1}{7}}$ h) $(3\sqrt{3} - \sqrt{12} + \frac{1}{3}\sqrt{27})\sqrt{3}$ i) $(12\sqrt{50} - 8\sqrt{200} + 7\sqrt{450}) : \sqrt{10}$

1.12 Wykonaj działania.
a) $\sqrt{12} - 2\sqrt{75}$ b) $3\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 5\sqrt{180}$ c) $\sqrt{1,25} - \sqrt{0,2} + \sqrt{6,05}$
d) $\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{250}$ e) $\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{-500}$ f) $3\sqrt[3]{0,002} + \sqrt[3]{0,25} + \sqrt[3]{0,016}$
g) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{\sqrt{7}}(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\sqrt{7}}$ h) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) + (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$
i) $(\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}) : \sqrt[3]{2}$ j) $\sqrt[3]{\frac{1}{16}} : \sqrt[3]{13\frac{1}{2}}$ k) $\frac{\sqrt{3}^{\sqrt{3}} \cdot 3^{1+\sqrt{3}}}{\sqrt{27^{\sqrt{3}-2}}}$
l) $(1 + \sqrt{2})^4 - (1 - \sqrt{2})^4$ m) $25^{\sqrt{2}-1} \cdot 125^{1-\sqrt{2}} \cdot 5^{1+\sqrt{2}}$

1.13 Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{24}$ b) $3\sqrt[4]{\frac{1}{27}}$ c) $a^3\sqrt{3}$ d) $a^2\sqrt{3}$

1.14 Włącz czynnik pod pierwiastek.

a) $20\sqrt[3]{0,01}$ b) $2a^2\sqrt[3]{5a^2}$ c) $\frac{1}{3a}\sqrt[3]{81a^4}$

1.15 Przedstaw wyrażenie $\frac{5\sqrt{5\sqrt{5}}}{\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}$ w postaci jednej potęgi liczby 5.

1.16 Przedstaw wyrażenie w postaci jednej potęgi liczby 5.

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[4]{125}$ b) $\frac{(0,2)^{\sqrt{5}}\cdot 5^{\sqrt{5}+3}}{(0,04)^{2-\sqrt{5}}}$ c) $\left[\left(5^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\sqrt{5}^{-3}\right]:\left(5^{-3}:\sqrt{5}^{3}\right)$

1.17 Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ c) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}}$

1.18 Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{11+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}$

1.19 Uporządkuj rosnąco liczby $\frac{3}{2}$, $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{4}$.

1.20 Uporządkuj liczby rosnąco.

a) $\frac{4}{\sqrt{2}}$, $3\sqrt{2}$, $\frac{10}{3\sqrt{2}}$, $\frac{5}{2\sqrt{2}}$ b) $3(\sqrt{2}-2)$, $2(\sqrt{2}-1)$, $4(\sqrt{2}-3)$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, $\frac{3}{2-\sqrt{2}}$, $1+\sqrt{2}$

1.21 Sprawdź, czy prawdziwa jest równość.

a) $\sqrt{27}+3\sqrt{48}-3\sqrt{75}=0$ b) $\sqrt[3]{1\frac{1}{8}}\cdot\sqrt[3]{8\frac{1}{8}}=2\frac{1}{4}$ c) $3-\sqrt{3}=\sqrt{12-3\sqrt{12}}$

1.22 Sprawdź, czy prawdziwa jest równość.

a) $\sqrt{48}+\sqrt{12}=\sqrt{50}$ b) $\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}=24$ c) $(2\sqrt{24}-\sqrt{150}+\sqrt{54}):\sqrt{12}=\sqrt{2}$

d) $\sqrt[3]{8\frac{1}{6}}:\sqrt[3]{5\frac{1}{7}}=1\frac{1}{6}$ e) $\sqrt{2}-\sqrt{3}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ f) $\frac{1}{2\sqrt{3}-3}+\frac{3-2\sqrt{3}}{3}=1$ g) $\frac{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{2\sqrt{3}+3}}=2-\sqrt{3}$

1. Działania arytmetyczne – odpowiedzi

1.23 a) $A\cup B=\langle -2,2\rangle$, $A\cap B=\{0\}$, $A\setminus B=(0,2\rangle$, $B\setminus A=\langle -2,0)$, $A\setminus(B\cap C)=(0,2\rangle$, $(A\setminus B)\cap C=\emptyset$, $A\cap(B\cup C)=\{0\}$
b) $A\cup B=(-\infty,5\rangle$, $A\cap B=\langle -1,1\rangle$, $A\setminus B=(-\infty,-1)$, $B\setminus A=(1,5\rangle$, $A\setminus(B\cap C)=A\setminus B$, $(A\setminus B)\cap C=(-4,-1)$, $A\cap(B\cup C)=(-4,-1\rangle$

1.24 a) $A\cup B=A$, $A\cap B=B$, $A\setminus B=\langle -1,0)$, $B\setminus A=\emptyset$, $A\setminus(B\cap C)=\langle -1,0)\cup(0,1\rangle$, $(A\setminus B)\cap C=\emptyset$
b) $A\cup B=\langle 1,3\rangle$, $A\cap B=\{2,3\}$, $A\setminus B=\{1\}$, $B\setminus A=(1,2)\cup(2,3)$, $A\setminus(B\cap C)=\{1,3\}$, $(A\setminus B)\cap C=\{1\}$
c) $A\cup B=A$, $A\cap B=B$, $A\setminus B=(-\infty,-1)\cup\langle 3,5\rangle$, $B\setminus A=\emptyset$, $A\setminus(B\cap C)=(-\infty,-1)\cup\langle 2,5\rangle$, $(A\setminus B)\cap C=(-2,-1)$
d) $A\cup B=\langle 3,7\rangle$, $A\cap B=\{3,5\}$, $A\setminus B=(3,5)\cup(5,7)$, $B\setminus A=\{7\}$, $A\setminus(B\cap C)=\langle 3,7)$, $(A\setminus B)\cap C=\emptyset$

1.25 a) 23 b) -1 c) 56 d) $\frac{4}{3}$ e) 12 f) 12 g) $\frac{4}{3}$

1.26 $6\cdot 24-12:4=141$, $6\cdot(24-12:4)=126$,$(6\cdot 24-12):4=33$, $6\cdot(24-12):4=18$

1.27 a) 9 b) 10 c) 14 d) 2 e) 2 f) 5 g) $\frac{40}{57}$

1.28 a) $1,2$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{8}{101}$

1.29 a) $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ b) 5^3 c) 1

1.30 a) 1 b) $\frac{2}{3}$ c) $0,63$

1.31 a) 20 b) $\frac{65}{3}$ c) $\frac{26}{81}$

1.32 a) $\frac{9}{16}$ b) -7 c) 14

1.33 a) $4\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{6}$ c) $2n\sqrt{5n}$ (zał. $n\geqslant 0$) d) $-3\sqrt[3]{3}$ e) $5\sqrt[3]{2}$ f) $4n\sqrt[3]{n}$ g) $\frac{7}{4}$ h) 6 i) $17\sqrt{5}$

1.34 a) $-8\sqrt{3}$ b) $-25\sqrt{5}$ c) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ d) $-\sqrt[3]{2}$ e) 0 f) $\sqrt[3]{2}$ g) 1 h) 12 i) 1 j) $\frac{1}{6}$ k) 81 l) $24\sqrt{2}$ e) 25

1.35 a) $\sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt{3a^6}$ dla $a\geqslant 0$ oraz $-\sqrt{3a^6}$ dla $a<0$ d) $\sqrt{3a^4}$ dla $a\in\mathbb{R}$

1.36 e) $\sqrt[3]{80}$ f) $\sqrt[3]{40a^8}$ dla $a\in\mathbb{R}$ g) $\sqrt[3]{3a}$ dla $a\neq 0$

1.37 $5^{\frac{7}{8}}$

1.38 a) $5^{\frac{23}{12}}$ b) $5^{7-2\sqrt{5}}$ c) $5^{\frac{5}{2}}$

1.39 a) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ b) $2+\sqrt{3}$ c) $\frac{1-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{4}$

1.40 a) $7-2\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$ c) $\frac{1+\sqrt[3]{5}}{6}$

1.41 $\frac{1}{4}<\frac{2-\sqrt{2}}{2}<\frac{3}{2}<\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

1.42 a) $\frac{5}{2\sqrt{2}}<\frac{10}{3\sqrt{2}}<\frac{4}{\sqrt{2}}<3\sqrt{2}$ b) $4(\sqrt{2}-3)<3(\sqrt{2}-2)<2(\sqrt{2}-1)$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=1+\sqrt{2}<\frac{3}{2-\sqrt{2}}$

1.43 a) tak b) nie c) tak

1.44 a) nie b) nie c) tak d) tak e) nie f) nie g) tak

2. Procenty

2.1 Oblicz:
a) $2,5\%$ liczby 360
b) 114% liczby 150
c) liczbę o $1,4\%$ mniejszą od 250
d) liczbę o 215% większą od 4
e) liczbę, której 55% jest równe 33
f) liczbę, której $0,8\%$ jest równe 76

2.2 Oblicz:
a) liczbę o 30% mniejszą od 180% liczby 125
b) liczbę o 16% większą od liczby o 45% mniejszej od 240
c) liczbę, od której 133 jest mniejsze o 5%

2.3 Oblicz, jaki procent liczby x stanowi liczba y oraz jaki procent liczby y stanowi liczba x.
a) $x = 10$, $y = 16$
b) $x = 75$, $y = 30$

2.4 Oblicz, jaki procent liczby x stanowi liczba y.
a) $x = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{12}\right) : \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right)$, $\quad y = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$
b) $x = \dfrac{1,9 \cdot \frac{4}{5} - 8,4 : 3\frac{3}{4}}{5,8 - \frac{12}{5}(2\frac{1}{6} + (1,5)^2)}$, $\quad y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{\sqrt[4]{4}}{3}\right)^2$
c) $x = \dfrac{0,6 \cdot 2\frac{1}{3} + 10 \cdot 3\frac{2}{5} - 11,2 : 9\frac{1}{3}}{7 : 1\frac{1}{9} + 8,4 \cdot 1\frac{2}{7}}$, $\quad y = \dfrac{(\frac{1}{2})^{1,5} \cdot \sqrt[4]{8}}{\sqrt[8]{4}}$

2.5 Dany jest kwadrat o polu P. Jeden z boków wydłużono o 10%, a drugi skrócono o 10%. Jak zmieni się pole prostokąta? O ile procent?

2.6 Dany jest prostokąt o bokach długości a i b. Oblicz, jak i o ile zmieni się jego pole, jeżeli
a) a wzrośnie o 20%, b zmaleje o 20%
b) a wzrośnie o 20%, b zmaleje o 25%
c) a zmaleje o 20%, b wzrośnie o 25%

2.7 O ile procent należy zmniejszyć promień koła, aby jego obwód zmniejszył się o 14%?

2.8 W prostokącie jeden bok wydłużono o 20%, a drugi o $p\%$ tak, że pole tego prostokąta wzrosło o 50%. Oblicz p.

2.9 Pan X zarabia 2400 zł, zaś pan Y – 3480 zł.
a) O ile procent więcej od pana X zarabia pan Y? b) O ile procent mniej od pana Y zarabia pan X?

2.10 Pan X zarabia o 50% więcej, niż pan Y. O ile procent mniej od pana X zarabia pan Y?

2.11 Towary A i B miały jednakową cenę. Oblicz, który z nich jest tańszy, jeżeli
a) cenę A obniżono dwukrotnie, za każdym razem o 20%, zaś cenę B obniżono o 40%.
b) cenę A obniżono o 20%, a następnie podniesiono o 20%, cena B nie uległa zmianie.

2.12 Towary A i B miały jednakową cenę. Oblicz, który z nich jest tańszy, jeżeli
a) cenę A podniesiono dwukrotnie, za każdym razem o 20%, zaś cenę B podniesiono o 40%.
b) cenę A podniesiono o 20%, a następnie obniżono o 20%, cena B nie uległa zmianie.

2.13 Cena brutto towaru objętego 22% podatkiem VAT wynosi 189,10 zł. Oblicz cenę netto. Jaki procent ceny brutto stanowi ten podatek?

2.14 Cena brutto towaru objętego 22% podatkiem VAT wynosi 744,2 zł. Jaka będzie cena brutto tego towaru, gdy podatek zostanie zmniejszony do 7%, a cena netto się nie zmieni? O ile procent zmaleje cena?

2.15 Z 10 kg świeżych grzybów otrzymano 1 kg grzybów suszonych zawierających 10% wody. Ile procent wody zawierały świeże grzyby?

2.16 Arbuz ważył 3 kg i zawierał 99% wody. Po pewnym czasie arbuz zawierał tylko 98%. Ile wtedy ważył?

2.17 Ile litrów wody należy dolać do 300 litrów roztworu cukru o stężeniu 16%, aby otrzymać roztwór o stężeniu 15%?

2.18 Ile litrów wody należy dolać do roztworu cukru o stężeniu 18%, aby otrzymać 900 litrów roztworu o stężeniu 17%?

2.19 Sondaże wykazały, że poparcie dla pewnej partii wzrosło z 18% do 27%. Mówimy wtedy, że nastąpił wzrost o 9 punktów procentowych. O ile procent wzrosło poparcie dla tej partii?

2.20 Przeprowadzono sondaże poparcia dla partii A i B. Wyniki przedstawiono w tabeli.

	marzec	kwiecień
A	15%	20%
B	12%	9%

a) O ile punktów procentowych wzrosło poparcie dla partii A? O ile procent wzrosła liczba osób popierających tę partię?
b) O ile procent zmalało poparcie dla partii B?

2.21 W tabeli przedstawiono wybrane dane o zbiorach buraków cukrowych w latach 1990 i 2000.
a) O ile punktów procentowych zbiory buraków w USA były większe w 2000 roku w porównaniu z rokiem 1990? O ile procent wzrosły zbiory w USA w tym czasie?
b) Udział Polski w światowych zbiorach buraków wzrósł od 1990 roku do roku 2000 o 0,4 punktu procentowego. Czy zbiory buraków w Polsce w tym czasie wzrosły, czy zmalały? O ile procent?

	1990		2000	
	zbiory w mln ton	udział w świecie w procentach	zbiory w mln ton	udział w świecie w procentach
Świat	**302,6**	**100%**	**255**	**100%**
USA	24,4	...	31,1	...
Polska	...	4,7%	...	5,1%

2.22 W drugiej turze wyborów prezydenckich brało udział dwóch kandydatów. Pierwszy z nich uzyskał wynik o 10 punktów procentowych wyższy od drugiego, a 5% osób, które wzięły udział w głosowaniu, oddało głos nieważny. O ile procent więcej wyborców głosowało na pierwszego kandydata niż na drugiego?

2.23 Po obniżce ceny książki o 5%, jej sprzedaż wzrosła o 20%. Przed obniżką marża księgarni stanowiła 20% ceny detalicznej.
a) Jak zmienił się przychód ze sprzedaży książki po obniżce? O ile procent?
b) Jaki procent ceny detalicznej stanowiła marża po obniżce? O ile punktów procentowych zmniejszyła się marża? O ile procent?
c) Jak zmienił się zysk ze sprzedaży książki po obniżce? O ile procent?

2.24 Solankę dziesięcioprocentową zmieszano z solanką dwuprocentową i otrzymano 60 kg roztworu. Gdyby solanki dziesięcioprocentowej wzięto o 20% więcej, a solanki dwuprocentowej o 20% mniej, to otrzymano by solankę ośmioprocentową. Jakie jest stężenie otrzymanej solanki?

3. Wyrażenia algebraiczne

3.1 (Wzory skróconego mnożenia) Wykonaj następujące działania:
a) $(3x-4y)^2$ b) $(2s+5t)^2$ c) $(-a+2b)^2$ d) $(3-2x^3)(3+2x^3)$

3.2 Wykonaj następujące działania:
a) $(-2p+3\sqrt{q})^2$ b) $(4F^2-1)^2$ c) $(-2d-3c)^2$ d) $(5+4x)(4x-5)$

3.3 (Dwumian Newtona, Trójkąt Pascala) Wykonaj następujące działania:
a) $(x+2)^3$ b) $(x-y)^5$ c) $(2a+3b)^4$ d) $(c+1)^8$

3.4 Wykonaj następujące działania:
a) $(a-3)^4$ b) $(x+2y)^5$ c) $(s-\sqrt{t})^4$ d) $(c1-a)^{10}$

3.5 Wykaż, że dla każdych liczb rzeczywistych $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$$

3.6 Podaj (wraz z dowodem) wzr na rozwinięcie $(a+b+c+d)^2$.

3.7 Niech $x = 2-\sqrt{5}$ i $y = 1+3\sqrt{5}$. Wykonaj działania, a wynik zapisz w postaci $a+b\sqrt{5}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$.
a) $x \cdot y$ b) $3x+y$ c) $y:x$ d) $\dfrac{2y-x}{2x+y}$

3.8 Wykonaj polecenia poprzedniego zadania dla liczb $x = 2\sqrt{5}-3$ i $y = \sqrt{5}$.

3.9 Niech $a = \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ i $b = \sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. Oblicz:
a) $a \cdot b$ b) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ c) $(a+b)^2$ d) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$

3.10 Niech $a = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ i $b = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$. Oblicz:
a) $a \cdot b$ b) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ c) $\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}$ d) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$
e) $(a-b)^2$ f) $(a+b)^2$ g) $\dfrac{1}{a^2}+a^2$ h) $\dfrac{1}{a^2}-b^2$

3.11 Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
a) $(2\sqrt{3}-x)^2-2(2\sqrt{3}-x)(2\sqrt{3}+x)+(2\sqrt{3}+x)^2$
b) $(x+1)^4-2(x^2-1)^2+(x-1)^4$
c) $(x+\sqrt{2})^4-(x-\sqrt{2})^4$

3.12 Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
a) $(x+\sqrt{3})^3+2x(x+3)(x-3)+(x-\sqrt{3})^3$
b) $(x-\sqrt{3})(x^2+\sqrt{3}x+3)-(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x+3)$
c) $(x^2-1)(x^4+x^2+1)-(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

3.13 Oblicz a^4+b^4 wiedząc, że $ab=1$ oraz $a^2+b^2=3$

3.14 Oblicz a^4+b^4 wiedząc, że $a^2+b^2=9$ oraz $a+b=1$

3.15 Oblicz wartość liczbową wyrażenia

$$\frac{\left[(x^6y^2)^3:(-x^2y^2)^4\right]^2}{(-x^4y)^5:(-xy^2)^3}$$

dla $x = \sqrt{2}-1$ i $y = \sqrt{2}+1$.

3.16 Dla $a = -0,1$ i $b = 1$ oblicz

$$\left(\frac{2a^4b^5}{a^5b^3}\right)^3 - \left[(a^2b^3)^3:(a^4b^2)^2\cdot b^2\right]:a.$$

3.17 Skróć wyrażenia wymierne:

a) $\dfrac{x^2-y^2}{2y-2x}$ b) $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}$ c) $\dfrac{a^3-b^3}{2a^2+2ab+2b^2}$ d) $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$

3.18 Skróć wyrażenia wymierne:

a) $\dfrac{x^3+y^3}{2y+2x}$ b) $\dfrac{x^4-1}{x^4-2x^2+1}$ c) $\dfrac{(y^2+y)(xy+x^2)}{(y^2+xy)(x^2+x)}$ d) $\dfrac{(x^2-4y^2)(9x^2-6x+1)}{(3x^2-x+6xy-2y)(3x^2+x-6xy-2y)2}$

3.19 Wykonaj działania:

a) $\dfrac{a+1}{a-1}+\dfrac{a-2}{1-a}$ b) $\dfrac{7}{x^2-9}+\dfrac{5}{x-3}-\dfrac{1}{x+3}$ c) $\dfrac{3x+2}{x^2-2x+1}-\dfrac{6}{x^2-1}-\dfrac{3x-2}{x^2+2x+1}$

3.20 Wykonaj działania:

a) $\dfrac{2a+4}{4a^2-9}+\dfrac{a-4}{2a^2+3a}+\dfrac{2}{2a-3}$ b) $\dfrac{x-3}{x+2}+\dfrac{x+1}{2x}-\dfrac{x-2}{x^2+2x}$ c) $\dfrac{3x}{x^2-5x+6}-\dfrac{x+1}{(x-1)(3-x)}+\dfrac{3-2x}{x^2-3x+2}$

3.21 Oblicz

$$\frac{5\left[(\sqrt{2}-1)^3(\sqrt{2}+1)^3\right]^2-\left[\left((\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}+1)\right)^2\cdot\left((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)^2\right)^2\right]}{4(\sqrt{2}-1)^3(\sqrt{2}+1)^3}$$

3.22 Oblicz

$$(2(2+\sqrt{3})-3(\sqrt{45}-\sqrt{11}))^2-(3(2+\sqrt{3})-\sqrt{45}+\sqrt{11})(3(2+\sqrt{3})+\sqrt{45}-\sqrt{11})+((2+\sqrt{3})-2(\sqrt{45}-\sqrt{11}))^2$$
$$-(8(2+\sqrt{3})-7(\sqrt{45}-\sqrt{11}))(-2(\sqrt{45}-\sqrt{11}))$$

4. Wartość bezwzględna

4.1 Zapisz w prostszej postaci, opuszczając symbol wartości bezwzględnej.
a) $|\pi - 3,14|$ b) $|3 - 2\sqrt{3}|$

4.2 Zapisz w prostszej postaci, opuszczając symbol wartości bezwzględnej.
a) $|3 - 2\sqrt{2}|$ b) $\left|2,625 - \frac{2}{3} \cdot 2\frac{5}{14}\right|$ c) $|\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{1+\sqrt{5}}|$

4.3 Zapisz wyrażenie w najprostszej postaci wiedząc, że $x \in \langle 1, 5\rangle$.
a) $|x| + |x + 1| + |x - 5|$ b) $|x - 1| + |x - 7|$ c) $|6 - x| + |2x + 4|$

4.4 Zapisz wyrażenie w najprostszej postaci wiedząc, że $x \in \langle -1, 2\rangle$.
a) $|x - 2| + |x + 1| + |3 - x|$ b) $|x - 4| + |2x - 7|$ c) $|6 - x| + |9 - 3x| + |x + 2|$

4.5 Naszkicuj wykresy funkcji: $y = |x|$, $y = |x| - 1$, $y = |x + 1|$, $y = |x - 1|$, $y = |x| + 1$, $y = |x + 1| - 1$, $y = ||x + 1| - 1|$

4.6 Naszkicuj wykresy funkcji: $y = |x - 2|$, $y = |x| - 2$, $y = |x + 2|$, $y = |x| + 2$, $y = |x + 2| - 3$, $y = ||x + 3| - 2|$

4.7 Naszkicuj wykresy funkcji
a) $y = |x| + |x - 1|$ b) $y = 2|x|$ c) $y = x|x|$ d) $y = x - |x|$ e) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$
f) $y = |4 - 2x|$ g) $y = 4 - 2|x|$ h) $f(x) = \sqrt{25 - 10x + x^2} - \sqrt{x^2 + 6x + 9} + x$

4.8 Naszkicuj wykresy funkcji
a) $y = |2 - x| + |x - 1|$ b) $y = -3|x|$ c) $y = x^2|x|$ d) $y = x + |x|$ e) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$
f) $y = |3x - 2|$ g) $y = 3 - 2|x|$ h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$

4.9 Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x + 1| - 2$. Określ przedziały monotoniczności tej funkcji. Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

4.10 Naszkicuj wykres funkcji f. Określ przedziały monotoniczności tej funkcji. Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.
a) $f(x) = |2 - |x + 1||$ b) $f(x) = |4 - |x||$ c) $f(x) = |2x - 3| - |x + 1| + |2 - x|$

4.11 Ile punktów wspólnych z osią OX ma wykres funkcji $f(x) = ||x - 1| - 2| + ||x - 2| - 1|$?

4.12 Ile punktów wspólnych z osią OX ma wykres funkcji $f(x) = ||x - 1| - 2| - ||x - 1| - 1|$?

4.13 Narysuj wykres funkcji $y = \frac{|x|}{x}$. Omw jej własności.

4.14 Narysuj wykres funkcji $y = |x| - x$. Omw jej własności.

4.15 Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji $y = |2x - 1|$ i $y = 10$.

4.16 Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji $y = |x - 1| - 2$ i $y = 4 - |2 - x|$.

4.17 Naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = |x - 6|$, a następnie rozwiąż nierówność $f(x) \leqslant g(x)$.

4.18 Naszkicuj na jednym rysunku wykresy funkcji $f(x) = |3 - x|$ i $g(x) = 4x - 2$, a następnie rozwiąż nierówność $f(x) \leqslant g(x)$.

4.19 Jakim przekształceniom należy poddać wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = 3|x|$, aby otrzymać wykres funkcji g?
a) $g(x) = 3|x + 1| + 5$ b) $g(x) = 3|3 - x| - 1$ c) $g(x) = |3x + 6| - 3$ d) $g(x) = |3x - 12| + 2$

4.20 Jakim przekształceniom należy poddać wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = 2|x|$, aby otrzymać wykres funkcji g?
a) $g(x) = 2|x - 3| + 1$ b) $g(x) = -2|3 - x|$ c) $g(x) = 2| - x - 2| - 3$ d) $g(x) = |2x + 4| + 1$

4.21 Naszkicuj wykres funkcji f oraz wykresy funkcji $g(x) = |f(x)|$ i $h(x) = f(|x|)$. Zapisz wzór każdej z tych funkcji.
a) $f(x) = 3 - x$ b) $f(x) = 1 - x^2$ c) $f(x) = x^2 - 2x$

4.22 Naszkicuj wykres funkcji f oraz wykresy funkcji $g(x) = |f(x)|$ i $h(x) = f(|x|)$. Zapisz wzór każdej z tych funkcji.
a) $f(x) = x + 2$ b) $f(x) = x^2 - 4$ c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

4.23 Rozwiąż równanie lub nierówność, korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej.
a) $|x| = 13$ b) $|x - 1| = 13$ c) $||x - 1| - 3| = 13$ d) $|x| \leqslant 7$
e) $|x + 2| \leqslant 7$ f) $|x| > 8$ g) $|x - 3| > 8$ h) $|4|x| + 5| \leqslant 7$

4.24 Rozwiąż równanie lub nierówność, korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej.
a) $|x| = 8$ b) $|x - 2| = 10$ c) $||x + 1| - 3| = 1$ d) $|x| \leqslant 2$
e) $|x + 3| \leqslant 3$ f) $|x| > 4$ g) $|2x - 3| > 5$ h) $|4|x| + 5| \leqslant 3$

4.25 Rozwiąż równanie.
a) $3 - 2|x| = 0$ b) $|x + 2| + 4 = |2x + 4|$ c) $2 - |x - 2| = x$
d) $3 - |x| = |x - 1|$ e) $|x| + 3 = |x - 3|$ f) $|x + 4| + |x - 3| = 5$

4.26 Rozwiąż równanie.
a) $4 + 2|x| = 0$ b) $|x + 2| + 4 = |x + 4|$ c) $3 - |x - 2| = x$
d) $|x - 2| - |x - 1| = 2$ e) $|x| + 4 - |x - 3| = 0$ f) $|x + 2| + |x - 2| = 8$

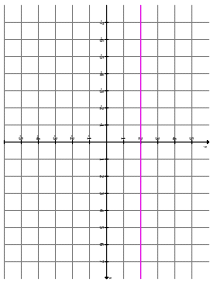
4.27 Rozwiąż nierówność.
a) $||x| - 2| \geqslant 4$ b) $|4 - x| + |3x - 12| < 4 + |2x - 8|$ c) $2x + |x - 1| \geqslant 6$
d) $|x| + |x + 2| > 2$ e) $|x + 2| + |x - 2| \leqslant 4 - 2x$ f) $|4|x| - 5| \geqslant 3$

4.28 Rozwiąż nierówność.
a) $|2 - |x + 1|| \leqslant 3$ b) $|x - 1| + |5 - x| - 2|x + 3| + |x + 1| < 2x$ c) $2 - |x + 3| > 4 - x$
d) $|x| + |x + 1| > 2$ e) $|x + 2| + |x - 2| \leqslant 4$ f) $|x - 4| + 3 < |2 - x|$

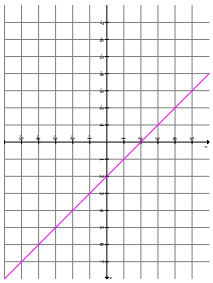
5. Funkcja liniowa (1)

5.1 Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej f. Odczytaj z wykresu miejsce zerowe tej funkcji oraz dla jakich argumentów przyjmuje ona wartości dodatnie. Wyznacz współczynnik kierunkowy oraz wzór tej funkcji. Sprawdź, czy do wykresu należą punkty $A(0,2)$, $B(-\frac{4}{3},2)$, $C(-\frac{4}{7},\frac{18}{7})$.

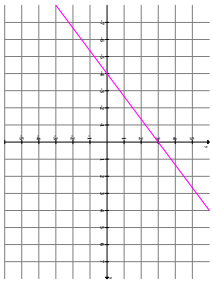
a)



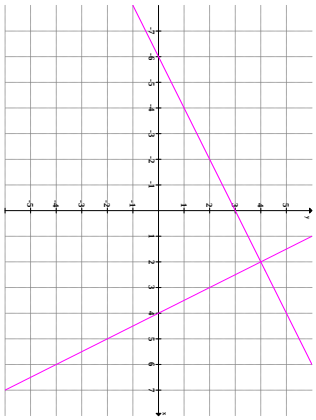
b)



c)



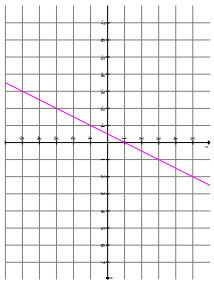
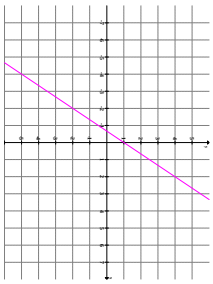
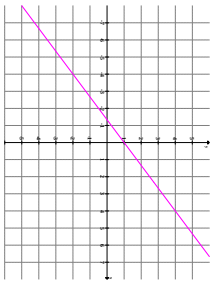
5.2 Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji liniowych f i g. Funkcja f jest funkcją rosnącą. Podaj wzór każdej z tych funkcji. Odczytaj, dla jakich argunentów
a) obie funkcje jednocześnie przyjmują wartości dodatnie
b) prawdziwa jest nierówność $f(x) \leqslant g(x)$.



5.3 Napisz wzór funkcji liniowej f, jeżeli $f(-1) = 3$ oraz
a) do wykresu tej funkcji należy punkt $(3\sqrt{7}, 3)$
b) jej wykres jest nachylony do osi OX pod kątem $\alpha = 30^\circ$
c) jej wykres jest równoległy do wykresu funkcji $g(x) = \sqrt{3}$
d) jej wykres jest prostopadły do wykresu funkcji $g(x) = \frac{1}{3}x$
d) f przyjmuje wartości ujemne dla $x > 4$.

5.4 Do wykresu funkcji liniowej f należy punkt $A(-1,3)$. Wyznacz wzór tej funkcji, jeżeli:
a) $f(0) = 1$
b) jej wykres jest nachylony do osi OX pod kątem $\alpha = 135^\circ$
c) jej wykres jest równoległy do wykresu funkcji $g(x) = -3x$
d) jej wykres jest prostopadły do wykresu funkcji $g(x) = \sqrt{3}x$
e) f przyjmuje wartości dodatnie dla $x < 1$.

5.5 Dopasuj każdy z wykresów z rysunku do odpowiedniego opisu funkcji.
a) b) c)

1) przyrostowi argumentu x o dwie jednostki odpowiada przyrost wartości funkcji o trzy jednostki
2) przyrostowi argumentu x o jedną jednostkę odpowiada przyrost wartości funkcji o dwie jednostki
3) przyrostowi argumentu x o dwie jednostki odpowiada przyrost wartości funkcji o 1,5 jednostki

5.6 Dla funkcji f danej poniższym wzorem określ zależność między przyrostem argumentu x a odpowiadającym mu przyrostem wartości funkcji.
a) $f(x) = 3x - 1$ b) $f(x) = \frac{3}{4}x - 5$ c) $f(x) = \frac{1}{5}x + 6$

5.7 Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x < -4 \\ x & \text{dla } -4 \leqslant x \leqslant 4 \\ -5 & \text{dla } x > 4 \end{cases}$. Z wykresu odczytaj miejsca zerowe funkcji, jej przedziały monotoniczności i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$.

5.8 Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ -2x + 6 & \text{dla } 1 < x < 5 \\ 4x - 24 & \text{dla } x \geqslant 5 \end{cases}$. Z wykresu odczytaj miejsca zerowe funkcji, jej przedziały monotoniczności i zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 4$.

5.9 Określ liczbę rozwiązań równania $(1 + ax)a = x + 1$ w zależności od parametru a.

5.10 Określ liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru a.
a) $(2 + a)x = x + 1$ b) $(1 + x)a = x + 1$ c) $(2 + a^2)x = x + 1$

5.11 Wyznacz wzór funkcji liniowej f, o której wiadomo, że:
a) $f(2) = 1$ i $f(x) = f(x + 1) + 2$ dla $x \in \mathbb{R}$ b) $f(2 - 3x) = 6x - 2$ dla $x \in \mathbb{R}$

5.12 Wyznacz wzór funkcji liniowej f, o której wiadomo, że:
a) $f(2) = 4$ i $f(x - 1) = f(x + 1)$ dla $x \in \mathbb{R}$ b) $f(2x - 3) = x + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$

5.13 Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań.
a) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 6x - 3y = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0,2x + 0,1y = 1 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2|x| + y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$

5.14 Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań.
a) $\begin{cases} 2(x + y) - 3(2x - y) = 1 \\ \frac{x-y}{2} + \frac{2x-y}{3} = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ |y| - x - 1 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} |x| + 2|y| = 3 \\ 7x + 5y = 2 \end{cases}$

6. Funkcja liniowa (2)

6.1 Dla jakich wartości parametru a układ równań $\begin{cases} ax + y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$ jest sprzeczny?

6.2 Dla jakich wartości parametrów a i b układ jest sprzeczny?

a) $\begin{cases} 2x + ay = -1 \\ 2ax + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax + 3y = 6 \\ 2x + y = b \end{cases}$

6.3 Dla jakich wartości parametru a układ $\begin{cases} 4x + ay = 8 \\ ax + y = 4 \end{cases}$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie?

6.4 Dla jakich wartości parametru a układ ma przynajmniej jedno rozwiązanie?

a) $\begin{cases} 2x + 6y = a \\ 3x + 9y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 6y = 1 \\ x + ay = 2 \end{cases}$

6.5 Dla jakich wartości parametru a rozwiązaniem układu $\begin{cases} -x + y = 3a + 3 \\ 3x - y = 3 - 5a \end{cases}$ jest para liczb nieujemnych?

6.6 Dla jakich wartości parametru a rozwiązaniem układu $\begin{cases} x + 2y = 8 - 7a \\ 2x - y = 1 + a \end{cases}$ jest para liczb różnych znaków?

6.7 Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, jeżeli $A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 2x + y \geqslant 2\}$ oraz $B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y \geqslant 0\}$.

6.8 Zaznacz w układzie współrzędnych zbiory A, B, $A \cup B$, $A \cap B$.
a) $A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y \leqslant x + 3\}$, $B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y > x - 2\}$
b) $A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, |x| + y \leqslant 4\}$, $B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 2|x| - y \leqslant 2\}$

6.9 Naszkicuj wykresy funkcji $f = -0,5x + 3$ i $g = |x - 3|$ w jednym układzie współrzędnych i odczytaj rozwiązanie nierówności $f(x) \leqslant g(x)$.

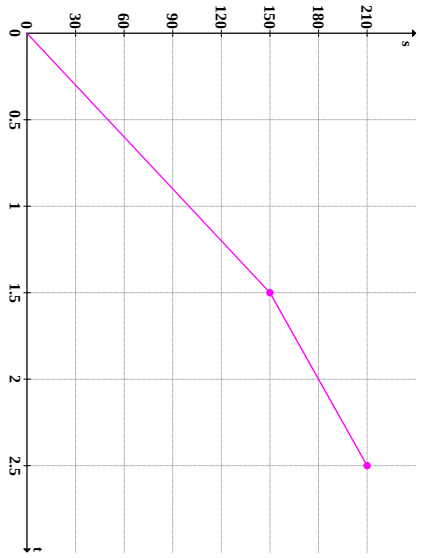
6.10 Naszkicuj wykresy funkcji $f = ||x| - 2|$ i $g = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ w jednym układzie współrzędnych i odczytaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geqslant g(x)$.

6.11 Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ 3z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 9 \\ 2y - z = 3 \\ y - 3z = -1 \end{cases}$

6.12 Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x + 2y + z = 4 \\ x - 3y - 2z = -3 \end{cases}$.

6.13 Na wykresie przedstawiono zależność drogi s (w km) przebytej przez samochód, od czasu t (w godz.). Wyznacz prędkość na każdym z etapów podróży i naszkicuj wykres zależności prędkości od czasu. Oblicz średnią prędkość podczas całej podróży.



6.14 Jadąc z miasta A do miasta B samochód pokonał pierwsze 80 km z prędkością 60 km/h, następne 200 km z prędkością 120 km/h, a pozostałą część trasy pokonał z prędkością 60 km/h w czasie 20 min. Naszkicuj wykres funkcji s, która uzależnia liczbę przejechanych kilometrów od czasu podróży. Jaka była długość trasy? Ile czasu trwała podróż? Z jaką średnią prędkością samochód przejechał tę trasę?

6.15 Firmy X i Y wypożyczają samochody. W firmie X koszt wypożyczenia samochodu na jeden dzień składa się ze stałej opłaty 50 zł oraz 20 gr za każdy przejechany kilometr. W firmie Y koszt ten to 40 zł stałej opłaty i 25 gr za każdy kilometr.
a) Dla każdej z firm zapisz wzorem zależność kosztu wypożyczenia samochodu na jeden dzień od liczby przejechanych kilometrów.
b) W której firmie korzystniej jest wypożyczyć samochód, jeżeli planujemy jednodniową podróż na trasie 400 km? Jaki będzie koszt wypożyczenia w każdej z firm, jeżeli tą samą podróż rozłożymy na dwa dni?
c) Planując jednodniową podróż klient stwierdził, że koszt wypożyczenia samochodu w obu firmach będzie jednakowy. Jakiej długości trasę zaplanował?

6.16 Dzienne koszty produkcji w firmie produkującej pokarm dla kotów w puszkach opisuje wzór $k(x) = 2x + 800$, gdzie 800 zł to stały koszt dzienny, zaś x - liczba dziennie wyprodukowanych puszek. Dochody firmy opisuje wzór $d(x) = 4x$, gdzie x jest liczbą dziennie sprzedanych puszek. Firma sprzedaje wszystkie wyprodukowane danego dnia puszki. Oblicz i zilustruj na wykresie:
a) przy jakiej wielkości dziennej produkcji firma osiąga zerowy zysk
b) przy jakiej wielkości dziennej produkcji firma osiąga zysk w wysokości 1400 zł.

6.17 Z miasta A wyjechała ciężarówka, jadąc ze stałą prędkością w kierunku miasta B, oddalonego o 95 km. Po 20 min z miasta A wyjechał za nią samochód, który po 10 min jazdy minął ciężarówkę. Samochód dojechał do miasta B i natychmiast zawrócił. Jadąc z tą samą prędkością minął ciążarówkę po upływie 1 h 30 min od chwili, gdy wyjechał z miasta A. Oblicz prędkość każdego z pojazdów.

6.18 Statek wycieczkowy pokonuje odległość 18 km w ciągu 45 minut z prądem rzeki, a w ciągu 75 minut pod prąd. Oblicz prędkość statku i rzeki.

7. Funkcja kwadratowa

7.1 Sprowadź do postaci kanonicznej i naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2 + 6x + 1$. Podaj zbiór warości funkcji.

7.2 Sprowadź do postaci kanonicznej i naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (x + 1)(3 - x)$. Podaj zbiór warości funkcji f i przedziały monotoniczności.

7.3 Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 3x + c$. Wyznacz liczbę c wiedząc, że:
a) funkcja ma miejsce zerowe równe 1
b) wykres funkcji jest styczny do osi OX
c) najmniejsza wartość funkcji jest równa zero.

7.4 Wyznacz współczynniki b i c trójmianu $y = x^2 + bx + c$ wiedząc, że osiąga on wartość najmniejszą równą 5 dla $x = -2$.

7.5 Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = (x - 1)(5 - x)$ w przedziale $\langle 0, 7\rangle$.

7.6 Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale $\langle 0, 2\rangle$.
a) $f(x) = -2x^2 + x + 1$ b) $f(x) = 2x^2 + x - 1$

7.7 Wyznacz współczynniki b i c trójmianu $y = x^2 + bx + c$, jeżeli jego pierwiastkami są 3 i 7.

7.8 Liczby x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji $f(x) = -2x^2 + bx + c$, której wykres przechodzi przez punkt o współrzędnych $(-1, 3)$. Wyznacz b i c, jeżeli $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$.

7.9 Wykaż, że równanie $(1 + \sqrt{2})x^2 + 4x + 1 - \sqrt{2} = 0$ ma pierwiastki. Nie wyznaczając tych pierwiastków, określ ich znaki.

7.10 Wykaż, że równanie $(\sqrt{3} - \sqrt{2})x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ ma pierwiastki. Nie wyznaczając tych pierwiastków, określ ich znaki.

7.11 Uzasadnij, że nie istnieje równanie kwadratowe o pierwiastkach x_1 i x_2 takich, że $x_1 + x_2 = 2$ i $x_1 \cdot x_2 = 4$.

7.12 Uzasadnij, że nie istnieje równanie kwadratowe o pierwiastkach x_1 i x_2 takich, że $x_1 + x_2 = 1$ i $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$.

7.13 Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $-6x^2 + 3x + 2 = 0$. Oblicz wartość wyrażenia.
a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $(x_1 - x_2)^2$ c) $|x_1 - x_2|$ d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

7.14 Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami pewnego równania kwadratowego. Niech $s = x_1 + x_2$ oraz $p = x_1 \cdot x_2$. Uzasadnij wzory.
a) $\frac{1}{x_1^2 \cdot x_2} + \frac{1}{x_1 \cdot x_2^2} = \frac{s}{p^2}$ b) $x_1^3 + x_2^3 = s^3 - 3sp$ c) $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{s^3 - 3sp}{p^3}$

7.15 Pierwiastki x_1 i x_2 równania $x^2 + bx + c = 0$ są kwadratami pierwiastków równania $x^2 - 4x - 7 = 0$. Korzystając ze wzorów Viète'a, oblicz $x_1 + x_2$ oraz $x_1 \cdot x_2$. Znajdź b i c.

7.16 Pierwiastki równania $x^2 + bx + c = 0$ są odwrotnościami pierwiastków równania $x^2 + 3x - 5 = 0$. Nie wyznaczając tych pierwiastków, znajdź b i c.

7.17 Rozwiąż równanie, nie stosując wzorów na pierwiastki trójmianu.
a) $2x^2 - 5x = 0$ b) $12x^2 - 1 = 0$ c) $x^2 - 14x + 49 = 0$ d) $(3x^2 + 1)^2 = 9$

7.18 Rozwiąż równanie, nie stosując wzorów na pierwiastki trójmianu.
a) $4x^2 = x^4$ b) $3 - 2x^2 = 0$ c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ d) $(2x^2 - 7)^2 = 25$

7.19 Spośród poniższych nierówności wskaż te, których rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych.
a) $\frac{7}{9}x^2 > 0$ b) $-6x^2 - 2 \leqslant 0$ c) $x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$ d) $-\sqrt{3}x^2 + \sqrt{7}x - 1 < 0$

7.20 Rozwiąż nierówność.
a) $-2x^2 + 5x > 1$ b) $x^2 - 6x + 9 < 0$ c) $x^2 - 2x + \sqrt{13} > 0$

7.21 Miasta A i B leżą nad rzeką w odległości 150 km od siebie. Statek pokonał trasę od miasta A do B i z powrotem w 16 h. Prędkość własna statku wynosi 20 km/h. Jaka jest prędkość rzeki?

7.22 Ogrodnik posiada dwie kwadratowe działki, z których jedna ma pole powierzchni $2,25$ razy wieksze od drugiej. Do ogrodzenia większej działki potrzebuje o 40 m więcej siatki, niż do ogrodzenia mniejszej. Ile metrów siatki potrzebuje do ogrodzenia obu działek?

7.23 W ciągu 2 lat liczba ludności pewnego miasta wzrosła z 200000 do 220500. Oblicz w procentach średni roczny przyrost ludności tego miasta.

7.24 Pan X wpłacił do banku 10000 zł. Na koniec każdego roku bank dolicza odsetki w wysokości p %. Po dwóch latach pan X dysponował kwotą 11236 zł. Oblicz p.

7.25 Rozwiąż równanie, podstawiając niewiadomą pomocniczą.
a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ b) $x - 5\sqrt{x} - 6 = 0$ c) $x^2 + 2|x| - 3 = 0$

7.26 Rozwiąż równanie, podstawiając niewiadomą pomocniczą.
a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ b) $x + 7\sqrt{x} + 6 = 0$ c) $x^2 + \sqrt{x^2 + 20} = 22$

7.27 Rozwiąż nierówność.
a) $x^4 - 5x^2 - 36 \geqslant 0$ b) $|x^2 - x - 6| \leqslant 0$ c) $\sqrt{x-2} < 8 - x$

7.28 Rozwiąż nierówność.
a) $x^2 + |x| - 2 \geqslant 0$ b) $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8 - x$ c) $\sqrt{x+3} > 9 - x$

7.29 Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) \leqslant g(x)$, jeżeli $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$, $g(x) = x + 1$.

7.30 Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) \leqslant g(x)$, jeżeli $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $g(x) = |x - 3|$

7.31 Naszkicuj wykres funkcji $y = f(m)$ wyrażającej liczbę pierwiastków równania $|x^2 - x - 6| = m$.

7.32 Wierzchołkiem paraboli $y = x^2 + bx + c$ jest punkt $(2, -3)$. Podaj liczbę rozwiązań równania:
a) $|x^2 + bx + c| = 2$ b) $|x^2 + bx + c| = 3$ c) $|x^2 + bx + c| = 4$

7.33 Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej m wszystkie rozwiązania równania $x^2 + mx + m - 1 = 0$ są liczbami całkowitymi.

7.34 Dla jakiej wartości parametru m pierwiastki x_1, x_2 równania $x^2 + \frac{2}{\sqrt{m}}x - \frac{m}{2} = 0$ spełniają nierówność $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 4$?

7.35 Dla jakiej wartości parametru m równanie $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste ujemne?

7.36 Dla jakiej wartości parametru m równanie $x^2 + (2m-3)x + 2m + 5 = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste różnych znaków?

7.37 Dla jakich wartości parametru m nierówność $(5-m)x^2 - 2(1-m)x + 2(1-m) < 0$ jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych?

7.38 Dana jest funkcja $f(x) = (m-1)x^2 + 2mx + 3m - 2$. Dla jakich wartości parametru m funkcja f przyjmuje wartości tylko ujemne?

7.39 Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których suma kwadratów jest siedem razy większa od ich sumy?

7.40 Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności kwadratów jest większa od $\frac{7}{2}$?

7.41 Dla jakiej wartości parametru m równanie $x^4 + mx^2 + m + 2 = 0$ ma cztery rozwiązania?

7.42 Naszkicuj wykres funkcji $y = f(m)$ wyrażającej liczbę pierwiastków równania $x^4 + mx^2 + 4 = 0$.

8. Wielomiany

8.1 Dane są wielomiany $p(x) = x^3 - 2x - 1$ i $q(x) = -x^2 + x + 1$. Wyznacz wielomian w i określ jego stopień.
a) $w(x) = p(x) + q(x)$ b) $w(x) = p(x) + xq(x)$ c) $w(x) = p(x) + (1 + x)q(x)$

8.2 Dane są wielomiany $p(x) = x^3 - 2x - 1$ i $q(x) = -x^2 + x + 1$. Wyznacz wielomian w i określ jego stopień.
a) $w(x) = p(x) + 2q(x)$ b) $w(x) = p(x) - q(x)$ c) $w(x) = p(x) \cdot q(x)$

8.3 Dane są wielomiany $w(x) = x^2 + x - 1$, $g(x) = ax + b$, $h(x) = x^3 + 6x^2 + 4x - 5$. Wyznacz współczynniki a i b tak, aby $w(x) \cdot g(x) = h(x)$.

8.4 Czy można tak dobrać parametry a i b, żeby wielomian $w(x) = 3x^3 + 4x^2 - 13x + 6$ był równy wielomianowi p?
a) $p(x) = (x - 1)(ax^2 + bx - 6)$ b) $p(x) = (x + 3)(ax^2 - bx + a - b)$ c) $p(x) = (3x - 2)(ax^2 + bx + a - b)$

8.5 Wyznacz współczynnik wielomianu $w(x) = (\sqrt{2} \cdot x + 1)^9$ przy potędze x^8.

8.6 Wyznacz współczynnik wielomianu $w(x) = (x^2 - 1)^6$ przy potędze x^6.

8.7 Oblicz sumę współczynników i wyraz wolny wielomianu $w(x) = (4x^5 + 2x^3 - 4x - 1)^2(3x^5 - 2x^3 + 4x - 3)^2$.

8.8 Oblicz sumę współczynników i wyraz wolny wielomianu w
a) $w(x) = (x^{100} + 4x^{80} + 2x^{30} - 6)^3(x^2 + 3x - 3)^5$ b) $w(x) = (8x^{11} - x^7 - 4x^3 - 1)^6(8x^6 - 7x^3 + 1)^4$

8.9 Rozłóż wielomian w na czynniki.
a) $w(x) = x^6 - 2x^3 + 1$ b) $w(x) = x^4 - 16$ c) $w(x) = (2x - 4)^3 - (2 - x)^3$
d) $w(x) = -5x^5 + 30x^4 - 45x^3$ e) $w(x) = \sqrt{3}x^3 - x^2 + 3x - \sqrt{3}$

8.10 Rozłóż wielomian w na czynniki.
a) $w(x) = x^6 + 16x^3 + 64$ b) $w(x) = x^8 - 25x^6$ c) $w(x) = 5(x - 1)^5 - 20(x - 1)^3$
d) $w(x) = 3x^3 - 12x + 3x^2 - 12$ e) $w(x) = x^6 - x^4 - x^2 + 1$ f) $w(x) = 3x^3 - 15x^2 - 6x + 30$

8.11 Wykonaj dzielenie wielomianu w przez wielomian q i zapisz go w postaci $w(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$, gdzie r jest resztą z dzielenia.
a) $w(x) = 4x^3 + x^2 - 3x + 1$, $q(x) = x - 1$ b) $w(x) = 6x^5 + 4x^3 + 3x - 5$, $q(x) = x^2 - x + 3$

8.12 Wykonaj dzielenie wielomianu w przez wielomian q i zapisz go w postaci $w(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$.
a) $w(x) = 2x^3 - x^2 - 2x - 3$, $q(x) = x + 1$ b) $w(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x + 3$, $q(x) = 3x - 2$
c) $w(x) = 5x^3 - 9x^2 + 4x$, $q(x) = x^2 - x + 1$ d) $w(x) = 6x^3 - 4x^2 + 4x - 1$, $q(x) = 2x^2 + 1$

8.13 Dzieląc wielomian w przez wielomian q otrzymano wielomian p oraz resztę r. Wyznacz q.
a) $w(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 5$, $p(x) = x^3 + 2x + 1$, $r(x) = 4$
b) $w(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4x + 5$, $p(x) = x + 1$, $r(x) = 3x + 5$

8.14 Dzieląc wielomian w przez wielomian q otrzymano wielomian p oraz resztę r. Wyznacz q.
a) $w(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4x + 5$, $p(x) = x^3 + 5x^2 + 13x + 30$, $r(x) = -65$
b) $w(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 1$, $p(x) = x^2 - 3x + 2$, $r(x) = -1$
c) $w(x) = -x^3 + 4x^2 - x$, $p(x) = 2 - x$, $r(x) = 6x - 6$
d) $w(x) = -2x^3 + 8x^2 - 2x - 2$, $p(x) = x - 4$, $r(x) = -3x + 2$

8.15 Nie wykonując dzielenia sprawdź, czy wielomian $w(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + x - 6$ jest podzielny przez wielomian q.
a) $q(x) = x + 1$ b) $q(x) = x - 1$ c) $q(x) = (x - 3)(x + 1)$ d) $q(x) = x^2 + 2x - 3$

8.16 Nie wykonując dzielenia sprawdź, czy wielomian $w(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$ jest podzielny przez wielomian p.
a) $p(x) = x - 1$ b) $p(x) = x + 1$ c) $p(x) = x + 3$
d) $p(x) = x + 333$ e) $p(x) = (x - 1)(x + 3)$ f) $p(x) = x^2 - 3x + 2$

8.17 Nie wykonując dzielenia, wyznacz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q.
a) $w(x) = x^4 + 2x^2 + 4x - 5$, $q(x) = x + 2$
b) $w(x) = 100x^{50} - 85x^{49} + x + 0,15$, $q(x) = x - 0,85$

8.18 Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = 100x^{100} - 99x^{99}$ przez dwumian q.
a) $q(x) = x - 1$ b) $q(x) = x + 1$ c) $q(x) = x - 0,99$

8.19 Dla jakiej wartości parametru m wielomian $w(x) = x^3 + mx^2 + 4x - 2m - 10$ jest podzielny przez wielomian $q(x) = x + 3$?

8.20 Dla jakich wartości parametru a wielomian w jest podzielny przez wielomian q?
a) $w(x) = a^2x^3 - 4ax + 5$, $q(x) = x + 1$ b) $w(x) = x^3 + 2ax^2 - 3a^2x + 5x - 5a$, $q(x) = x - a$

8.21 Dla jakich liczb a i b wielomian $w(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + a$ jest podzielny przez wielomian $q(x) = x^2 - 1$?

8.22 Dla jakich liczb a i b wielomian $w(x) = ax^3 + bx^2 - x + 30$ jest podzielny przez wielomian $q(x) = x^2 - 5x + 6$?

8.23 Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = x^{100} + x^{50} + x^{25}$ przez $q(x) = x^2 - 1$.

8.24 Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu w przez q.
a) $w(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x + 8$, $q(x) = x^2 - 3x + 2$
b) $w(x) = x^3 + x^5 + x^7 + x^{11} + x^{13} + x^{17} + x^{19}$, $q(x) = x^2 - 1$.

8.25 Pewien wielomian daje przy dzieleniu przez $(x - 1)$ resztę 2, zaś przy dzieleniu przez $(x - 2)$ resztę 3. Znaleźć resztę z dzielenia tego wielomianu przez $(x - 1)(x - 2)$.

8.26 Pewien wielomian daje przy dzieleniu przez $(x-1)$ resztę 1, przy dzieleniu przez $(x-2)$ resztę 2, zaś przy dzieleniu przez $(x - 3)$ resztę 3. Znaleźć resztę z dzielenia tego wielomianu przez $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

8.27 Znajdź wszystkie całkowite pierwiastki równania.
a) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 5x - 2 = 0$

8.28 Znajdź wszystkie całkowite pierwiastki równania.
a) $x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0$
b) $x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3 - 3x^2 - 3x - 2 = 0$
c) $x^3 - 3x^2 - 4x = 12$

8.29 Wykaż, że liczba 1 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.

8.30 Wykaż, że liczba 1 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$.

8.31 Znajdź pierwiastki wielomianu $w(x) = (x^5 - 4x^3 + 8x^2 - 32)(x^3 - 2x^2)$ i ustal ich krotność.

8.32 Znajdź pierwiastki wielomianu w i ustal ich krotność.
a) $w(x) = x^5(x - 3)(x + 11)^2(2x + 4)^3$ b) $W(x) = (x^2 - 3x + 2)(-2x^2 + 3x + 2)(-2x^2 + x + 1)$

8.33 Rozwiąż równanie.
a) $x^{57} - x^{56} + 56x - 56 = 0$ b) $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$ c) $x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0$
d) $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ e) $2x^3 - 9x^2 + 27 = 0$

8.34 Rozwiąż równanie.
a) $x^3 - 7x + 6 = 0$ b) $x^{45} - x^{44} + 44x - 44 = 0$ c) $x^3 - 100x = x^2 - 100$
d) $x^4 - 5x^3 - 2x + 10 = 0$ e) $x^3 + 2x^2 - 14x - 3 = 0$ f) $2x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 4x - 4 = 0$

8.35 Rozwiąż nierówność.
a) $(x + 1)(x - 3)(5 - x) > 0$ b) $(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 5x + 4) \geqslant 0$ c) $x^5 + 27x^2 \leqslant 0$
d) $(x + 1)^{2009} > 0$ e) $(x + 1)^{2008} > 0$.

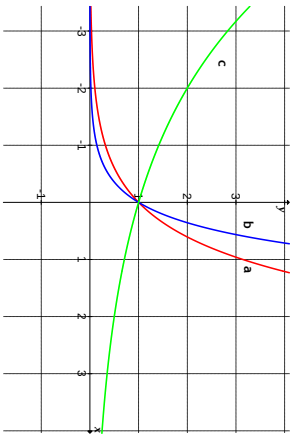
8.36 Rozwiąż nierówność.
a) $x(x^2 - 4x + 3)(x - 3) > 0$ b) $10x^2 - 8x < 5x^3 - x^4$ c) $x^3 - 21x - 20 < 0$
d) $x^{21} + x^{20} + x + 1 > 0$ e) $4x^3 + 12x^2 - x - 3 \geqslant 0$ f) $3(x + 2)(x^2 + 1)(x + 1)^2 \geqslant 0$

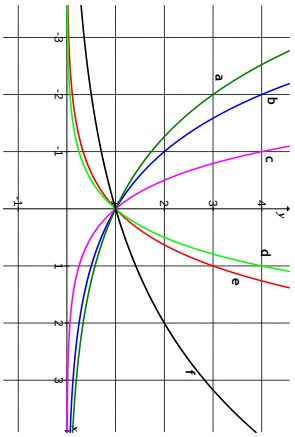
8.37 Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej n wartość wielomianu $n^5 - n$ jest liczbą podzielną przez 6. (*Wsk.* rozłóż wielomian na czynniki)

8.38 Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej n
a) wartość wielomianu $n^3 - n$ jest liczbą podzielną przez 3
b) wartość wielomianu $n^4 - 2n^3 + n^2$ jest liczbą podzielną przez 4

9. Funkcja wykładnicza

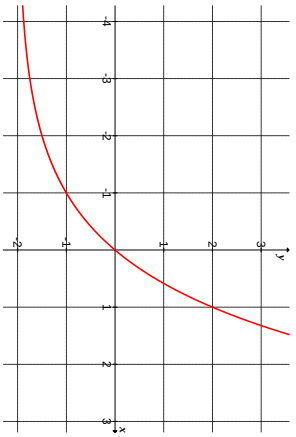
9.1 Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji $y = 7^x$, $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$, $y = \pi^x$. Dopasuj wzór do wykresu.



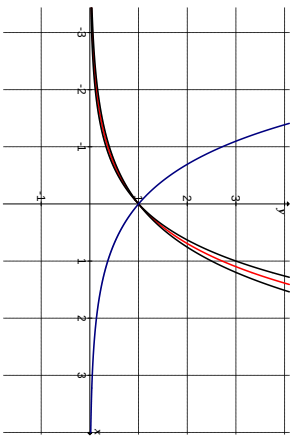


9.2 Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji $y = a^x$. Dla każdej z funkcji podaj wartość a.

9.3 Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 2^{x-a} + b$.
a) Wyznacz wartości parametrów a i b.
b) Rozwiąż nierówność $f^2(x) > 4$.



9.4 Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj rozwiązania nierówności $f(x) \leqslant a$.
a) $f(x) = 2^{x-1} + 2$, $a = 3$
b) $f(x) = 2^{x+2} - 4$, $a = 0$
c) $f(x) = 2^{x-3} - 1$, $a = 3$



Ćwiczenie 1. Niech $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = (2,5)^x$, $y = 3^x$, $y = e^x$, $y = e^{-x}$. Przyporządkuj wykresom ich wzory. Omów własności funkcji $y = e^x$. Czy znasz inne przedstawienia liczby e?

Ćwiczenie 2. a) Oblicz $\left(1+\frac{1}{5}\right)^5$, $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}$, $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$

b) Zakładamy lokatę z kwotą początkową 1 zł. Roczna stopa procentowa wynosi 100%. W ciągu roku n razy dopisywane są odsetki. Jaki kapitał zgromadzimy na koniec roku? Czy wartość zgromadzonego kapitału rośnie nieograniczenie wraz z rosnącą liczbą n?

9.5 Dla jakich wartości parametru a funkcja $f(x) = (a-3)^{-x}$ jest rosnąca?

9.6 Dla jakich m funkcja f jest malejąca?
a) $f(x) = (3m-2)^x$ b) $f(x) = (3m-2)^{-x}$

9.7 Uzupełnij jednym z symboli " $<$ ", " $>$ " lub " $=$ ".
a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} \ldots \left(\sqrt{2}\right)^{0,5}$ b) $(0,6)^{-3} \ldots \left(\frac{5}{3}\right)^2$ c) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4 \ldots \left(\frac{4}{3}\right)^{2,5}$ d) $(2,5)^{2,5} \ldots (0,4)^{-2,5}$

9.8 Uporządkuj liczby rosnąco.
a) $5^{\sqrt{5}}$, $25\sqrt{5}$, $125^{\frac{4}{5}}$, $25^{1,1}$ b) $9^{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt[4]{27}$, $(\sqrt[3]{3})^{-2}$ c) $(4,5)^{-2}$, $\sqrt{0,4}^{\sqrt{12}}$, $(2,5)^{-2,4}$, $0,064$

9.9 Określ znak liczby x, jeżeli: a) $3^x = 7$ b) $e^x = 2-e$ c) $(\frac{7}{3})^x = \frac{1}{7}$

9.10 Określ znak liczby x, jeżeli:
a) $(\frac{3}{7})^x = 7$ b) $(\frac{1}{3})^x = \frac{3}{7}$ c) $7^x = \frac{7}{3}$

9.11 Naszkicuj wykres funkcji f danej poniższym wzorem. Odczytaj z wykresu zbiór wartości tej funkcji oraz jej miejsca zerowe, o ile je posiada. Zbadaj monotoniczność funkcji f.
a) $f(x) = 2 + 4 \cdot 2^{-x}$ b) $f(x) = |e^2 - e^x|$ c) $f(x) = 2^{|x+1|} - 3$

9.12 Naszkicuj wykres funkcji f danej poniższym wzorem. Odczytaj z wykresu zbiór wartości tej funkcji oraz jej miejsca zerowe, o ile je posiada. Zbadaj monotoniczność funkcji f.
a) $f(x) = |1 - 3^{-x}|$ b) $f(x) = 4 \cdot 2^{2x} - 4$ c) $f(x) = 1 - 9 \cdot 3^{-x}$ d) $f(x) = 2^{-|x|}$ e) $f(x) = 2 - 2^{|x-2|}$

9.13 Posługując się wykresami odpowiednich funkcji, podaj rozwiązania równania lub nierówności.
a) $2^{x+1} + 2^{-x} = 3$ b) $e^{1-x} = 2^{2x-2}$ c) $2^{|x|} \leqslant x+1$

9.14 Posługując się wykresami odpowiednich funkcji, podaj rozwiązania równania lub nierówności.
a) $2|x| = 3^x - 1$ b) $|2^{x+1} - 3| > 1$ c) $2^{x+1} - 3^{2-x} \leqslant 1$ d) $x^2 + 3x > 7 - 3^{|x|}$

9.15 Rozwiąż równanie.
a) $\left(\frac{4}{5}\right)^{x-6} = \left(\frac{5}{4}\right)^{3x-2}$ b) $5 \cdot 2^{3x+1} + 9 \cdot 3^{x-1} = 3^{x+2} + 2^{3x+2}$ c) $3^x - 3^{1-x} = 2$ d) $2^{3x} \cdot 7^{x-2} = 4^{x+1}$

9.16 Rozwiąż równanie.
a) $4^{1,5x} + 0,125^{1-x} = 9$ b) $3^{5x-4} + 3^{5x} = 82$ c) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$ d) $11^{x-7} = 17^{7-x}$
e) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ f) $8 \cdot 2^{x-3} + 5 \cdot 2^{-x} = 6$ g) $6^{x+1} + 6^{1-x} = 37$ h) $e^{2x} + e^x = 2$

9.17 Rozwiąż nierówność.
a) $4^{\frac{1}{x}} < \sqrt{2}$ b) $5^{2x+1} - 6 \cdot 5^x + 1 > 0$ c) $\frac{1}{(\frac{1}{4})^x - 2} < \frac{1}{1 - (\frac{1}{4})^{x+\frac{1}{2}}}$

9.18 Rozwiąż nierówność.
a) $9^{\frac{4}{x}} < \sqrt{3}$ b) $2^{4x} + 8 \cdot 4^{2x} > 27$ c) $3^{2x} > 2 \cdot 3^x + 3$ d) $\frac{1}{1-4^{x-1}} + \frac{4}{4^x} \leqslant \frac{1}{2}$

9.19 Wyznacz te wartości parametru m, dla których równanie $(m+2) \cdot 2^{2x-1} - m \cdot 2^{x+1} + m = 0$ ma dwa różne pierwiastki

9.20 Wyznacz te wartości parametru m, dla których równanie ma dwa różne pierwiastki.
a) $9^x + 2m3^x - m = 0$ b) $2^{2x} - m2^{x+1} + m = 0$

10. Funkcja logarytmiczna

10.1 Oblicz.
a) $\log_3 27$ b) $\log_{27}\sqrt{3}$ c) $\log_3 \frac{1}{27}$ d) $\log_{\frac{1}{27}} 3$ e) $\log_{\sqrt{27}} 3$
f) $\sqrt{27}^{\log_3 2}$ g) $27^{\log_3 2}$ h) $3^{2+\log_9 4}$ i) $\log_4 \sqrt{\frac{1}{6}} \cdot \log_{36} \sqrt[4]{4}$

10.2 Oblicz, korzystając z własności logarytmów.
a) $\log_2 3 \cdot \log_9 16$ b) $\log_2 25 \cdot \log_{\sqrt{5}} 2$ c) $4^{\log_{16} 9+\log_2 3}$ d) $5^{\log_{25} 8+\log_{\frac{1}{5}} 4}$

10.3 Udowodnij, że jeżeli $\log_2 3 = a$, to:
a) $\log_6 2 = \frac{1}{a+1}$ b) $\frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 2} + \frac{1}{\log_9 2} = 2,5a$

10.4 Wiedząc, że $\log_2 x = a$, oblicz:
a) $\log_8 x$ b) $\log_{\frac{1}{4}} x$ c) $\log_{2\sqrt{2}} x$ d) $\log_{16}\sqrt{x}$

10.5 Niech $p = \log_a x$, gdzie $x, a \in \mathbb{R}_+$ oraz $a \neq 1$. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$ prawdziwy jest wzór

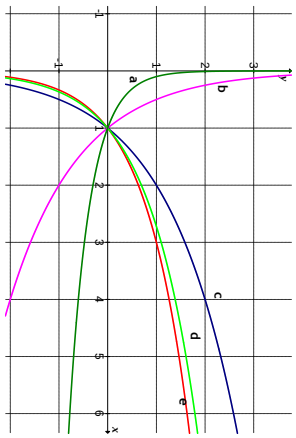
$$\log_{\sqrt[n]{a}} x = np.$$

10.6 Niech $p = \log_a x$, gdzie $x, a \in \mathbb{R}_+$ oraz $a \neq 1$. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$:
a) $n \log_{a^n} x = p$ b) $n \log_{a^{-n}} x = -p$

10.7 Korzystając z definicji lub własności logarytmu, wyznacz x z równania.
a) $\log_{\sqrt{2}} x = 8$ b) $\log_4 \log_2 x = 0$ c) $\log_{(x+1)}(x^2+3) = 2$
d) $\log_6 x = -2 + 2\log_6 4 + \log_6 18$ e) $\log_2 x = \log_{0,5} 3 + \log_{\sqrt{2}} 5$

10.8 Wyznacz x z równania.
a) $\log_{0,1} x = -4$ b) $\log_2 \log_{\sqrt{2}} x = 2$ c) $\log_{(x+1)} 9 = 2$ d) $\log_{(x^2-4)} 5 = 1$
e) $\log_3 x = 0,5 \log_3 4 + \log_3 5 - \log_3 2$ f) $\log_{0,1} x = 2 - 2\log 5 + \log 4$

Ćwiczenie. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$, $y = \ln x$, $y = \log_{0,5}$, $y = \log_{0,1} x$. Dopasuj wzór do wykresu.



10.9 Dla jakich m funkcja f dana wzorem $f(x) = \log_{(3m-2)}(-x)$ jest malejąca?

10.10 Dla jakiej wartości parametru a funkcja f dana wzorem $f(x) = \log_{2-a} x$ jest rosnąca?

10.11 Uzupełnij jednym z symboli " $<$ ", " $>$ " lub " $=$ ".
a) $\log_2 3$ ... $\log_3 2$ b) $\log_4 9$ ... $\log_2 3$ c) $\log_5 10$ ... $\log_{\sqrt{5}} 4$ d) $2\log_3 2$ ... $2 - \log_3 2$

10.12 Uzasadnij nierówność:
a) $\frac{1}{\log_7 3} + \frac{1}{\log_4 3} > 2$ b) $2 < \frac{1}{\log_9 5} + \log_5 4 < 3$

10.13 Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz podaj jej miejsca zerowe.
a) $f(x) = \log_2(x^2 - 5x + 4)$ b) $f(x) = \log_{x+1}|2x + 3|$

10.14 Wyznacz dziedzinę funkcji.
a) $f(x) = \log_3(x + 2) - \log_5(4 - x)$ b) $f(x) = \log_{(x^2-1)}(x + 1)$ c) $f(x) = \sqrt{\log_3(10 - x^2)}$

10.15 Narysuj wykres funkcji f. Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości. Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 1?
a) $f(x) = \log_3(3x - 6)$ b) $f(x) = |\ln|x||$

10.16 Narysuj wykres funkcji f. Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości. Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 1?
a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 3) + 1$ b) $f(x) = \log_2(2x + 2)$ c) $f(x) = |1 - \log_2 x|$ d) $f(x) = |\log_2(4x + 4)|$

10.17 Posługując się wykresami odpowiednich funkcji, podaj rozwiązania nierówności.
a) $\log_3 x < -x^2 + 1$ b) $\log_{\frac{1}{3}} x - |\log_3 x| \geqslant 0$

10.18 Posługując się wykresami odpowiednich funkcji, podaj rozwiązania nierówności.
a) $3^x > \log_3 x$ b) $\log_2(x + 1) \geqslant 1 + \log_{0,5} x$ c) $3 + \log_{\frac{1}{3}}(x + 3) \geqslant \log_3(x - 3)$

10.19 Rozwiąż równanie lub nierówność.
a) $\frac{2\log x + \log(x+4)}{\log x} = 1$ b) $\log_3^2(2x) + \log_3(6x) = 1$ c) $\log_x(4x - 4) = 2$
d) $2\log_{0,5} x \leqslant \log_{0,5}(x + 6) - 3$ e) $\log_2^2 x - 3\log_2 x - 18 < 0$ f) $\log_{x+2}(x + 3) \geqslant 1$
g) $2^x = 5$ h) $5^{x+3} = 7$ i) $3^{x^2+x} = 5^x$

10.20 Rozwiąż równanie lub nierówność.
a) $\log_2(3 - 2x) - \log_2(4x - 1) = 1$ b) $\log_2^2(x + 2) - 2\log_2(x + 2) = 3$ c) $\log_{\sqrt{2}}(\log_{\sqrt{8}}(\log_{\sqrt{2}} 4x)) = 2$
d) $\log_{x+2}(x^3 + 8) = 2$ e) $\log_2(x - 3) + \log_2(x + 6) \geqslant 1 + \log_2(5x - 12)$ f) $2\log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{2}}(4x) + 1 > 0$
g) $\log_{\frac{1}{5}} \log_4(x^2 - 5) > 0$ h) $\log_x 9 > 2$ i) $\log_{2x-3}(x - 1) < 1$

10.21 pH roztworu określa się wzorem pH$= -\log[H_3O^+]$, gdzie $[H_3O^+]$ oznacza stężenie jonów H_3O^+ w roztworze, mierzone w molach na dm^3. Woda ma odczyn obojętny, pH $= 7$. Roztwory o pH mniejszym od 7 są kwasowe, roztwory o pH większym od 7 są zasadowe. Oblicz pH wody mineralnej, w której stężenie jonów H_3O^+ jest równe $1,3 \cdot 10^{-4}$.

10.22 a) Sprawdź, jaki odczyn, kwasowy czy zasadowy, mają:
• wino (stężenie jonów H_3O^+ jest równe $4 \cdot 10^{-4}$) • woda morska (stężenie jonów H_3O^+ jest równe $2,2 \cdot 10^{-9}$)
b) Oblicz stężenie jonów H_3O^+ we krwi, ktorej pH jest równe 7,4.

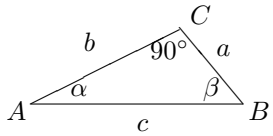
10.23 Funkcję wykładniczą $y = e^x$ wykorzystuje się w zagadnieniach dotyczących wzrostu liczebności populacji. Wzrost liczby ludności można opisać wzorem $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$, gdzie N_0 jest początkową liczbą ludności, t – czasem mierzonym w latach, $N(t)$ – liczbą ludności po upływie czasu t ($N_0 = N(0)$), k – pewną stałą. W roku 1920 na świecie żyło około 1789 mln ludzi, a w roku 1930 – około 2013 mln.
a) Przyjmując $N_0 = 1789$, $N(10) = 2013$, wyznacz wzór, wyrażający liczbę ludności N w zależności od czasu t.
b) Ilu ludzi żyło na świecie w roku 1924?
c) Jak sądzisz, czy otrzymana funkcja nadaje się do prognozowania liczby ludności w przyszłości?

10.24 Liczba ludności pewnego kraju wzrasta zgodnie z modelem, opisanym w poprzednim zadaniu i podwaja się co 30 lat. O ile procent rocznie rośnie liczba ludności tego kraju?

11. Funkcje trygonometryczne

15.1 Wyznacz długości boków oraz miary kątów trójkąta prostokątnego ABC, jeżeli $a = 2 - \sqrt{2}$ i $b = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$.

15.2 Rozwiąż trójkąt prostokątny ABC, mając dane:
a) $b = 12$, $\alpha = 60^\circ$
b) $a = 40$, $\alpha = 30^\circ$
c) $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$



15.3 Oblicz.
a) $\sin 750^\circ$ b) $\cos 135^\circ$ c) $\operatorname{tg}(-315^\circ)$ d) $\operatorname{ctg} 840^\circ$

15.4 Oblicz.
a) $\sin 225^\circ$ b) $\sin(-150^\circ)$ c) $\cos(-120^\circ)$ d) $\sin 660^\circ$ e) $\operatorname{ctg}(-750^\circ)$ f) $\operatorname{tg} 240^\circ$

15.5 Dane są miary łukowe dwóch kątów trójkąta: $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{4}$. Wyznacz miarę trzeciego kąta w stopniach i radianach.

15.6 Dane są miary łukowe dwóch kątów trójkąta. Wyznacz miarę trzeciego kąta w stopniach i radianach.
a) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{9}$ b) $\frac{\pi}{12}$, $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{\pi}{6}$

15.7 Wyznacz miarę łukową kąta środkowego w okręgu o promieniu $r = 8$, opartego na łuku długości $l = \frac{2}{3}\pi$. Podaj miarę tego kąta w stopniach.

15.8 Wyznacz miarę łukową kąta środkowego w okręgu o promieniu r, opartego na łuku długości l. Podaj miarę tego kąta w stopniach.
a) $r = 4$, $l = 2\pi$ b) $r = 12$, $l = 4\pi$ c) $r = 12$, $l = 6$

15.9 Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta AOB oraz jego miarę, jeżeli $O = (0, 0)$, $A = (8, 0)$ oraz
a) $B = (8, 8)$ b) $B = (-8, 8\sqrt{3})$

15.10 Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta AOB, gdzie $O = (0, 0)$, $A = (8, 0)$ oraz
a) $B = (8\sqrt{3}, -8)$ b) $B = (-8, 8)$ c) $B = (-8, -8\sqrt{3})$

15.11 Opisz przebieg konstrukcji kąta α w układzie współrzędnych, jeżeli $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.

15.12 Skonstruuj w układzie współrzędnych kąt α, jeżeli:
a) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ b) $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = 5$

15.13 Znajdź wartości trzech pozostałych funkcji trygonometrycznych, jeśli $\cos x = -\frac{1}{4}$ i $x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$.

15.14 Znajdź wartości trzech pozostałych funkcji trygonometrycznych, jeśli
a) $\cos x = -\frac{1}{4}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ b) $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$ i $x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$

15.15 Uprość wyrażenie $\sqrt{1 + \cos 2x}$, gdy $x \in (\frac{\pi}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$.

15.16 Uprość wyrażenie.
a) $\sqrt{1 - \sin^2 x}$, gdy $x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ b) $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, gdy $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ c) $\sqrt{1 + \sin 2x}$, gdy $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

15.17 Uporządkuj rosnąco liczby.
a) $\sin\frac{4}{7}\pi$, $\sin\frac{5}{7}\pi$, $\sin\frac{9}{14}\pi$ b) $\cos\frac{1}{7}\pi$, $\cos\frac{8}{7}\pi$, $\cos\frac{9}{7}\pi$

15.18 Uporządkuj rosnąco liczby.
a) $\sin 0,6\pi$, $\sin 0,8\pi$, $\sin 0,7\pi$ b) $\sin\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{5}{4}\pi$, $\sin\frac{7}{8}\pi$ c) $\cos 0,6\pi$, $\cos 0,8\pi$, $\cos 0,7\pi$

15.19 Udowodnij tożsamości.

a) $\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}=\frac{2}{\cos^2 x}$ b) $\frac{1}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}=\cos 2x$

c) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$ d) $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

15.20 Sprawdź tożsamości.

a) $\frac{\cos^2 x}{\cos x-\sin x}+\frac{\sin x+\cos x}{1-\operatorname{ctg}^2 x}=\sin x+\cos x$ b) $\frac{\sin^3 x+\sin 3x}{\cos^3 x-\cos 3x}=\operatorname{ctg} x$ c) $\frac{\cos^2 x}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\sin 2x$

d) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg}^2 x-1}=1$ e) $\sin 2x=\frac{1}{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2x}$ f) $\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2}{\sin x}$

g) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$ h) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=-2\cos(x+\frac{\pi}{6})$ i) $\sin^2 x-\sin^2 y=\sin(x+y)\sin(x-y)$

15.21 Oblicz $\sin x$ i $\cos x$ wiedząc, że $\cos 2x=0,28$ i $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$.

15.22 Oblicz $\sin x$ i $\cos x$ wiedząc, że :

a) $\cos 2x=0,6$ i $x\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$ b) $\cos 2x=0,28$ i $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

15.23 Oblicz.

a) $\sin 15^\circ$ b) $\cos 135^\circ$ c) $\operatorname{ctg} 75^\circ$

d) $\cos 67^\circ\cos 22^\circ+\sin 67^\circ\sin 22^\circ$ e) $\sin\frac{7}{12}\pi+\sin\frac{\pi}{12}$

15.24 Oblicz.

a) $\cos 75^\circ$ b) $\sin 135^\circ$ c) $\operatorname{ctg} 165^\circ$ d) $\sin 11^\circ\cos 19^\circ+\sin 19^\circ\cos 11^\circ$

e) $\sin\frac{3}{7}\pi\sin\frac{5}{21}\pi-\cos\frac{3}{7}\pi\cos\frac{5}{21}\pi$ e) $\sin\frac{5}{7}\pi+\sin\frac{9}{7}\pi$ f) $\cos\frac{13}{9}\pi-\cos\frac{5}{9}\pi$

12. Ciąg arytmetyczny

12.1 Wyznacz ciąg arytmetyczny, w którym:
a) $a_2 = -6$, $a_8 = 54$
b) suma czterech pierwszych wyrazów jest trzy razy większa od sumy czterech następnych , zaś $a_1 = 1$.

12.2 Oblicz wyraz pierwszy, różnicę ciągu arytmetycznego i sumę 10 pierwszych wyrazów, gdy:
a) $a_6 = 20, a_{10} = 4$, b) $a_5 = 20, a_9 = 36$, c) $a_4 = 5, a_{11} = 34$.

12.3 Czwarty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 6. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

12.4 Piąty wyraz ciągu arytmetycznego wynosi 5. Do policzenia sumy ilu wyrazów początkowych wystarcza ta informacja?

12.5 Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 4, a czwarty wynosi 16. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów o numerach parzystych.

12.6 Ciąg arytmetyczny składa się z 16 wyrazów. Suma wyrazów o numerach parzystych jest równa 256, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 240. Oblicz pierwszy i ostatni wyraz tego ciągu.

12.7 Dany jest ciąg arytmetyczny $5, 9, 13, ...$ Ile początkowych wyrazów trzeba dodać, aby ich suma wyniosła 10877?

12.8 Siódmy wyraz ciągu arytmetycznego wynosi 11, a suma piętnastu pierwszych wyrazów jest równa 210. Który wyraz ciągu jest równy 26?

12.9 Dla jakich wartości x podane liczby są kolejnym wyrazami ciągu arytmetycznego: $5x$, x^2, $8 - x$. Podaj te wyrazy.

12.10 Dla jakich wartości x podane liczby są kolejnym wyrazami ciągu arytmetycznego? Podaj te wyrazy:
a) $2x - 1, 2x + 5, 3x + 4$, b) $(x + 1)^2, (2x + 1)^2, (3x - 1)^2$.

12.11
a) Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych, które są mniejsze od 100 i które nie są podzielne przez 5.
b) Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych dających resztę z dzielenia przez 4 równą 3.

12.12 Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych które:
a) są podzielne przez 3, b) są niepodzielne przez 5, c) przy dzieleniu przez 6 dają resztę 4.

12.13 Wykaż, że dla funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ ciąg dany wzorem ogólnym $a_n = f(n+1) - f(n)$ jest arytmetyczny.

12.14 Wykaż, że dla dowolnej funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2+bx+c$ ciąg dany wzorem ogólnym $a_n = f(n+1)-f(n)$ jest arytmetyczny.

12.15 Wykaż, że jeżeli ciąg a_n jest arytmetyczny, to ciąg $b_n - 3a_n + 2$ także jest ciągiem arytmetycznym.

12.16 Wykaż, że jeżeli ciąg a_n jest arytmetyczny, to ciąg b_n także jest ciągiem arytmetycznym.
a) $b_n = 2a_n - 1$ b) $b_n = 4 - 5a_n$

12.17 Znajdź ciąg arytmetyczny, dla którego przy dowolnym naturalnym k suma k pierwszych wyrazów o numerach nieparzystych jest równa $3k^2 + 3k$

12.18 Znajdź ciąg arytmetyczny, dla którego przy dowolnym naturalnym k suma k pierwszych wyrazów o numerach parzystych jest równa $3k^2 + 3k$.

12.19 Pan Zaradny ulokował 25000 zł na procent prosty w wysokości 4% w skali roku. Jaką sumę otrzyma po roku? Jaką po 6 latach? Jaką po n latach?

12.20 Pani Zachłanna ulokowała 10000 zł na procent prosty w wysokości 8% w skali roku. Jaką sumę otrzyma po roku? Jaką po 3 latach? Jaką po n latach?

13. Ciąg geometryczny

13.1 Czy liczby $\sqrt{3}-\sqrt{2}, -1, \sqrt{3}+\sqrt{2}$ tworzą ciąg geometryczny ?

13.2 Dla jakich wartości x podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego? Podaj te wyrazy:
a) $2x-1, 2x+1, 3x+6$, b) $(x+1)^2, (2x+1)^2, (3x-1)^2$.

13.3 Wykaż, że jeżeli a_n jest ciągiem arytmetycznym, to $b_n = 2^{a_n}$ jest ciągiem geometrycznym.

13.4 Wykaż, że jeżeli a_n jest ciągiem arytmetycznym, to $b_n = 3^{-a_n}$ jest ciągiem geometrycznym.

13.5 Wyznacz liczby x, y, z tak aby liczby $3, x, y, z, 48$ były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

13.6 Między liczby 2 i 12 wstaw dwie liczby tak, aby trzy pierwsze tworzyły ciąg geometryczny, a trzy ostatnie ciąg arytmetyczny.

13.7 Suma trzech pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 21, a suma trzech następnych jest równa 168. Który wyraz ciągu jest równy 192?

13.8 Suma trzech pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 21, zaś suma ich odwrotności jest równa $\frac{7}{12}$. Podaj wzór ogólny tego ciągu wiedząc, że jego wyrazy są liczbami dodatnimi.

13.9 Pierwszy, trzeci i jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego o różnicy $r \neq 0$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznaczyć iloraz q tego ciągu.

13.10 Iloczyn siódmego i trzynastego wyrazu ciągu geometrycznego o wyrazach dodatnich jest równy 100. Oblicz iloczyn dziewiętnastu początkowych wyrazów tego ciągu.

13.11 Oblicz trzeci wyraz ciągu geometrycznego $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, ...$ wiedząc, że $a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 110$, zaś $a_7 = 14$.

13.12 Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Znajdź ten ciąg wiedząc, że suma wyrazów skrajnych jest równa 36, zaś suma wyrazów środkowych 24.

13.13 Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Iloczyn logarytmów dziesiętnych pierwszej i czwartej liczby wynosi 8, a iloczyn logarytmów dziesiętnych drugiej i trzeciej wynosi 0. Znajdź te liczby.

13.14 Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 62. Suma logarytmów dziesiętnych tych liczb jest równa 3. Wyznacz ten ciąg.

13.15 Oblicz długość linii, składającej się z dziesięciu połączonych kolejno półokręgów o średnicach mających dlugość odpowiednio 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...

13.16 Dany jest kwadrat o boku 2. Tworzymy ciąg kwadratów, z których każdy następny kwadrat otrzymano przez połączenie środków boków poprzedniego kwadratu. Oblicz sumę obwodów dwunastu tak otrzymanych kwadratów.

13.17 Wyłowiona meduza traciła 10% swojej masy w ciągu każdej kolejnej godziny. W trakcie której godziny masa meduzy zmalała do połowy masy początkowej ?

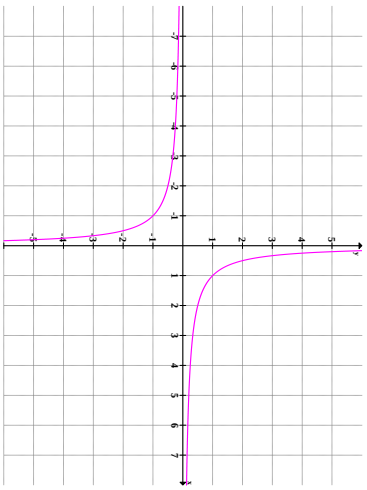
13.18 Balon wzniósł się w pierwszej minucie na wysokość 64 m a w każdej następnej przyrost wysokości był dwa razy mniejszy niż w poprzedniej. Na jakiej wysokości był balon po 8 minutach?

13.19 Do banku wpłacono 40 000 zł na procet składany. Po roku kapitał końcowy na koncie wyniósł 45 020,35 zł. Oblicz stopę procentową wiedząc, że była ona stała, a odsetki ulegały kapitalizacji kwartalnej. Jaki będzie kapitał końcowy po n latach?

13.20 Pan Oszczędny ulokował 25000 zł na procent składany w wysokości 4% w skali roku.
a) Jaką sumę otrzyma po roku przy rocznej kapitalizacji odsetek? Jaką po 6 latach? Jaką po n latach?
b) Jaką sumę otrzyma po roku przy kwartalnej (miesięcznej) kapitalizacji odsetek? Jaką po 6 latach? Jaką po n latach?

14. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)

14.1 Wykres funkcji f przedstawiono obok.



a) Odczytaj z wykresu funkcji f dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe.

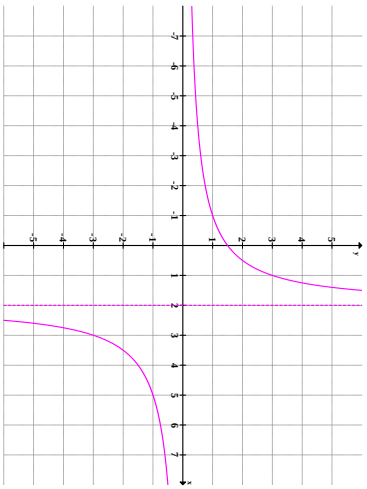
b) Podaj dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne.

c) Omów monotoniczność funkcji f i podaj ekstrema lokalne i globalne (właściwe i niewłaściwe).

d) Rozwiąż równanie $f(x-3) = f(4x+1)$

e) Rozwiąż nierówność $f(x^2-4) > f(1-x^2)$

14.2 Wykres funkcji f przedstawiono obok.



a) Odczytaj z wykresu funkcji f dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe.

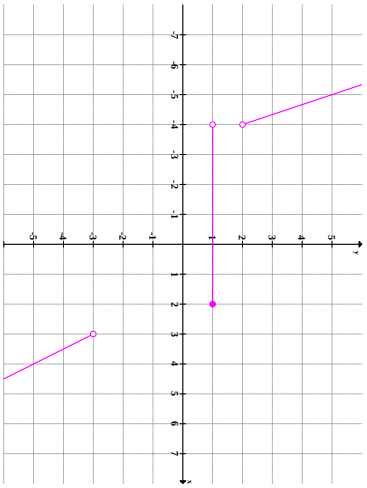
b) Podaj dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne.

c) Omów monotoniczność funkcji f i podaj ekstrema lokalne i globalne (właściwe i niewłaściwe).

d) Rozwiąż równanie $f(x^2+4x) = f(x+1)$

e) Rozwiąż nierówność $f(2x-3) < f(1-x)$

14.3



a) Odczytaj z wykresu funkcji f dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe.

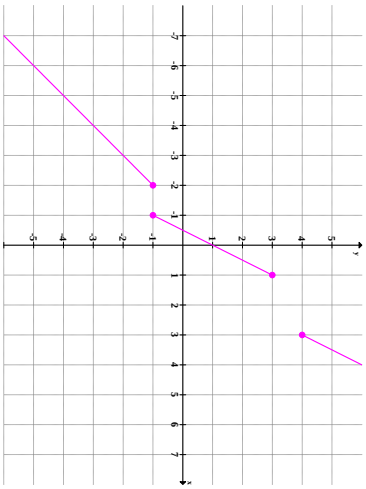
b) Podaj dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne.

c) Omów monotoniczność funkcji f i podaj ekstrema lokalne i globalne (właściwe i niewłaściwe).

d) Rozwiąż równanie $f(x^2-4x-1) = f(2x-3)$

e) Rozwiąż nierówność $f(x^2+3) < f(4x+1)$

14.4



a) Odczytaj z wykresu funkcji f dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe.

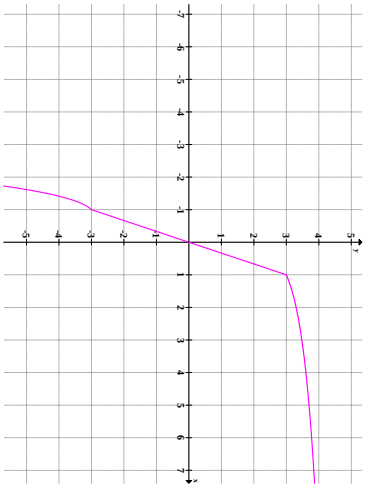
b) Podaj dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne.

c) Omów monotoniczność funkcji f i podaj ekstrema lokalne i globalne (właściwe i niewłaściwe).

d) Rozwiąż równanie $f(x^2 - 4x - 1) = f(2x - 3)$

e) Rozwiąż nierówność $f(x^2 + 3) < f(4x + 1)$

14.5



a) Odczytaj z wykresu funkcji f dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe.

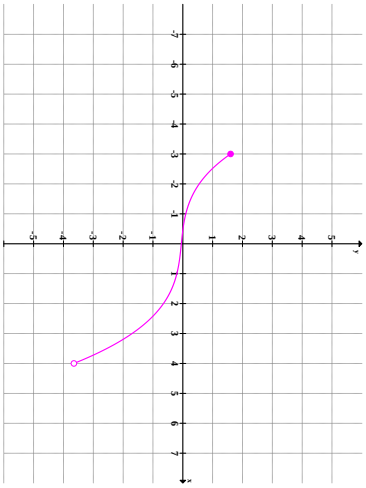
b) Podaj dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne.

c) Omów monotoniczność funkcji f i podaj ekstrema lokalne i globalne (właściwe i niewłaściwe).

d) Rozwiąż równanie $f(x^2 + x - 4) = f(2 - x)$

e) Rozwiąż nierówność $f(7 - x^2) < f(2x - 1)$

14.6



a) Odczytaj z wykresu funkcji f dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe.

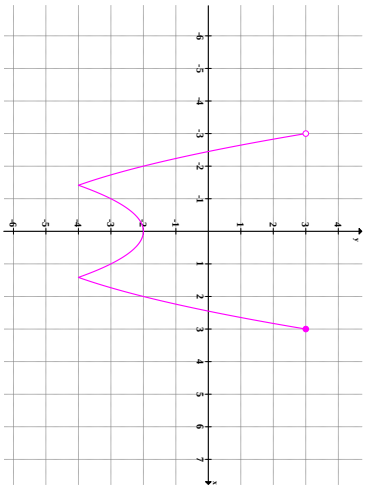
b) Podaj dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne.

c) Omów monotoniczność funkcji f i podaj ekstrema lokalne i globalne (właściwe i niewłaściwe).

d) Rozwiąż równanie $f(x^2 + x - 4) = f(2 - x)$

e) Rozwiąż nierówność $f(7 - x^2) < f(2x - 1)$

14.7



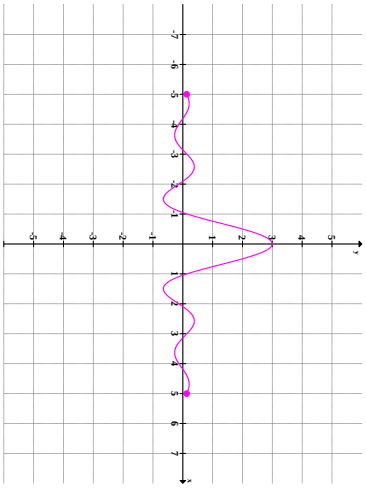
a) Odczytaj z wykresu funkcji f dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe.

b) Podaj dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne.

c) Omów monotoniczność funkcji f i podaj ekstrema lokalne i globalne (właściwe i niewłaściwe).

d) W zależności od parametru $m \in \mathbb{R}$ podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$, $f(|x|) = m$, $|f(x)| = m$

14.8



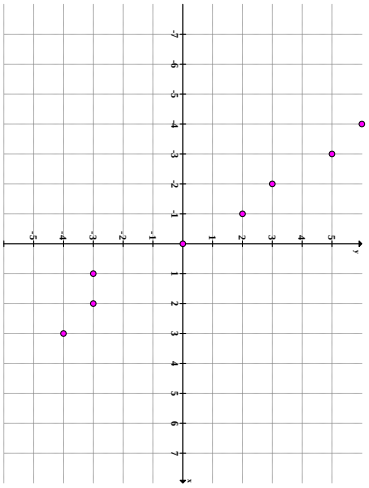
a) Odczytaj z wykresu funkcji f dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe.

b) Podaj dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne.

c) Omów monotoniczność funkcji f i podaj ekstrema lokalne i globalne (właściwe i niewłaściwe).

d) W zależności od parametru $m \in \mathbb{R}$ podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$, $f(|x|) = m$, $|f(x)| = m$

14.9



a) Odczytaj z wykresu funkcji f dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe.

b) Podaj dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne.

c) Omów monotoniczność funkcji f i podaj ekstrema lokalne i globalne (właściwe i niewłaściwe).

d) Rozwiąż równanie $f(4x - 1) = f(2x - 3)$

e) Rozwiąż nierówność $f(4x - 1) > f(2x - 3)$

14.10

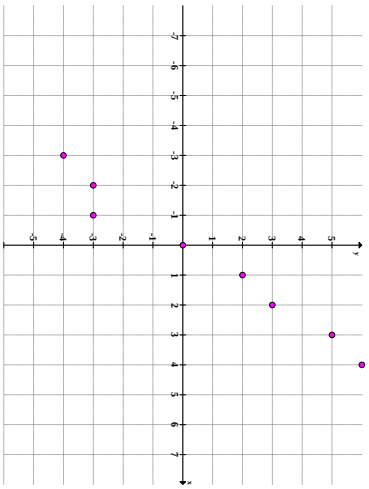
a) Odczytaj z wykresu funkcji f dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe.

b) Podaj dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne.

c) Omów monotoniczność funkcji f i podaj ekstrema lokalne i globalne (właściwe i niewłaściwe).

d) Rozwiąż równanie $f(4x-1) = f(2x-3)$

e) Rozwiąż nierówność $f(4x-1) > f(2x-3)$



14.11

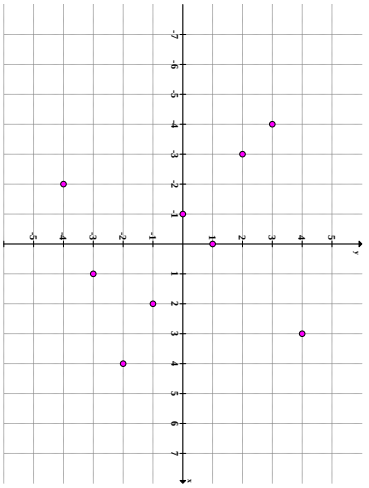
a) Odczytaj z wykresu funkcji f dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe.

b) Podaj dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne.

c) Omów monotoniczność funkcji f i podaj ekstrema lokalne i globalne (właściwe i niewłaściwe).

d) Rozwiąż równanie $f(x-1) = f(-x)+1$

e) Rozwiąż nierówność $f(x-1) < f(-x)+1$



14.12

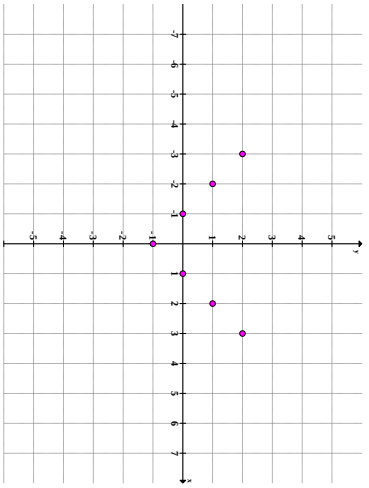
a) Odczytaj z wykresu funkcji f dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe.

b) Podaj dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne.

c) Omów monotoniczność funkcji f i podaj ekstrema lokalne i globalne (właściwe i niewłaściwe).

d) Rozwiąż równanie $|f(x)| = f(x-2)$

e) Rozwiąż nierówność $|f(x)| \leqslant f(x-2)$



15. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)

15.1 Naszkicuj wykres funkcji

$$a)\ f(x) = x^2 - 3|x| + 2 \quad b)\ f(x) = |2^x - 2| - 1 \quad c)\ f(x) = |3 - |x + 2|| - 4$$

Na podstawie wykresu podaj własności tej funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie (ujemne, niedodatnie, nieujemne), omów monotoniczność, ekstrema, wypukłość i wklęsłość.

15.2 Naszkicuj wykres funkcji

$$a)\ f(x) = |x^2 - 4x + 3| - 1 \quad b)\ f(x) = |\log|x|| \quad c)\ f(x) = 1 - |2 - |x + 1||$$

Na podstawie wykresu podaj własności tej funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie (ujemne, niedodatnie, nieujemne), omów monotoniczność, ekstrema, wypukłość i wklęsłość.

15.3 Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi:

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2.$$

Zapisz powyższą nierówność wprowadzając funkcję $f(x) = x^2$. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj uzasadnienie tej nierówności korzystając jedynie z wykresu.

15.4 Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b zachodzi:

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^{-1} \geqslant \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}.$$

Zapisz powyższą nierówność wprowadzając funkcję $f(x) = x^{-1}$. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj uzasadnienie tej nierówności korzystając jedynie z wykresu.

15.5 Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{0,5} x$. Niech x i y będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Uzasadnij, że dla dowolnego $a \in (0, 1)$ zachodzi:

$$\log_{0,5}(ax + (1-a)y) \leqslant a\log_{0,5} x + (1-a)\log_{0,5} y.$$

Dla przykładowych liczb x z przedziału $(2, 4)$ wylicz oszacowania na $\log_{0,5} x$ wynikające z monotoniczności oraz wypukłości.

15.6 Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log x$. Niech x i y będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Uzasadnij, że dla dowolnego $a \in (0, 1)$ zachodzi:

$$\log(ax + (1-a)y) \geqslant a\log x + (1-a)\log y.$$

Dla przykładowych liczb x z przedziału $(10, 100)$ wylicz oszacowania na $\log x$ wynikające z monotoniczności oraz wypukłości.

15.7 Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin x$. Niech x i y będą dowolnymi liczbami z przedziału $(0, \pi)$. Uzasadnij, że dla dowolnego $a \in (0, 1)$ zachodzi:

$$\sin(ax + (1-a)y) \geqslant a\sin x + (1-a)\sin y.$$

Oszacuj liczbę $\sin\frac{13}{19}\pi$.

15.8 Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \cos x$. Niech x i y będą dowolnymi liczbami z przedziału $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Uzasadnij, że dla dowolnego $a \in (0, 1)$ zachodzi:

$$\cos\left(ax + (1-a)y\right) \geqslant a\cos x + (1-a)\cos y.$$

Oszacuj liczbę $\cos \frac{2}{11}\pi$.

15.9 Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Udowodnij, że dla wszystkich liczb dodatnich x i y zachodzi:

$$(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

15.10 Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Udowodnij, że dla wszystkich liczb dodatnich x i y zachodzi:

$$\frac{\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}}{2} \leqslant \sqrt[n]{\frac{x+y}{2}}.$$