Spis treści

Rozdział 1. Elementy logiki matematycznej 5
1. Zdanie logiczne 5
2. Funktory zdaniotwórcze 6
2.1. Negacja 7
2.2. Koniunkcja 8
2.3. Alternatywa 9
2.4. Implikacja 11
2.5. Równoważność 13
2.6. Alternatywa wykluczająca 15
2.7. Określanie wartości logicznej zdań złożonych 16
3. Prawa rachunku zdań 17
4. Funkcje zdaniowe 20

Rozdział 2. Elementy teorii zbiorów 25
1. Pojęcia pierwotne i aksjomaty 25
2. Uwagi o aksjomatach teorii zbiorów 27
3. Działania na zbiorach 29
3.1. Suma zbiorów 29
4. Iloczyn kartezjański 30
4.1. Przypadek dwóch zbiorów 31
4.2. Przypadek trzech zbiorów 34
4.3. Przypadek dowolnej skończonej ilości zbiorów 36

Rozdział 3. Relacje i funkcje 39
1. Relacje 39
1.1. Relacje typu równoważności 43
2. Funkcje 48
2.1. Definicja funkcji 48
2.2. Dziedzina, przeciwdziedzina, argumenty i wartości 50
2.3. Injekcje, surjekcje i bijekcje 51

Rozdział 4. Ciągi 59
1. Zbiór liczb naturalnych 59
1.1. Relacje porządku 59
1.2. Zasada indukcji matematycznej 63
2. Ciągi i ich własności 64
2.1. Definicja ciągu 65
2.2. Ciągi ograniczone 67
2.3. Ciągi monotoniczne 70
3. Zbieżność ciągów 72
3.1. Definicja granicy ciągu 72
3.2. Własności ciągów zbieżnych 74
3.3. Granice niewłaściwe 76
3.4. Symbole nieoznaczone 79

Rozdział 5. Funkcje rzeczywiste jednej zmiennej 81
1. Wykres funkcji rzeczywistej 81
2. Dziedzina funkcji rzeczywistej 82
3. Monotoniczność 83
4. Funkcje ograniczone 85

Rozdział 6. Granice i ciągłość funkcji jednej zmiennej 87
1. Granica funkcji w punkcie 88
1.1. Otoczenie i sąsiedztwo punktu 88
1.2. Określenie granicy funkcji w punkcie 89
1.3. Własności granicy funkcji w punkcie 93
1.4. Granice niewłaściwe 95
1.5. Granice jednostronne 97
2. Ciągłość 98

Rozdział 7. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej 101
1. Określenie pochodnej funkcji 101
2. Obliczanie pochodnych 103
3. Własności funkcji różniczkowalnych i pochodnych 105
4. Zastosowania rachunku różniczkowego 105
4.1. Związki pochodnej z monotonicznością 105
4.2. Pochodna a ekstrema lokalne 106
4.3. Druga pochodna a wypukłość 107

4.4. Obliczanie granic 109

Rozdział 8. Szeregi. Szereg Taylora funkcji jednej zmiennej 111
1. Szeregi 111
1.1. Definicja zbieżności szeregu 111
1.2. Kryteria zbieżności szeregów 114
1.3. Szeregi potęgowe 115
2. Szereg Taylora 116

Bibliografia 119

ROZDZIAŁ 1

Elementy logiki matematycznej

1. Zdanie logiczne

Definicja 1.1. *Zdaniem logicznym* nazywamy takie stwierdzenie, o którym da się w jednoznaczny sposób powiedzieć, że jest prawdziwe lub fałszywe.

Zatem tym, co wyróżnia zdanie logiczne spośród innych zdań jest to, że ma ono *wartość logiczną*. Wartością logiczną może być *prawda* (oznaczana też czasami jako 0) lub *fałsz* (oznaczany przez 0).

Przykład 1.2. Rozważmy następujące wypowiedzi:

(1) Słońce jest gwiazdą.
Jest to niewątpliwie zdanie logiczne. Jego wartość logiczna to prawda.

(2) Tydzień ma osiem dni.
Jest to również zdanie logiczne. Tym razem jest to zdanie fałszywe.

(3) Czy jutro będzie padało?
Warunkiem koniecznym na to, aby zdanie uznać za zdanie logiczne, jest tryb orzekający tego zdania. Pytanie oczywiście nie jest zdaniem logicznym.

(4) życie jest piękne.
Bardzo urocze zdanie oznajmujące, które jednak nie jest zdaniem logicznym. Ocena prawdziwości tego zdania zależy bowiem od czynników subiektywnych takich, jak stan psychiczny człowieka, jego poglądy filozoficzne, itp.

(5) $2 + 2 = 5$.
Powyższe stwierdzenie jest zdaniem logicznym, które jest fałszywe.

(6) $2x + 1 > 0$.
W powyższej formule możemy za zmienną x podstawić dowolną liczbę rzeczywistą. Wtedy otrzymamy zdanie logiczne, np. dla $x = 0$ jest to zdanie prawdziwe, a dla $x = -1$ – zdanie fałszywe. Jeżeli jednak nie sprecyzujemy, o

jaką liczbę x nam chodzi, to nie możemy uznać powyższej formuły za zdanie logiczne.

(7) Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $2x + 1 > 0$.

Powyższa wypowiedź jest fałszywa. Istnieją bowiem takie wartości zmiennej x, dla której nierówność nie jest spełniona (np. $x = -1$). Zatem wypowiedź ta jest zdaniem logicznym.

(8) Każdy człowiek powinien zarabiać tyle, żeby stać go było na mieszkanie.

Zdanie to wyraża piękną ideę, z którą zgodzi się zapewne większość ludzi. Jest ono jednak tylko wyrazem pewnego poglądu. Nawet mimo tego, że zapewne większość ludzi byłaby skłonna się z nim zgodzić, nie możemy jednoznacznie przyporządkować temu zdaniu wartości logicznej. Nie jest więc zdanie logiczne.

(9) Istnieją takie dwie proste, które mają dokładnie dwa punkty wspólne.

Każde dwie proste albo się pokrywają (czyli mają nieskończenie wiele punktów wspólnych), albo się przecinają (wtedy mają dokładnie jeden punkt wspólny), albo są równoległe, ale się nie pokrywają (wtedy nie mają w ogóle punktów wspólnych). Powyższa wypowiedź jest więc fałszywa, a zatem jest zdaniem logicznym.

W dalszym ciągu, mówiąc o zdaniach logicznych często będziemy chcieli powiedzieć coś ogólnego, czyli takiego, co dotyczy dużej klasy, albo nawet wszystkich zdań. Nie chcąc w takim wypadku precyzować, o jakie zdanie nam chodzi, musimy je jakoś oznaczyć. Przyjęło się oznaczać takie dowolne zdania logiczne literami p, q, r, ..., itd. Możemy np. powiedzieć: Jeżeli p jest zdaniem logicznym, to p jest albo prawdziwe, albo fałszywe.

2. Funktory zdaniotwórcze

Zdania logiczne mogą mieć swoją (czasami bardzo rozbudowaną) wewnętrzną strukturę. Podobnie jak w przypadku zdań wypowiadanych w języku potocznym, możemy mówić o zdaniach logicznych *prostych* i zdaniach logicznych *złożonych*. W logice zdania logiczne złożone tworzymy z innych zdań przy pomocy tak zwanych funktorów zdaniotwórczych.

Definicja 1.3. *Funktorem zdaniotwórczym* (zwanym też *spójnikiem logicznym*) nazywamy wyrażenie, które wraz z innymi wyrażeniami, nazywanymi argumentami funktora, tworzy zdanie logiczne.

Argumentami funktora zdaniotwórczego, o których mowa w powyższej definicji są zazwyczaj zdania logiczne. Każdy funktor może mieć jeden lub kilka argumentów. Zasadą jest, że wartość logiczna zdania otrzymanego w wyniku zastosowania funktora zdaniotwórczego nie zależy od konkretnych zdań będących będących w użyciu, lecz jedynie od ich wartości logicznych.

Najczęściej używa się następujących funktorów zdaniotwórczych: jednoargumentowego spójnika *negacji* i dwuargumentowych spójników *koniunkcji*, *alternatywy*, *implikacji* i *równoważności*. Niekiedy wyróżnia się również dwuargumentowy spójnik *alternatywy wykluczającej*.

2.1. Negacja. Spójnik negacji (zwanej też *zaprzeczeniem*) jest funktorem jednoargumentowym. Oznacza to, że do utworzenia zdania przy pomocy tego funktora potrzebujemy jednego zdania. Jeśli p jest dowolnym zdaniem, to jego negację oznaczamy

$$\sim \mathrm{p} \text{ (lub } \neg \mathrm{p}).$$

Odczytujemy to jako nieprawda, że p.

Przykład 1.4. Rozważmy zdania z Przykładu 1.1:

(1) Negacją zdania

Słońce jest gwiazdą

jest zdanie

Nieprawda, że Słońce jest gwiazdą.

Oczywiście, jest to zdanie logiczne fałszywe. Zauważmy, że nie jest konieczne sztywne trzymanie się schematu tworzenia negacji zdania w konkretnych przypadkach. W przypadku powyższego zdania można powiedzieć

Słońce nie jest gwiazdą

i oczywiście utrzymamy sens i ideę zaprzeczenia.

(2) Zaprzeczeniem zdania

Tydzień ma osiem dni

jest zdanie prawdziwe

Nieprawda, że tydzień ma osiem dni.

(3) Negacją zdania

$2+2=5$

jest zdanie, które możemy zapisać

$\sim (2+2=5)$.

Negacja ta jest zdaniem prawdziwym. Zauważmy, że można ją też zapisać w następującej formie

$2 + 2 \neq 5$.

(4) Stosując wprost schemat tworzenia negacji powiemy, że zaprzeczeniem zdania

Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $2x + 1 > 0$

jest zdanie

Nieprawda, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $2x+1 > 0$.

Jest to zdanie prawdziwe. Zauważmy, że ten sam sens będzie miało zdanie

Istnieje liczba rzeczywista x taka, że nierówność $2x+1 > 0$ nie jest spełniona.

(5) Zaprzeczeniem zdania

Istnieją takie dwie proste, które mają dokładnie dwa punkty wspólne

jest oczywiście zdanie prawdziwe

Nieprawda, że istnieją takie dwie proste, które mają dokładnie dwa punkty wspólne.

Zauważmy, że to samo można wypowiedzieć również w następujący sposób:

Dla każdych dwóch prostych liczba ich punktów wspólnych jest różna od dwóch.

Na podstawie powyższych przykładów, a także na podstawie oczywistej intuicji, możemy sformułować zasadę, że *negacja zdania prawdziwego jest zdaniem fałszywym*, zaś *negacja zdania fałszywego jest zdaniem prawdziwym*. Innymi słowy negacja zmienia wartość logiczną zdania na przeciwną. Przedstawia się to w postaci następującej tabelki wartości logicznych dla negacji

p	$\sim p$
1	0
0	1

2.2. Koniunkcja. Koniunkcja jest przykładem funktora zdaniotwórczego dwuargumentowego. To zaś oznacza, że potrzebujemy dwóch zdań składowych do utworzenia zdania logicznego złożonego przy pomocy koniunkcji. Jeśli p i q są zdaniami logicznymi, to ich koniunkcję oznaczamy

$$p \wedge q$$

i czytamy p i q.

Zasada określania wartości logicznej koniunkcji jest oparta na potocznej intuicji. Prześledźmy to na następujących przykładach:

Przykład 1.5. Rozważmy następujące zdania:

(1) Ziemia jest planetą i Ziemia krąży wokół Słońca.

Powyższe zdanie jest koniunkcją dwóch zdań składowych:

Ziemia jest planetą.

Ziemia krąży wokół Słońca.

Oba zdania składowe są prawdziwe. Wydaje się, że jak najbardziej zgodne z intuicją jest uznanie koniunkcji tych zdań również za zdanie prawdziwe. Spójnik i w tym zdaniu sugeruje, że stwierdzamy prawdziwość obu części składowych, co w przypadku tego zdania się zgadza.

(2) $9 \cdot 11 > 100$ i $9 \cdot 11$ jest liczbą parzystą

To zdanie jest koniunkcją zdań

$9 \cdot 11 > 100$

$9 \cdot 11$ jest liczbą parzystą

W tym zdaniu coś nie pasuje. Ponieważ żadne z tych zdań nie jest prawdziwe, intuicyjnie uznajemy całe zdanie złożone za fałszywe.

(3) Sejm liczy 500 posłów i każdy poseł posiada immunitet

Powyższe jest koniunkcją zdań

Sejm liczy 500 posłów

Każdy poseł posiada immunitet

Pierwsze z tych zdań jest fałszywe, zaś drugie prawdziwe. Ponieważ spójnik i sugeruje jednoczesne występowanie obu warunków, całą koniunkcję uznamy raczej za zdanie faszywe, bo nie wszystki zdania składowe są prawdziwe.

Powyższe przykłady są uzasadnieniem dla następującej tabelki wartości logicznych dla koniunkcji

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Innymi słowy, *koniunkcja dwóch zdań logicznych jest prawdziwa tylko w przypadku, gdy oba zdania składowe są prawdziwe.*

2.3. Alternatywa. Alternatywa jest również funktorem dwuargumentowym. Alternatywę zdań p i q zapisujemy

$$p \vee q$$

i czytamy p lub q.

Przykład 1.6. Rozważmy zdania:

(1) Cezary Pazura jest prezydentem Polski lub znanym polskim aktorem

Powyższe zdanie intuicyjnie uznajemy za zdanie prawdziwe. Zauważmy, że jest ono alternatywą następujących zdań składowych

Cezary Pazura jest prezydentem Polski

Cezary Pazura jest znanym polskim aktorem

Jest to więc alternatywa zdania fałszywego i zdania prawdziwego.

(2) Donald Tusk jest polskim premierem lub przewodniczącym Platformy Obywatelskiej

Tutaj intuicja może nie być tak jednoznaczna, jak poprzednio. Powyższe zdanie jest alternatywą zdań

Donald Tusk jest polskim premierem

Donald Tusk jest przewodniczącym Platformy Obywatelskiej

Oba zdania składowe są prawdziwe[1]. I tutaj niektórym intuicja może (chociaż nie musi) kazać uznać alternatywę tych zdań za zdanie fałszywe. Wszak mówi ono, że zachodzi jedna LUB druga ewentualność, więc mogłoby to sugerować, że tylko jedna z nich jest spełniona. Z drugiej strony dla innych intuicyjnie może być jasne, że jeśli oba warunki są spełnione, to zdanie mówiące, że zachodzi jeden LUB drugi warunek, jest prawdziwe. W matematyce nie możemy dopuścić, by rozstrzygać problemy na podstawie intuicji, bo ta, jak widać, może doprowadzić do niejednoznaczności. W przypadku takich niejednoznaczności trzeba przyjąć pewną umowę, która w matematyce jest nazywana *definicją*. Otóż na mocy definicji uznajemy, że alternatywa, w której oba zdania składowe są prawdziwe, jest zdaniem prawdziwym[2].

(3) Jarosław Kaczyński jest piłkarzem klubu Manchester United lub koszykarzem klubu Los Angeles Lakers

Tutaj nasza intuicja zapewne nie ma problemu z oceną wartości logicznej tego zdania. Jest ono definitywnie fałszywe. Dla porządku wypiszmy jeszcze zdania składowe

Jarosław Kaczyński jest piłkarzem klubu Manchester United

Jarosław Kaczyński jest koszykarzem klubu Los Angeles Lakers

i zaznaczmy, że oba te zdania są fałszywe.

[1] Przynajmniej tak jest w dniu 5 października 2011 r., kiedy ten fragment skryptu powstaje.

[2] Porównaj tę definicję z definicją alternatywy wykluczającej.

W związku z dyskusją przeprowadzoną przy omawianiu powyższych przykładów – zwłaszcza przykładu (2) – przyjmujemy następującą tabelkę wartości logicznych dla alternatywy

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Zatem, *alternatywa dwóch jest prawdziwa wtedy, gdy przynajmniej jedno ze zdań składowych jest prawdziwe.*

2.4. Implikacja. W przypadku tego funktora dwuargumentowego lepiej jest rozpocząć opowieść od podania tabelki wartości logicznych, gdyż intuicyjna ocena wartości logicznej poszczególnych przykładów jest praktycznie niemożliwa. Implikację zdań logicznych p i q zapisujemy

$$p \Rightarrow q$$

i odczytujemy jeżeli p, to q. Casami mówimy też ze zdania p wynika zdanie q lub zdanie p implikuje zdanie q. Zdanie p nazywamy *poprzednikiem* implikacji, zaś zdanie q – *następnikiem* implikacji.

Tabelka wartości logicznych implikacji przedstawia się następująco

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Zapamiętujemy więc, że *implikacja jest zdaniem fałszywym tylko w tym przypadku, gdy poprzednik jest prawdziwy, zaś następnik jest fałszywy.* Czasami streszcza się tę zasadę mówiąc, że *z prawdy nie może wynikać fałsz.*

Prześledźmy, jak działa powyższa umowa na kokretnych przykładach.

Przykład 1.7. Rozważmy zdania

(1) Jeżeli Andrzej Wajda jest reżyserem filmowym, to Moskwa jest stolicą Rosji.

Pozwyższe zdanie jest implikacją, której poprzednikiem jest zdanie

Andrzej Wajda jest reżyserem filmowym

zaś następnikiem

Moskwa jest stolicą Rosji.

Intuicyjnie uznamy zapewne, że to zdanie jest pozbawione sensu i trudno mu przypisać jakąkolwiek wartość logiczną. Pamiętajmy jednak, że funktor zdaniotwórczy tworzy zdanie logiczne z *każdych* składowych zdań logicznych. Mimo, że intuicja odmawia nadania jakiegokolwiek sensu powyższemu zdaniu[3], to jest ono zdaniem logicznym. W dodatku, z uwagi na to, że zarówno poprzednik, jak i następnik są zdaniami prawdziwymi, zdanie to jest prawdziwe!

(2) Jeżeli Kanada leży w Europie, to ślimak jest ssakiem

Jest to implikacja, której poprzednik to

Kanada leży w Europie

a następnik

ślimak jest ssakiem.

Nauczeni dyskusją po poprzednim przykładzie nie doszukujemy się sensu w powyższym zdaniu. Stwierdzamy jedynie, że jest to zdanie prawdziwe (sic!) bo poprzednik i następnik są zdaniami fałszywymi.

(3) Jeżeli Lech Wałęsa jest kanclerzem Niemiec, to Polska graniczy z Niemcami

Poprzednikiem powyższej implikacji jest zdanie

Lech Wałęsa jest kanclerzem Niemiec

zaś jej następnikiem

Polska graniczy z Niemcami

Ponieważ poprzednik jest fałszywy, a następnik prawdziwy, stwierdzamy, że implikacja jest zdaniem prawdziwym. Nawiązując do poprzedniego przykładu zauważmy, że jeśli poprzednik implikacji jest zdaniem fałszywym, to sama implikacja jest zdaniem prawdziwym niezależnie od wartości logicznej następnika.

(4) Jeżeli Francja jest krajem eropejskim, to Francja graniczy z Polską

Poprzednik tej implikacji to zdanie

Francja jest krajem europejskim

a następnikiem

Francja graniczy z Polską

Korzystając z tabeli wartości logicznych dla implikacji stwierdzamy, że implikacja jest w tym wypadku zdaniem fałszywym, bo poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy.

(5) $(3457 \cdot 45097)^2 < 25 \cdot 10^{15} \quad \Rightarrow \quad 3457^2 \cdot 45097^2 < 10^{17}$

Poprzednikiem tej implikacji jest nierówność

$(3457 \cdot 45097)^2 < 25 \cdot 10^{15}$

[3]Niektórzy powiedzą, że to zdanie jest ńielogiczne".

podczas, gdy następnik implikacji to

$$3457^2 \cdot 45097^2 < 10^{17}$$

Chcąc określić wartość logiczną implikacji musimy stwierdzić, jakie wartości logiczne mają poprzednik i następnik. Zasatanówmy się jednak, czy jest to naprawdę konieczne. Wymaga to naprawdę uciążliwych rachunków lub przynajmniej dobrego kalkulatora. Może nie musimy wykonywać tych wszystkich obliczeń? Przede wszystkim zauważmy, że lewe strony w obu nierównościach są sobie równe, co wynika z powszechnie znanych reguł działań na potęgach. Powiedzmy, że nie chce nam się wykonywać obliczania liczby stojącej po lewej stronie obu nierówności. Mamy dwie możliwości:

(a) Poprzednik jest fałszywy. Wtedy z tabelki wartości logicznych implikacji wynika, że cała implikacja jest prawdziwa. Nie musimy zatem wyznaczać wartości logicznej następnika.

(b) Poprzednik jest prawdziwy. Oznacza to, że prawdziwa jest nierówność $X < 25 \cdot 10^{15}$, gdzie przez X oznaczyliśmy lewą stronę obu nierówności. Zauważmy teraz, że

$$25 \cdot 10^{15} < 100 \cdot 10^{15} = 10^{17}.$$

Zatem, jeśli $X < 25 \cdot 10^{15}$, to tym bardziej $X < 10^{17}$, a więc następnik byłby także prawdziwy. Cała implikacja w tym przypadku także jest prawdziwa.

Zauważmy, że nie obliczając liczby X, nie wiemy, który z powyższych przypadków zachodzi. Mimo to, udało nam się bez tej wiedzy wykazać, że implikacja jest prawdziwa.

2.5. Równoważność. Jest to kolejny przykład funktora dwuargumentowego. Równoważność zdań p i q zapisujemy

$$p \Leftrightarrow q$$

i odczytujemy p wtedy i tylko wtedy, gdy q.

Równoważność dwóch zdań jest zdaniem prawdziwym, gdy oba zdania mają tę samą wartość logiczną. Ilustruje to tabelka wartości logicznych dla równoważności

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Przykład 1.8. Rozważmy następujące zdania:

(1) Morświn jest rybą wtedy i tylko wtedy, gdy kałamarnica jest ssakiem

Mamy tutaj dwa zdania składowe

Morświn jest rybą

Kałamarnica jest ssakiem

Oba zdania są fałszywe, zatem równoważność jest zdaniem prawdziwym.

(2) Andrzej Wajda jest reżyserem filmu Człowiek z żelaza"wtedy i tylko wtedy, gdy Marek Piwowski jest reżyserem filmu Żejs"

Na to zdanie składają się

Andrzej Wajda jest reżyserem filmu Człowiek z żelaza"

Marek Piwowski jest reżyserem filmu Żejs"

Tym razem oba zdania są prawdziwe. Ponieważ znowu mają tę samą wartość logiczną, równoważność jest prawdziwa.

(3) $|3409876 \cdot 209876 - 670935 \cdot 1066647| > 35 \cdot 10^4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (670935 \cdot 1066647 - 3409876 \cdot 209876)^2 = 1220 \cdot 10^8$$

Zdaniami składowymi tej równoważności są nierówności

(A) $|3409876 \cdot 209876 - 670935 \cdot 1066647| > 3{,}5 \cdot 10^5$

(B) $(670935 \cdot 1066647 - 3409876 \cdot 209876)^2 \leq 1{,}225 \cdot 10^{11}$

Zastanówmy się, czy można ustalić wartość logiczną tej równoważności bez wykonywania żmudnych obliczeń lewych stron tych wyrażeń. Zauważmy najpierw, że lewa strona w nierówności (B) jest kwadratem lewej strony w nierówności (A). łatwo też sprawdzić, że

$$\left(3{,}5 \cdot 10^5\right)^2 = 1{,}225 \cdot 10^{11}$$

a więc prawa strona nierówności (B) jest kwadratem prawej strony z nierówności (A). Podobnie jak w Przykładzie 1.7(5) rozważmy dwa przypadki

(a) Nierówność (A) jest fałszywa. Wtedy prawdziwa jest nierówność

$$|3409876 \cdot 209876 - 670935 \cdot 1066647| \leq 3{,}5 \cdot 10^5.$$

Zauważmy teraz, że po podniesieniu obu stron do kwadratu otrzymujemy nierówność (B). Zatem nierówność (B) jest prawdziwa. Oznacza to, że cała równoważność jest zdaniem fałszywym.

(b) Nierówność (B) jest prawdziwa. Po podniesieniu obu stron tej nierówności otrzymamy

$$(3409876 \cdot 209876 - 670935 \cdot 1066647)^2 > \left(3{,}5 \cdot 10^5\right)^2.$$

Ponieważ $\left(3{,}5 \cdot 10^5\right)^2 = 1{,}225 \cdot 10^{11}$, to ta nierówność różni się od (B) jedynie zwrotem nierówności. Oznacza to, że nierówność (B) jest fałszywa. Cała równoważność jest więc znowu fałszywa.

Podobnie jak w Przykładzie 1.7(5) dało się więc ustalić wartość logiczną równoważności bez wyznaczania wartości logicznych zdań składowych.

2.6. Alternatywa wykluczająca. To kolejny przykład funktora dwuargumentowego. Alternatywę wykluczjącą zdań p i q oznaczamy

$$p \oplus q$$

i czytamy p albo q. Od alternatywy różni się tym, że w przypadku, gdy oba zdania składowe są prawdziwe, uznajemy ją za zdanie fałszywe. Możemy rozumieć to tak, że prawdziwość jednego ze zdań wyklucza prawdziwość drugiego. Przedstawia to tabelka wartości logicznych dla alternatywy wykluczającej

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Przykład 1.9. Rozważmy zdania:

(1) Jowisz jest planetą albo Jowisz jest gwiazdą

Na to zdanie złożone składają się dwa zdania proste

Jowisz jest planetą

Jowisz jest gwiazdą

Ponieważ pierwsze jest prawdziwe a drugie fałszywe, to ich alternatywa wykluczająca jest zdaniem logicznym prawdziwym.

(2) Człowiek jest ssakiem albo kangur jest ssakiem

Zdania proste to

Człowiek jest ssakiem

Kangur jest ssakiem

Oba są prawdziwe, zatem ich alternatywa wykluczająca jest zdaniem fałszywym.

(3) $99^2 = 10000 \ \oplus \ 101^2 = 10000$

Oba zdania składowe

$99^2 = 10000$
$101^2 = 10000$
są fałszywe, więc ich alternatywa wykluczająca jest też fałszywa.

2.7. Określanie wartości logicznej zdań złożonych. Używając funktorów zdaniotwórczych wprowadzonych w poprzedniej części możemy ze zdań składowych budować zdania złożone. Mają one niekiedy bardzo skomplikowaną strukturę.

Przykład 1.10. Rozważmy następujące zdanie:

> Jeżeli zarówno Warszawa leży nad Wisłą jak i albo Poznań leży nad Wartą i nie jeżdżą w nim tramwaje, albo Poznań leży nad Wisłą i nie ma w nim ZOO, to nieprawda, że Londyn jest stolicą Polski lub Wielkiej Brytanii.[4]

Spróbujmy dokonać rozbioru logicznego tego zdania. Można wyodrębnić tutaj następujące zdania składowe proste:

p: Warszawa leży nad Wisłą
q: Poznań leży nad Wartą
r: W Poznaniu jeżdża tramwaje
s: Poznań leży na Wisłą
t: W Poznaniu jest ZOO
u: Londyn jest stolicą Polski
v: Londyn jest stolicą Wielkiej Brytanii

Nietrudno zauważyć, że całe zdanie jest implikacją, w której zarówno poprzednik i następnik są dosyć rozbudowanymi zdaniami złożonymi. Przyjrzyjmy się poprzednikowi:

> Zarówno Warszawa leży nad Wisłą jak i albo Poznań leży nad Wartą i nie jeżdżą w nim tramwaje, albo Poznań leży nad Wisłą i nie ma w nim ZOO

To z kolei zdanie jest koniunkcją dwóch zdań:

> Warszawa leży nad Wisłą

i

> Albo Poznań leży nad Wartą i nie jeżdżą w nim tramwaje, albo Poznań leży nad Wisłą i nie ma w nim ZOO

Pierwsze z tych zdań jest proste, zaś drugie jest alternatywą wykluczającą następujących dwóch zdań:

> Poznań leży nad Wartą i nie jeżdżą w nim tramwaje

[4] Zdanie zaczerpnięte z pozycji *Samouczek logiki zdań* (wersja wstępna) Katarzyny Paprzyckiej (zob. `http://kpaprzycka.swps.edu.pl/xSamouczek/Temat04.pdf`)

oraz

Poznań leży nad Wisłą i nie ma w nim ZOO

Oba te zdania są koniunkcjami.

Cały poprzednik da się więc zapisać przy pomocy wprowadzonych oznaczeń następująco

$$p \wedge ((q \wedge (\sim r)) \oplus (s \wedge (\sim t)))$$

Następnik implikacji jest zdaniem

Nieprawda, że Londyn jest stolicą Polski lub Wielkiej Brytanii

Podobnie jak wyżej dochodzimy do wniosku, że jest to zaprzeczenie alternatywy dwóch zdań prostych, które można zapisać

$$\sim (u \vee v)$$

Ostatecznie, cała implikacja ma postać

$$(p \wedge ((q \wedge (\sim r)) \oplus (s \wedge (\sim t)))) \Rightarrow (\sim (u \vee v))$$

W celu wyznaczenia wartości logicznej tego zdania, podstawmy w powyższym schemacie wartości logiczne poszczególnych zdań prostych

$$(1 \wedge ((1 \wedge (\sim 1)) \oplus (0 \wedge (\sim 1)))) \Rightarrow (\sim (0 \vee 1))$$

Stosując reguły wyznaczania wartości logicznych dla poszczególnych funktorów zdaniotwórczych sukcesywnie przetwarzamy powyższy schemat

$$(1 \wedge ((1 \wedge 0) \oplus (0 \wedge 0))) \Rightarrow (\sim (0 \vee 1))$$

$$(1 \wedge (0 \oplus 0)) \Rightarrow (\sim 1)$$

$$(1 \wedge 0) \Rightarrow 0$$

$$0 \Rightarrow 0$$

Dochodzimy w końcu do konkluzji, że zdanie jest prawdziwe.

3. Prawa rachunku zdań

Rozpocznijmy od pewnego przykładu.

Przykład 1.11. Rozważmy następujące wyrażenie:

$$(q \vee (\sim p)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

Jeśli w tym wyrażeniu za zmienne p i q podstawimy pewne zdania logiczne, to oczywiście otrzymamy zdanie logiczne. Generalnie, jego wartość logiczna zależeć będzie od wartości logicznych zdań, które podstawimy za p i q. Sprawdźmy, jak wygląda ta

zależność. Posłużymy się tzw. *metodą zerojedynkową*. Polega ona stworzeniu *matrycy wartości logicznych* dla naszego wyrażenia.

p	q	$\sim$ p A	q $\vee$ A B	p $\Rightarrow$ q C	B $\Rightarrow$ C
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

W pierwszych dwóch rubrykach powyższej tabelki wpisaliśmy wszystkie możliwe kombinacje wartości logicznych zdań p i q. Następne rubryki wypełniliśmy zgodnie z tabelkami wartości logicznych dla poszczególnych funktorów.

Obserwując wartości wpisane w ostatniej rubryce zauważamy, że niezależnie od wartości logicznych zdań p i q rozważane przez nas zdanie jest zawsze prawdziwe!

Wyrażenia takie jak w powyższym przykładzie to schematy logiczne. Sprecyzujmy to dokładniej

Definicja 1.12. Wyrażenie, w którym występują zmienne i które staje się zdaniem logicznymi po podstawieniu zdań logicznych za zmienne, nazywamy *schematem logicznym*.

W przykładzie spotkaliśmy bardzo specyficzny schemat logiczny. Schematy tego typu opisuje następująca definicja.

Definicja 1.13. *Prawem rachunku zdań* (albo *tautologią*) nazywamy taki schemat logiczny, który po podstawieniu dowolnych zdań za występujące w nim zmienne staje się zawsze zdaniem logicznym prawdziwym.

Przykład 1.14. Rozważmy następujący schemat logiczny:

$$(((p \vee q) \Rightarrow p) \Rightarrow q) \Rightarrow p$$

Sprawdzimy metodą zerojedynkową, czy powyższy schemat jest tautologią:

p	q	$p \vee q$ A	$A \Rightarrow p$ B	$B \Rightarrow q$ C	$C \Rightarrow p$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1

Jak widać, powyższy schemat nie jest prawem rachunku zdań.

Podamy teraz najważniejsze przykłady praw rachunku zdań:

(1) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ (prawo idempotentności koniunkcji)
(2) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ (prawo idempotentności alternatywy)
(3) $p \Leftrightarrow \sim\sim p$ (prawo podwójnego przeczenia)
(4) $p \vee \sim p$ (prawo wyłączonego środka)
(5) $\sim (p \wedge \sim p)$ (prawo sprzeczności)
(6) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$ (prawo de Morgana – zaprzeczenie koniunkcji)
(7) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$ (prawo de Morgana – zaprzeczenie alternatywy)
(8) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ (prawo transpozycji)
(9) $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ (prawo zaprzeczenia implikacji)
(10) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ (prawo przemienności koniunkcji)
(11) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (prawo przemienności alternatywy)
(12) $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$ (prawo łączności koniunkcji)
(13) $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ (prawo łączności alternatywy)
(14) $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy)
(15) $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ (prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji)
(16) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ (pierwsze prawo symplifikacji)
(17) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ (drugie prawo symplifikacji)
(18) $p \Rightarrow (p \vee q)$ (trzecie prawo symplifikacji)
(19) $(p \Rightarrow (q \wedge \sim q)) \Rightarrow \sim p$ (pierwsze prawo redukcji do absurdu)
(20) $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)) \Rightarrow \sim p$ (drugie prawo redukcji do absurdu)
(21) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ (prawo sylogizmu)
(22) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (prawo sylogizmu warunkowego)
(23) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ (prawo równoważności przeciwnych implikacji)

4. Funkcje zdaniowe

W Przykładzie 1.2(6) zetknęliśmy się z wyrażeniem

$$2x + 1 > 0$$

które nie jest zdaniem logicznym, ale ma tę wąlsność, że jeśli za zmienną x podstawimy dowolną liczbę rzeczywistą, to zdaniem logicznym się staje. Takie wyrażenia nazywamy funkcjami zdaniowymi. Precyzuje to następująca

Definicja 1.15. *Funkcją zdaniową* (lub *formą zdaniową*) określoną na pewnym zbiorze X nazywamy każde wyrażenie zawierające zmienną, takie, że po wstawieniu w miejsce zmiennej dowolnego elementu z tego zbioru wyrażenie to staje się zdaniem logicznym. Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji zdaniowej.

Przykład 1.16. Rozważmy następujące wyrażenia:

(1) $x^2 - x + 1 < 0$
Jest to forma zdaniowa, w której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Jest jasne, że jeśli za x podstawimy jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, to otrzymamy nierówność będącą zdaniem logicznym. łatwo można zauważyć, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ będzie to zdanie fałszywe.

(2) $2n + 1$ jest liczbą podzielną przez 3
Powyższe wyrażenie staje się zdaniem logicznym, gdy za zmienną n wstawimy dowolną liczbę całkowitą. Np. dla $n = 7$ jest to zdanie prawdziwe, zaś dla $n = -1$ – fałszywe. Naturalnie jest więc przyjąć, że dziedziną tej formy zdaniowej jest zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

(3) Człowiek jest brunetem
Powyższa wypowiedź nie jest oczywiście zdaniem logicznym, bo nie wiemy, o jakim człowieku tutaj mowa. Możemy słowo człowiek w tej wypowiedzi potraktować jako zmienną. Jeśli za tę zmienną "podstawimy"konkretnego człowieka (tzn. jego jednoznaczny opis), to wypowiedź ta stanie się zdaniem logicznym. Dziedziną tak otrzymanej formy zdaniowej jest zbiór wszystkich ludzi.

(4) $(x > 1) \Rightarrow \left(x^2 > \frac{1}{2}\right)$
To wyrażenie staje się zdaniem logicznym, jeśli za x podstawimy dowolną liczbę rzeczywistą. Jest to więc funkcja zdaniowa, której dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}$.

(5) $(a^2 - 1 \geq 0) \Rightarrow (a \geq 1)$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie widzimy, że możemy za zmienną a podstawić dowolną liczbę rzeczywistą i otrzymamy zdanie logiczne. Jest to więc także funkcja zdaniowa z dziedziną równą $\mathbb{R}$.

(6) $x^2 < y + 1$

Tym razem w wyrażeniu występują dwie zmienne: x i y. Za zmienne te można podstawić dowolne liczby rzeczywiste i otrzymamy w ten sposób zdanie logiczne. Formalnie powiemy, że zmienną jest tutaj para (x, y), za którą można podstawić dowolną parę liczb rzeczywistych. Dziedziną jest tutaj więc zbiór wszystkich par liczb rzeczywistych. Mniej formalnie mówimy, że jest to funkcja zdaniowa dwóch zmiennych rzeczywistych x i y.

Często istnieje potrzeba, by jakoś oznaczyć funkcję zdaniową. Zazwyczaj oznaczenie to jest postaci

$$\varphi(x)$$

gdzie φ jest nazwą funkcji, zaś w nawiasie wypisujemy nazwę zmiennej. Czasami, chcąc zaznaczyć, jak wygląda dziedzina funkcji $\varphi(x)$ piszemy

$$\varphi(x),\ x \in X$$

Jeśli $x_0 \in X$ jest pewnym konkretnym elementem zbioru X, to zdanie, które otrzymamy po podstawieniu tego elementu za zmienną x oznaczamy

$$\varphi(x_0)$$

Jeśli $\varphi(x)$, $x \in X$, jest funkcją zdaniową, to wiadomo, że jeśli za x podstawimy dowolny element ze zbioru X, to otrzymamy zdanie. Często jednak może nas interesować, dla jakich elementów ze zbioru X otrzymamy w ten sposób zdanie prawdziwe.

Definicja 1.17. Mówimy, że element $x_0 \in X$ *spełnia formę zdaniową* $\varphi(x)$, jeśli zdanie $\varphi(x_0)$ jest prawdziwe.

Zbiór wszystkich elementów z dziedziny spełniających formę $\varphi(x)$ oznaczamy

$$\{x : \varphi(x)\} \text{ lub } \{x \in X : \varphi(x)\}$$

Przykład 1.18. Wyznaczmy zbiory spełniające formy zdaniowe opisane w Przykładzie 1.16.

(1) $x^2 - x + 1 < 0$

Zbiór liczb rzeczywistych spełniających tę formę zdaniową, to inaczej zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej. Ponieważ dla trójmianu kwadratowego

w niej występującej mamy $\Delta = -3 < 0$, wnioskujemy, że trójmian ten nie ma miejsc zerowych. Wykres funkcji kwadratowej leży więc całkowicie nad osią x-ów (współczynnik przy x^2 jest dodatni), zatem funkcja ta nigdzie nie przyjmuje wartości ujemnych. Oznacza to, że zbiór elementów spełniających powyższą formę zdaniową jest pusty, co możemy zapisać

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 1 < 0\} = \emptyset$$

(2) $2n + 1$ jest liczbą podzielną przez 3

Z definicji podzielności wynika, że liczba $n \in \mathbb{Z}$ spełnia tę funkcję zdaniową wtedy i tylko wtedy, gdy

$2n + 1 = 3k$ dla pewnej liczby $k \in \mathbb{Z}$.

To jest zaś równoważne stwierdzeniu, że

$2n$ daje resztę 2 przy dzieleniu przez 3.

To ostanie zaś oznacza, że

n daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3.

lub inaczej

$n = 3l + 1$ dla pewnej liczby $l \in \mathbb{Z}$

Możemy więc zapisać

$$\begin{aligned} &\{n \in \mathbb{Z} : 2n + 1 \text{ jest liczbą podzielną przez } 3\} = \\ &= \{n \in \mathbb{Z} : n = 3l + 1 \text{ dla pewnego } l \in \mathbb{Z}\} = \\ &= \{3l + 1 : l \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

(3) Człowiek jest brunetem

Tutaj zbiorem elementów spełniających funkcję zdaniową jest po prostu zbiór wszystkich brunetów.

(4) $(x > 1) \Rightarrow \left(x^2 > \frac{1}{2}\right)$

Jeśli za zmienną x podstawimy dowolną liczbę rzeczywistą, to otrzymamy zdanie logiczne, które ma strukturę implikacji, której poprzednik to $x > 1$, zaś następnik $x^2 > \frac{1}{2}$. Chcąć określić wartość logiczną tego zdania, najlepiej rozpatrzyć dwa przypadki:

(a) Za zmienną x podstawiamy liczbę z przedziału $(-\infty, 1\rangle$, tzn. taką liczbę, że poprzednik jest zdaniem fałszywym. Wtedy implikacja jest prawdziwa niezależnie od wartości logicznej następnika. Oznacza to, że

$$(-\infty, 1\rangle \subset \left\{x \in \mathbb{R} : (x > 1) \Rightarrow \left(x^2 > \frac{1}{2}\right)\right\}$$

(b) Za zmienną x podstawiamy liczbę z przedziału $(1,\infty)$, tzn. taką liczbę, że poprzednik jest zdaniem prawdziwym. Zauważmy jednak, że dla wszystkich $x \in (1,\infty)$ zdanie $x^2 > \frac{1}{2}$ jest także prawdziwe. Cała implikacja jest zatem prawdziwa dla wszystkich $x \in (1,\infty)$, czyli

$$(1,\infty) \subset \left\{x \in \mathbb{R} : (x > 1) \Rightarrow \left(x^2 > \frac{1}{2}\right)\right\}$$

Ostatecznie, wziąwszy pod uwagę obydwa przypadki, mamy

$$\left\{x \in \mathbb{R} : (x > 1) \Rightarrow \left(x^2 > \frac{1}{2}\right)\right\} = \mathbb{R}$$

(5) $(a^2 - 1 \geq 0) \Rightarrow (a \geq 1)$

Ponieważ ta forma zdaniowa ma również strukturę implikacji, postępujemy podobnie jak w poprzednim punkcie, tzn. rozpatrujemy dwa przypadki

(a) Za a podstawiamy taką liczbę, że poprzednik jest zdaniem fałszywym. Takie liczby a muszą być rozwiązaniami nierówności kwadratowej $a^2 - 1 < 0$, czyli $a \in (-1,1)$. Ponieważ poprzednik jest fałszywy, to cała implikacja jest w tym przypadku zawsze prawdziwa, zatem

$$(-1,1) \subset \{a \in \mathbb{R} : (a^2 - 1 \geq 0) \Rightarrow (a \geq 1)\}$$

(b) Za a podstawiamy taką liczbę, że poprzednik jest zdaniem prawdziwym. Tym razem są to rozwiązania nierówności kwadratowej $a^2 - 1 \geq 0$, czyli $a \in (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,\infty)$. Spośród tych a musimy teraz wyszukać te liczby, dla których jednocześnie następnik jest prawdziwy (bo implikacja ma być prawdziwa). Stwierdzamy, że w tym przypadku cała implikacja jest prawdziwa zatem dla $a \in \langle 1,\infty)$. Mamy więc

$$\langle -1,\infty) \subset \{a \in \mathbb{R} : (a^2 - 1 \geq 0) \Rightarrow (a \geq 1)\}$$

Ostaecznie, zbiorem elementów spełniających formę zdaniową będzie suma podzbiorów otrzymanych w obu przypadkach, czyli

$$\{a \in \mathbb{R} : (a^2 - 1 \geq 0) \Rightarrow (a \geq 1)\} = (-1,1) \cup \langle 1,\infty) = (-1,\infty)$$

ROZDZIAŁ 2

Elementy teorii zbiorów

1. Pojęcia pierwotne i aksjomaty

Matematyka jest nauką *aksjomatyczną*. Co to oznacza? Na pewno już w trakcie edukacji szkolnej niejednokrotnie zetknęliśmy się z faktem, że każdy obiekt, o którym mówiliśmy na lekcjach matematyki zależy *zdefiniować*, tzn. dokładnie go opisać.

Przykład 2.1. Rozważmy dobrze znany ze szkolnych lekcji geometrii *kwadrat*. Jego definicja mogłaby być następująca:

> Kwadrat to czworokąt, w którym wszystkie kąty są proste i wszystkie boki są równej długości.

Problem polega na tym, że w tej definicji zostało użyte słowo *czworokąt*. To też wymaga definicji. Możemy to zrobić np. tak

> Czworokąt, to wielokąt, który ma cztery kąty.

Ale co to jest *wielokąt*?

> Wielokąt to figura płaska ograniczona linią łamaną zamkniętą zwyczajną.

Zauważmy, że tutaj znowu pojawiły się nowe pojęcia wymagające zdefiniowania: *figura płaska* i *linia łamana zamknięta zwyczajna*. Weźmy na przykład ten drugi obiekt. Na początku musimy powiedzieć, co to jest *linia łamana*.

> Linia łamana (lub krótko łamana) to w linia utworzona z ciągu odcinków (zwanych jej bokami) w taki sposób, że
>
> (1) żadne dwa następujące po sobie odcinki nie leżą na jednej prostej,
>
> (2) punkt będący końcem pierwszego odcinka jest początkiem drugiego odcinka, punkt będący końcem drugiego – początkiem trzeciego i tak dalej.
>
> Punkty, o których mowa powyżej nazywamy wierzchołkami łamanej.

W powyższej definicji pojawiło się słowo *odcinek*, które też wymaga zdefiniowania. Możemy to zrobić np. tak:

Odcinek to część prostej zawarta pomiędzy dwoma jej punktami z tymi punktami włącznie.

Teraz z kolei definicji waymagają słowa *prosta* i *punkt*. Wydaje się, że tę procedurę można by ciągnąć w nieskończoność.

Powyższy przykład uzmysławia nam, że nie da się w sensowny sposób zdefiniować wszystkich pojęć w matematyce tak, aby każda definicja odwoływała się do już wcześniej zdefiniowanych pojęć. Jak zaradzić tej sytuacji? Rozwiązaniem tego problemu jest przyjęcie, że pewnych pojęć nie będziemy definiować. Będą to tzw. *pojęcia pierwotne*. Obiekty, które te pojęcia oznaczają, będziemy opisywali podając ich własności. Zdania, w których opisujemy własności tych obiektów nazywamy *aksjomatami*. Z natury rzeczy aksjomaty są takimi zdaniami, których prawdziwości nie dowodzimy. Ze zdań tych wynikają wszystkie twierdzenia matematyczne.

W systemie geometrycznym opisanym przez Euklidesa pojęciami pierwotnymi były m.in. prosta i punkt. Własności tych pojęć są opisane przez jego słynnych 5 aksjomatów (patrz np. [**2**]). Stosując reguły wnioskowania logicznego, o których mówiliśmy w poprzednim wykładzie, można wywieść z tych aksjomatów wszystkie znane nam twierdzenia geometrii takie jak np. twierdzenie Talesa i twierdzenie Pitagorasa.

Należy też zaznaczyć, że wybór takich, a nie innych pojęć pierwotnych i aksjomatów jest w zasadzie rzeczą czystej umowy. Należy jedynie zadbać, by układ aksjomatów spełniał następujące dwa warunki

(1) *Niezależność*. Sensowny układ aksjomatów musi być tak dobrany, by żaden aksjomat nie wynikał z pozostałych.
(2) *Niesprzeczność*. Wykluczona jest sytuacja, by zaprzeczenie jednego z aksjomatów wynikało z pozostałych.

Wynika stąd zatem, że np. w geometrii układ aksjomatów przyjęty przez Euklidesa nie jest jedynym możliwym. Można rozważać np. taki układ, w którym jeden z aksjomatów Euklidesa zastąpimy jego zaprzeczeniem. W ten sposób określimy nową geometrię, w której obowiązują inne zasady i prawdziwe są inne twierdzenia niż te, o których słyszeliśmy w szkole. Takie systemy geometryczne nazywamy *geometriami nieeuklidesowymi*. Przykładami geometrii nieeklidesowych są geometria hiperboliczna Łobaczewskiego i geometria eliptyczna (sferyczna).

2. Uwagi o aksjomatach teorii zbiorów

Nie tylko geometria, ale cała matematyka oparta jest na pewnym układzie aksjomatów, a więc jest *nauką aksjomatyczną*. Przyjęto, że pojęciami pierwotnymi w matematyce będą pojęcia zbioru i elementu zbioru[1]. Niezbędne są zatem aksjomaty opisujące te pojęcia. Powszechnie przyjmowany dziś system aksjomatów zaproponowany został przez Ernsta Zermelo w 1904 roku, Później został on uzupełniony przez Abrahama Fraenkel'a. Aksjomaty te uzupełnione o tzw. *aksjomat wyboru* określa się nazwą aksjomatów ZFC.

Omówimy tutaj niektóre z tych aksjomatów. Będzie to tylko przegląd wybranych aksjomatów. Czytelników zainteresowanych pełną aksjomatyką teorii mnogości odsyłamy do pozycji [1].

- **Aksjomat ekstensjonalności**

Jeżeli zbiory a i b mają te same elementy, to są identyczne.

$$\forall a\, \forall b : (\forall x : (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b)\,.$$

Wynika stąd, że jeśli chcemy wykazać równość zbiorów a i b, to należy uzasadnić, że dla każdego x prawdziwa jest równoważność: $x \in a \Leftrightarrow x \in b$.

- **Aksjomat zbioru pustego**

Istnieje zbiór, który nie ma żadnego elementu.

$$\exists x\, \forall y : \sim (y \in x)$$

[1] **Intuicyjna teoria zbiorów.** Do pewnego momentu matematycy posługiwali się intuicyjnym określeniem zbioru i jego elementów. Na pierwszy rzut oka pojęcia te wydają się oczywiste. Okazuje się jednak, że takie intuicyjne podejście prowadzi do paradoksów. Jako pierwszy odkrył je brytyjski matematyk i filozof Bertrand Russel. Postawił on np. pytanie, czy istnieje zbiór, którego elementami byłyby wszystkie zbiory. Intuicja podpowiada, że nie powinno być przeszkód, by taki obiekt istniał. Russel zauważył jednak, że istnienie takiego zbioru implikowałoby również istnienie następującego zbioru

$$z = \{x : x \notin x\}.$$

Nawet w intuicyjnym podejściu do teorii zbiorów uznawano, że musi być spełniony aksjomat podzbiorów (patrz str. 29). Istnienie zbioru z prowadziłoby jednak do następującej równoważności:

$$z \in z \;\Leftrightarrow\; z \notin z.$$

Oczywiście równoważność ta nie ma sensu na gruncie reguł logiki, o których mówiliśmy w poprzednim wykładzie.

Odkrycie tego typu paradoksów doprowadziło matematyków do wniosku, że intuicyjne podejście do teorii zbiorów prowadzi na manowce i niezbędna jest bardzo rygorystyczna metoda aksjomatyczna.

Można uzasadnić, że zbiór, o którym mowa w powyższym aksjomacie, jest tylko jeden. Załóżmy bowiem, że zbiory x_1 i x_2 są zbiorami, które nie mają żadnych elementów. Zauważmy, że dla każdego y równoważność

$$y \in x_1 \Leftrightarrow y \in x_2$$

jest zdaniem prawdziwym. Oba zdania składowe są bowiem fałszywe dla każdego y. Na podstawie aksjomatu ekstensjonalności stwierdzamy zatem, że $x_1 = x_2$. Jedyny zbiór, który nie ma elementów nazywamy *zbiorem pustym* i oznaczamy $\emptyset$.

- **Aksjomat sumy**

Dla dowolnej rodziny zbiorów r istnieje zbiór u, do którego należą dokładnie te elementy x, które należą do co najmniej jednego spośród zbiorów, które są elementami rodziny r.

$$\forall r\, \exists u\, \forall x :\ (x \in u \Leftrightarrow \exists a : (x \in a \wedge a \in r))$$

Podobnie jak w przypadku poprzedniego aksjomatu można uzasadnić, że dla każdej rodziny zbiorów r istnieje dokładnie jeden zbiór u spełniający warunek powyższy warunek. Nazywamy go sumą rodziny r i oznaczamy $\bigcup r$. Jeśli r jest rodziną skończoną, tzn. $r = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ to sumę rodziny r oznaczamy też $x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$. W szczególności, jeśli $r = \{x, y\}$, to na oznaczenie sumy tej rodziny piszemy $x \cup y$. Czasami się też zdarza, że elementy rodziny r są indeksowane elementami jakiegoś zbioru $\mathcal{I}$, tzn. $r = \{x_\iota :\ \iota \in \mathcal{I}\}$. Wtedy na oznaczenie sumy tej rodziny używamy zapisu $\bigcup_{\iota \in \mathcal{I}} x_\iota$.

- **Aksjomat zbioru potęgowego**

Dla każdego zbioru x istnieje zbiór p, którego elementami są dokładnie podzbiory zbioru x.

$$\forall x\, \exists p\, \forall y :\ (y \in p \Leftrightarrow \forall z :\ (z \in y \Rightarrow z \in x))$$

Można uzasadnić, że dla każdego zbioru x istnieje dokładnie jeden zbiór p opisany w tym aksjomacie. Nazywamy go *zbiorem potęgowym* zbioru x i oznaczamy 2^x.

W szczególności:

– jeśli $x = \emptyset$, to $2^x = \emptyset$,

– jeśli $x = \{a\}$, to $2^x = \{\emptyset, \{a\}\}$,
– jeśli $x = \{a, b\}$, to $2^x = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
– jeśli $x = \{a, b, c\}$, to $2^x = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Można uzasadnić, że jeśli x jest zbiorem skończonym liczącym n elementów, to zbiór 2^x ma 2^n elementów.

- **Aksjomat podzbiorów**

Jeśli p jest formą zdaniową, to dla każdego zbioru a istnieje zbiór tych elementów zbioru a, które spełniają formę p.

$$\forall a\ \exists b\ \forall x:\ x \in b \Leftrightarrow x \in a \wedge p(x)$$

Zbiór b, o którym mowa w tym aksjomacie oznacza się $\{x \in a:\ p(x)\}$.
Przykładowo:
– jeśli $p(x) \equiv x^2 < 5$ i $a = \mathbb{N}$, to $\{x \in \mathbb{N}:\ x^2 < 5\} = \{1, 2\}$,
– jeśli $p(x) \equiv x^2 - 3x + 2 = 0$ i $a = \mathbb{R}$, to $\{x \in \mathbb{R}:\ x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$.

- **Aksjomat wyboru**

Dla każdej rodziny u niepustej zbiorów rozłącznych istnieje zbiór v (tzw. *selektor*), do którego należy dokładnie po jednym elemencie z każdego ze zbiorów należących do rodziny u.

$$\forall u : (\forall x \in u : x \neq \emptyset) \wedge (\forall x, y \in u : x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset) \Rightarrow \exists v\ \forall x \in u\ \exists z : x \cap v = \{z\}$$

W przypadku ograniczenia się do skończonych rodzin zbiorów aksjomat wyboru jest trywialny (wynika z innych aksjomatów). Zastosowany dla nieskończonych rodzin zbiorów również wydaje się intuicyjny, lecz jego konsekwencje bywają zaskakujące. Przykładowo, Stefan Banach i Alfred Tarski korzystając z aksjomatu wyboru udowodnili twierdzenie o paradoksalnym rozkładzie kuli. Orzeka ono, że możliwy jest rozkładu kuli w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej na sześć części, z których można złożyć, korzystając wyłącznie z obrotów i przesunięć, dwie kule o średnicy równej średnicy kuli wyjściowej.

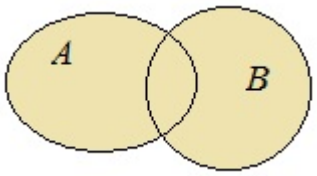
3. Działania na zbiorach

3.1. Suma zbiorów. Wymieniając aksjomaty teorii mnogości w poprzednim rozdziale wspomnieliśmy o aksjomacie sumy, który gwarantuje nam, że dla każdego zbioru r,

którego elementami są zbiory istnieje zbiór, który składa się dokładnie z tych elementów, które należą do przynajmniej jednego zbioru będącego elementem rodziny r. Zbiór ten nazywamy *sumą* rodziny r. W szczególności, gdy zbiór r jest dwuelementowy, tzn. $r = \{A, B\}$ dla pewnych zbiorów A i B, to istnieje suma zbiorów A i B

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Sumę zbiorów A i B można zilustrować następującym diagramem Venna



Dla n-elementowego układu zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jego sumę oznaczamy $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ albo $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ i definiujemy analogicznie do sumy dwóch zbiorów:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$$

Inaczej można to zapisać w następujący sposób

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x : (\exists\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} : x \in A_i)\}$$

4. Iloczyn kartezjański

Rozpocznijmy od zdefiniowania pojęcia pary uporządkowanej[2].

Definicja 2.2. *Parą uporządkowaną* nazywamy taki układ dwóch elementów (niekoniecznie różnych) (x, y), w którym określona jest kolejność tych elementów, tzn. wiadomo, który jest pierwszy, a który drugi.

[2]Na gruncie aksjomatów teorii mnogości można zdefiniować parę uporządkowaną np. tak:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Można wtedy powiedzieć, że x jest pierwszym elementem tak zdefiniowanej pary uporządkowanej, jeśli spełnia warunek:

$$\forall z : z \in (x, y) \Rightarrow x \in z$$

tzn. x jest elementem każdego elementu zbioru definiującego parę (x, y). Definicję tę sformułował polski matematyk Kazimierz Kuratowski.

Nie będziemy kontynuowali tego wątku. Poprzestaniemy na raczej intuicyjnym rozumieniu pary uporządkowanej, które akurat w tym przypadku nie prowadzi do paradoksów.

4.1. Przypadek dwóch zbiorów. Możemy teraz zdefiniować iloczyn kartezjański dwóch zbiorów.

Definicja 2.3. *Iloczynem kartezjańskim* (lub *produktem*) zbiorów X i Y nazywamy zbiór $X \times Y$, którego elementami są wszystkie pary uporządkowane (x, y) takie, że pierwszy element x pochodzi ze zbioru X, zaś drugi element y – ze zbioru Y:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}.$$

W przypadku, gdy $Y = X$, będziemy pisali X^2 zamiast $X \times X$.

Przykład 2.4. Niech $X = \{a, b\}$ i $Y = \{i, j\}$. Wtedy iloczyn kartezjański tych zbiorów jest zbiorem tych wszystkich par uporządkowanych, których pierwszym elementem jest a lub b, zaś drugi element to i lub j. Zatem

$$X \times Y = \{(a, i), (a, j), (b, i), (b, j)\}.$$

Zamieniając rolami zbiory X i Y i rozumując podobnie jak poprzednio dostajemy

$$Y \times X = \{(i, a), (i, b), (j, a), (j, b)\}.$$

Uwaga 2.5. Analizując powyższy przykład zauważamy, że na ogół $X \times Y \neq Y \times X$. Z drugiej strony elementy obu tych zbiorów pozostają we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości: parze (x, y) ze zbioru $X \times Y$ odpowiada para (y, x) ze zbioru $Y \times X$.

Przykład 2.6. Obliczmy $X \times Y$, gdzie

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 6x + 5 \leq 0\}, \\ Y &= \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x = 0\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że oba zbiory są skończone. Zbiór X jest zbiorem całkowitych rozwiązań nierówności kwadratowej $x^2 - 6x + 5 \leq 0$. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej występującej w tej nierówności są liczby 1 i 5. Przedział $[1; 5]$ jest zbiorem wszystkich rozwiązań rzeczywistych powyższej nierówności. Oznacza to, że $X = \mathbb{Z} \cap [1, 5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Z kolei zbiór Y jest zbiorem równania $x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x = 0$. Łatwo zauważyć, że

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x &= x(x^3 - 3x^2 - x + 3) = \\ &= x\left[x^2(x - 3) - (x - 3)\right] = \\ &= x(x - 3)(x^2 - 1) = \\ &= x(x - 3)(x - 1)(x + 1). \end{aligned}$$

Mamy zatem $Y = \{-1, 0, 1, 3\}$.

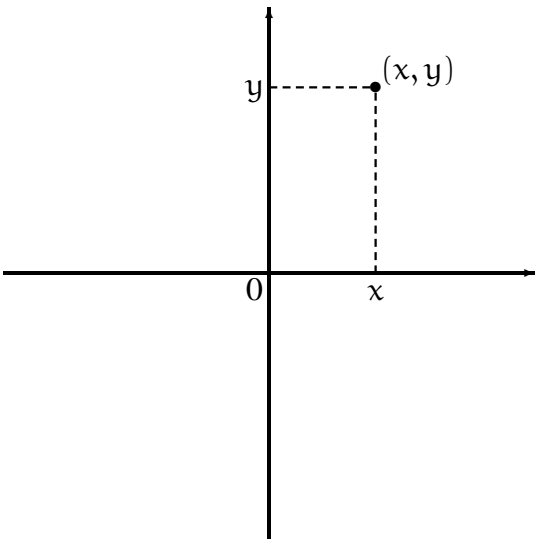
Możemy teraz wyznaczyć iloczyn kartezjański:

$$\begin{aligned} X \times Y &= \{(1,-1),(1,0),(1,1),(1,3),(2,-1),(2,0),(2,1),(2,3),(3,-1),(3,0),\\ &\quad (3,1),(3,3),(4,-1),(4,0),(4,1),(4,3),(5,-1),(5,0),(5,1),(5,3)\} \end{aligned}$$

Przykład 2.7. Niech $X = \{1, 2, 3\}$ i $Y = \{-1, 1, 2\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} X \times Y &= \{(1,-1),(1,1),(1,2),(2,-1),(2,1),(2,2),(3,-1),(3,1),(3,2)\}\\ Y \times X &= \{(-1,1),(-1,2),(-1,3),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\} \end{aligned}$$

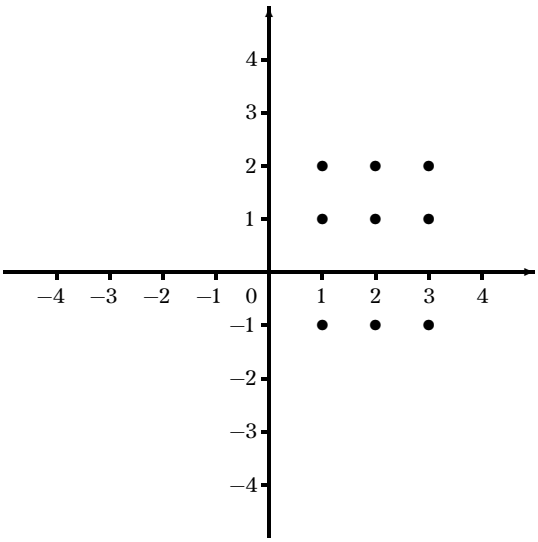
Przykład 2.8. Niech $X = Y = \mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{R}^2$ jest zbiorem wszystkich par uporządkowanych (x, y), gdzie x i y są liczbami rzeczywistymi. Przypomnijmy, że każdą taką parę można utożsamić z pewnym punktem na płaszczyznie wyposażonej w kartezjański układ współrzędnych. Odwrotnie, każdemu takiemu punktowi odpowiada dokładnie jedna para liczb (x, y), gdzie x jest odciętą tego punktu, zaś y – jego rzędną.



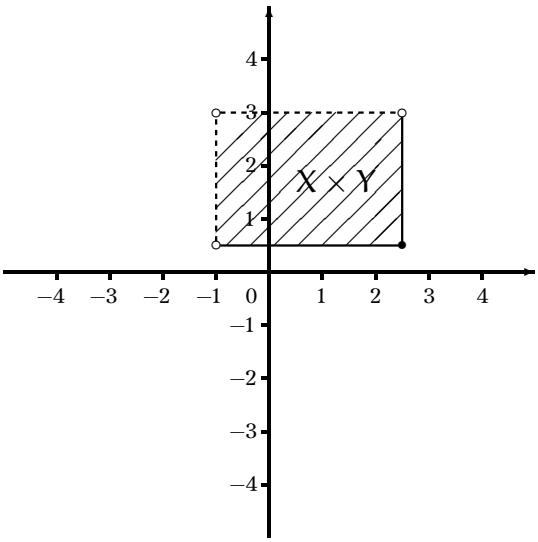
Można więc zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ utożsamić ze zbiorem wszystkich punktów na płaszczyznie.

Wynika stąd, że jeśli $A \subset \mathbb{R}$ i $B \subset \mathbb{R}$, to zbiór $A \times B$ można identyfikować z pewnym podzbiorem płaszczyzny, a jeśli jest dostatecznie regularny, to można go po prostu narysować.

Przykład 2.9. Rozważmy zbiór z Przykładu 2.4. Zgodnie z uwagami zawartymi w poprzednim przykładzie zbiór ten możemy interpretować jako podzbiór płaszczyzny.



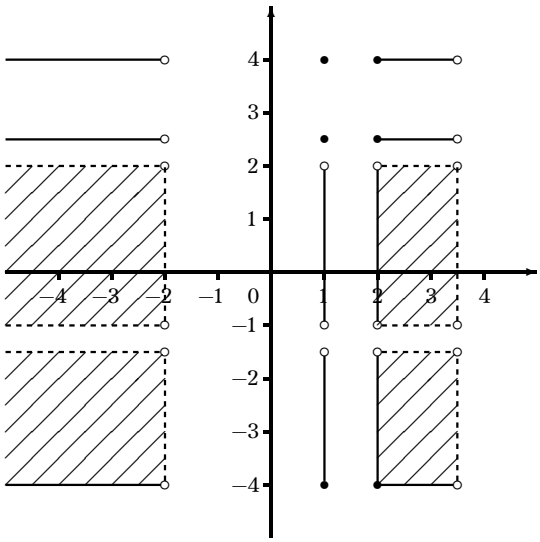
Przykład 2.10. Niech $X = (-1;2{,}5]$ i $Y = [0{,}5;3)$[3]. Wtedy iloczyn kartezjański można przedstawić graficznie następująco



Przerywane linie brzegu i niewypełnione kółka w narożnikach oznaczają, że dane punkty nie należą do figury.

Przykład 2.11. Niech $X = (-\infty;-2) \cup \{1\} \cup \left[2;\frac{7}{2}\right)$ i $Y = \left[-4;-1\frac{1}{2}\right) \cup (-1;2) \cup \left\{\frac{5}{2},4\right\}$. Wtedy otrzymujemy następujący rysunek

[3]Dla uniknięcia nieporozumień przedział otwarty o końcach a i b będziemy oznaczali $(a;b)$. Pozwoli to odróżnić przedział od pary uporządkowanej (a,b). Z drugiej strony, nie będziemy bardzo konsekwentni w używaniu tych oznaczeń. W przypadku, gdy nie będzie budziło to nieporozumień, przedział o końcach a i b będziemy oznaczali tradycyjnie (a,b).



Iloczyn kartezjański posiada następującą własność jednoznaczności

Twierdzenie 2.12. *Dla dowolnych zbiorów* A, B, C, D *prawdziwa jest następująca równoważność:*

$$A \times B = C \times D \Leftrightarrow A = C \wedge B = D.$$

Ponadto, można wykazać następujące tożsamości:

4.2. Przypadek trzech zbiorów. Dla trzech zbiorów X, Y, Z iloczyn kartezjański $X \times Y \times Z$ określamy jako

$$X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z.$$

Z formalnego punktu widzenia elementy tego zbioru są postaci $((x, y), z)$, czyli pary uporządkowane, których pierwszym elementem jest para uporządkowana (x, y), a drugim – element z zbioru Z. Praktycznie, możemy utożsamiać takie obiekty z trójkami uporządkowanymi (x, y, z). Podobnie jak w parach uporządkowanych, w trójkach też określona jest dokładnie kolejność elementów. Wiadomo, który element jest pierwszy, który drugi, a który trzeci. Wynika z tego, że np.

$$(1, 2, 3) \neq (2, 3, 1),$$

bo mimo, że obie trójki składają się z tych samych elementów, to różnią się ich kolejnością.

Przykład 2.13. Niech $X = \{1,2\}$, $Y = \{x,y\}$ i $Z = \{a,b\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} X \times Y \times Z &= \{(1,x,a),(1,x,b),(1,y,a),(1,y,b),(2,x,a),(2,x,b),(2,y,a),(2,y,b)\} \\ Z \times Y \times X &= \{(a,x,1),(a,x,2),(a,y,1),(a,y,2),(b,x,1),(b,x,2),(b,y,1),(b,y,2)\} \end{aligned}$$

Przykład 2.14. Niech $X = \{1,2\}$, $Y = \{\{x,y\}\}$ i $Z = \{a,b\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} X \times Y \times Z &= \{(1,\{x,y\},a),(1,\{x,y\},b),(2,\{x,y\},a),(2,\{x,y\},b)\} \\ Y \times Z \times X &= \{(\{x,y\},a,1),(\{x,y\},a,2),(\{x,y\},b,1),(\{x,y\},b,2)\} \end{aligned}$$

Przykład 2.15. Niech $X = \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $Y = \{a,\{a\}\}$ i $Z = \{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} X \times Y \times Z = \\ = \{&(\varnothing,a,\{\varnothing\}),(\varnothing,a,\{\{\varnothing\}\}),(\varnothing,\{a\},\{\varnothing\}),(\varnothing,\{a\},\{\{\varnothing\}\}),(\{\varnothing\},a,\{\varnothing\}), \\ &(\{\varnothing\},a,\{\{\varnothing\}\}),(\{\varnothing\},\{a\},\{\varnothing\}),(\{\varnothing\},\{a\},\{\{\varnothing\}\}),(\{\varnothing,\{\varnothing\}\},a,\{\varnothing\}), \\ &(\{\varnothing,\{\varnothing\}\},a,\{\{\varnothing\}\}),(\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{a\},\{\varnothing\}),(\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{a\},\{\{\varnothing\}\})\} \end{aligned}$$

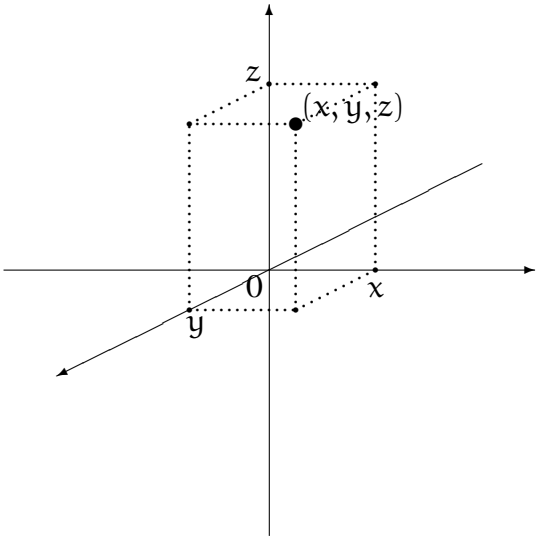
Podobnie jak w przypadku dwóch zbiorów będziemy pisać X^3 zamiast $X \times X \times X$ w przypadku, gdy $X = Y = Z$.

Przykład 2.16. Niech $X = \{0,1\}$. Wtedy

$$\{0,1\}^3 = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}.$$

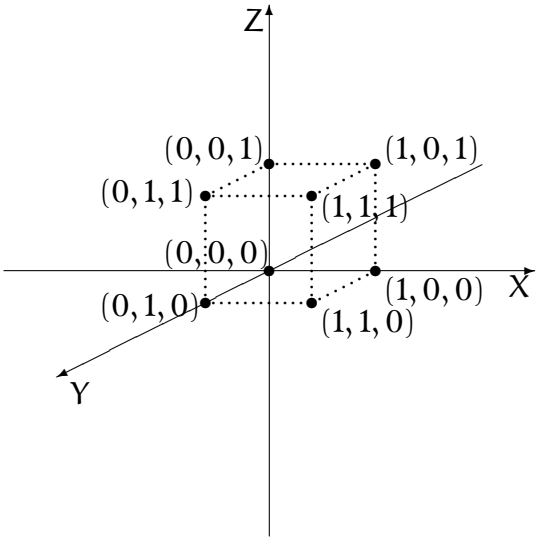
Zbiór składa się zatem ze wszystkich ciągów zerojedynkowych długości 3.

Przykład 2.17. Niech $X = Y = Z = \mathbb{R}$. Podobnie jak w Przykładzie 2.7 zauważamy, że uporządkowane trójki liczb rzeczywistych (x,y,z) odpowiadają punktom w przestrzeni wyposażonej w kartezjański układ współrzędnych złożony z trzech osi liczbowych.



Zatem iloczyn kartezjański $\mathbb{R}^3$ można utożsamiać z całą przestrzenią.

Przykład 2.18. Analiza poprzedniego przykładu prowadzi do wniosku, że jeśli $X, Y, Z \subset \mathbb{R}$, to iloczyn kartezjański $X \times Y \times Z$ jest pewnym podzbiorem przestrzeni. Na przykład zbiór $\{0,1\}^3$ z Przykładu 2.11 można zilustrować następującym rysunkiem



Przykład 2.19. Z kolei zbiór $[0;1]^3$ (zwany *kostką trójwymiarową*) można utożsamić z sześcianem, którego wierzchołkami są punkty ze zbioru $\{0,1\}^3$.

4.3. Przypadek dowolnej skończonej ilości zbiorów. Niech teraz n będzie dowolną liczbą naturalną. Przypuśćmy, że mamy n zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Iloczyn kartezjański tych zbiorów definiujemy następująco

Definicja 2.20. *Iloczynem kartezjańskim* zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nazywamy zbiór

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in X_i \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Symbol $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oznacza tutaj uporządkowany układ n elementów. Taki układ nazywamy też po prostu *ciągiem* n-elementowym lub ciągiem długości n. Ważne jest tutaj, że pierwszy element w tym ciągu musi pochodzić ze zbioru X_1, drugi – ze zbioru X_2, itd.

Czasami zamiast pisać $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ będziemy używać oznaczenia $\prod_{i=1}^{n} X_i$.

Jeśli wszystkie zbiory X_i dla $i = 1, 2, \ldots, n$ są identyczne i równe zbiorowi X, to na oznaczenie ich iloczynu kartezjańskiego będziemy pisali X^n.

Przykład 2.21. Zbiór $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem wszystkich n-elementowych ciągów złożonych z liczb rzeczywistych. Przypomnijmy, pewne przypadki szczególne:

- $n = 1$. Wtedy zbiór ten jest tożsamy po prostu ze zbiorem $\mathbb{R}$, który geometrycznie interpretujemy jako zbiór punktów na osi liczbowej.
- $n = 2$. W Przykładzie 2.7 pokazaliśmy, że zbiór ten można utożsamić z płaszczyzną wyposażoną w kartezjański układ współrzędnych.
- $n = 3$. Wtedy zbiór ten można utożsamić z przestrzenią, co pokazaliśmy w Przykładzie 2.15.

Nawiązując do tych szczególnych przypadków, w których poszczególne zbiory $\mathbb{R}^n$ miały interpretacje geometryczne, możemy nadać również interpretację geometryczną zbiorowi $\mathbb{R}^n$ dla dowolnego n. Zbiór $\mathbb{R}^n$ będziemy zatem odtąd nazywać n-wymiarową *przestrzenią euklidesową*.

Przykład 2.22. Nawiązując do poprzedniego przykładu, zbiór $[0;1]^n$ można interpretować jako podzbiór n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Zbiór ten nazywamy *kostką n-wymiarową*.

ROZDZIAŁ 3

Relacje i funkcje

1. Relacje

Pojęcie relacji jest bardzo często spotykanym pojęciem zarówno w matematyce jak i w innych dziedzinach życia. Potocznie, jeśli mówimy, że jakieś dwa obiekty pozostają ze sobą w relacji, to dajemy do zrozumienia, że jest między nimi jakaś zależność. Mówimy np. że wasal był w relacji podległości wobec swojego suwerena, brat i siostra pozostają ze sobą w relacji pokrewieństwa, itp.

W matematyce pojęcie relacji definiujemy następująco:

Definicja 3.1. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. *Relacją* na zbiorze X nazywamy dowolny podzbiór $\rho \in X^2$.

Jeśli $(x, y) \in \rho$ dla pewnych elementów $x, y \in X$, to mówimy, że element x *pozostaje w relacji* ρ z elementem y i zapisujemy to $x\rho y$.

Przykład 3.2. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Następujące trzy podzbiory w $X \times X$ są w świetle powyższej definicji relacjami:

(1) $\varnothing \subset X \times X$
(2) $\nabla_X = \{(x, x) : x \in X\}$
(3) $\Delta_X = X \times X$

Relacja $\varnothing$ ma tę własność, że żadne elementy nie pozostają ze sobą w tej relacji.

Relacja ∇_X jest po prostu relacją równości elementów w zbiorze X, ponieważ, jak łatwo zauważyć

$$(x, y) \in \nabla_X \Leftrightarrow x = y.$$

Z kolei relacja Δ_X ma tę własność, że każde dwa elementy pozostają ze sobą w tej relacji.

Przykład 3.3. Niech $X = \{1, 2, 3, 4\}$ i niech

$$\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

Zauważmy, że dla dowolnych elementów $x, y \in X$

$$x \rho y \Leftrightarrow x \leq y$$

Przykład 3.4. Dla dowolnego podzbioru $X \subset \mathbb{R}$ definiujemy następujące relacje:

(1) $\{(x, y) \in X^2 : x \leq y\}$,
(2) $\{(x, y) \in X^2 : x < y\}$,
(3) $\{(x, y) \in X^2 : x = y\}$,
(4) $\{(x, y) \in X^2 : x \neq y\}$.

Definicja 3.5. Mówimy, że relacja $\rho \in X^2$ jest;

- *zwrotna*, jeśli $\forall x \in X : x \rho x$,
- *symetryczna*, jeśli $\forall x, y \in X : x \rho y \Rightarrow y \rho x$,
- *antysymetryczna*, jeśli $\forall x, y \in X : (x \rho y \wedge y \rho x) \Rightarrow x = y$
- *przechodnia*, jeśli $\forall x, y, z \in X : (x \rho y \wedge y \rho z) \Rightarrow x \rho z$,
- *spójna*, jeśli $\forall x, y \in X : x \rho y \vee y \rho x$.

Przykład 3.6. Rozważmy relacje opisane w Przykładzie 3.2.

- Relacja $\varnothing$ [1]
  - nie jest zwrotna, bo zdanie $x \varnothing x$ jest fałszywe dla każdego $x \in X$;
  - jest symetryczna – implikacja $x \varnothing y \Rightarrow y \varnothing x$ jest prawdziwa dla każdych x, y, bo jej poprzednik jest zdaniem fałszywym;
  - jest antysymetryczna – implikacja $x \varnothing y \wedge y \varnothing x \Rightarrow x = y$ jest prawdziwa dla każdych x, y, bo jej poprzednik jest zdaniem fałszywym;
  - jest przechodnia – implikacja $x \varnothing y \wedge y \varnothing z \Rightarrow x \varnothing z$ jest prawdziwa dla każdych x, y, z, bo jej poprzednik jest zdaniem fałszywym;
  - nie jest spójna, bo oba zdania $x \varnothing y$ i $y \varnothing x$ są fałszywe dla każdych $x, y \in X$.
- Relacja ∇_X (piszemy też ∇)[2]
  - jest zwrotna, bo $x \nabla x$ dla każdego $x \in X$;
  - jest symetryczna – jeśli $x \nabla y$, to $x = y$ (patrz Przykład 3.2), zatem prawdziwe jest również zdanie $y \nabla x$;
  - jest antysymetryczna – prawdziwość zdań $x \nabla y$ i $y \nabla x$ jest możliwa tylko w przypadku, gdy $x = y$;

[1] Przypomnijmy, że dla każdych $x, y \in X$ zdanie $x \varnothing y$ jest fałszywe.
[2] Przypomnijmy, że $x \nabla y \Leftrightarrow x = y$.

  - jest przechodnia – jeśli $x \nabla y$ i $y \nabla z$, to $x = y$ i $y = z$, więc $x = z$, co oznacza, że $x \nabla z$;
  - nie jest spójna, bo zdanie $x \nabla y$ jest fałszywe dla każdej pzry elementów x, y takich, że $x \neq y$.
- Relacja Δ_X (albo po prostu Δ)[3]
  - jest zwrotna, bo $x \Delta x$ dla każdego $x \in X$;
  - jest symetryczna – ponieważ $y \Delta x$ dla każdych x, y, również implikacja $x \Delta y \Rightarrow y \Delta x$ jest prawdziwa dla wszystkich par x, y;
  - nie jest antysymetryczna – ponieważ $x \Delta y$ i $y \Delta x$ dla każdych x, y, to gdy $x \neq y$ implikacja $x \Delta y \wedge y \Delta x \Rightarrow x = y$ jest zdaniem fałszywym;
  - jest przechodnia – ponieważ $x \Delta z$ dla każdych x, z, to implikacja $x \Delta y \wedge y \Delta z \Rightarrow x \Delta z$ jest prawdziwa dla każdych x, y, z;
  - jest spójna, bo zdanie $x \Delta y$ jest prawdziwe dla każdej pzry elementów x, y.

	$\varnothing$	∇_X	Δ_X
zwrotna	nie	tak	tak
symetryczna	tak	tak	tak
antysymetryczna	tak	tak	nie
przechodnia	tak	tak	tak
spójna	nie	nie	tak

Przykład 3.7. Załóżmy, że $X = \mathbb{R}$ i prześledźmy własności relacji z Przykładu 3.4.

- Relacja $\leq$
  - jest zwrotna, bo $x \leq x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$;
  - nie jest symetryczna, bo np. $0 \leq 1$, ale nieprawda, że $1 \leq 0$;
  - jest antysymetryczna, bo z tego, że $x \leq y$ i $y \leq x$ wynika, że $x = y$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$;
  - jest przechodnia – wynika to z oczywistej obserwacja, że jeśli $x \leq y$ i $y \leq z$, to $x \leq z$;
  - jest spójna, bo dla każdych dwóch liczb rzeczywistych x, y spełniona jest przynajmniej jedna z nierówności $x \leq y$ i $y \leq x$.
- Relacja $<$
  - nie jest zwrotna, bo zdanie $x < x$ jest fałszywe dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$;
  - nie jest symetryczna (podobnie jak $\leq$);

[3] $x \Delta y$ dla każdych $x, y \in X$.

  - jest antysymetryczna, bo nie ma dwóch różnych liczb x i y takich, że $x < y$ i $y < x$;
  - jest przechodnia (podobnie jak $\leq$);
  - nie jest spójna, ponieważ żadna liczba x nie pozostaje w relacji $<$ z liczbą x.
- Relacja $=$ nie jest niczym innym niż relacja $\nabla_{\mathbb{R}}$ opisana w poprzednim przykładzie.
- Relacja $\neq$
  - nie jest zwrotna, bo zdanie $x \neq x$ jest fałszywe dla każdego x;
  - jest symetryczna, bo z tego, że $x \neq y$ wynika, że $y \neq x$;
  - nie jest antysymetryczna, bo dla każdych x, y takich, że $x \neq y$ implikacja $x \neq y \wedge y \neq x \Rightarrow x = y$ jest fałszywa;
  - nie jest przechodnia – jeśli przyjmiemy $x = 0$, $y = 1$ i $z = 0$, to zdania $x \neq y$ i $y \neq z$ są prawdziwe, ale zdanie $x \neq z$ jest fałszywe. Zatem implikacja $(x \neq y \wedge y \neq z) \Rightarrow x \neq z$ jest wtedy fałszywa;
  - nie jest spójna, bo dla każdej pary elementów x, y takich, że $x = y$, żadne ze zdań $x \neq y$ i $y \neq x$ nie jest prawdziwe.

	$\leq$	$<$	$=$	$\neq$
zwrotna	tak	nie	tak	nie
symetryczna	nie	nie	tak	tak
antysymetryczna	tak	tak	tak	nie
przechodnia	tak	tak	tak	nie
spójna	tak	nie	nie	nie

Przykład 3.8. Niech $X = \mathbb{N}$. Mówimy, że liczba naturalna x jest *dzielnikiem* liczby naturalnej y (albo liczba y jest *podzielna* przez x), jeśli $y = ux$ dla pewnej liczby naturalnej u. Piszemy wtedy $x|y$. Można więc zapisać

$$x|y \Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{N} : y = ux.$$

Relacja podzielności

- jest zwrotna – każda liczba naturalna x jest swoim dzielnikiem, bo $x = 1 \cdot x$, zatem $x|x$;
- nie jest symetryczna, bo np. $2|4$, ale nie jest prawdą, że $4|2$;
- jest antysymetryczna – jeśli $x|y$ i $y|x$, to istnieją liczby u i w takie, że $y = ux$ i $x = wy$; stąd zaś wynika równość $x = w(ux) = (wu)x$, która prowadzi do wniosku, że $wu = 1$. Ponieważ w i u są liczbami naturalnymi, to $w = u = 1$, czyli $y = 1x = x$;

- jest przechodnia – jeśli $x|y$ i $y|z$, to istnieją liczby u i w takie, że $y = ux$ i $z = wy$, stąd zaś wynika $z = w(ux) = (wu)x$, czyli $x|z$;
- nie jest spójna, bo np. $\sim 2|3$ i $\sim 3|2$.

Przykład 3.9. Niech A będzie dowolnym zbiorem niepustym i niech $X = 2^A$ (zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A). Elementy zbioru X są podzbiorami zbioru A. Podzbiór x pozostaje z podzbiorem y w relacji *inkluzji* (albo *zawierania*), jeśli $x \subset y$.

Relacja $\subset$

- jest zwrotna, bo każdy podzbiór $x \subset A$ jest swoim podzbiorem, tzn. $x \subset x$;
- nie jest symetryczna, bo np. $\varnothing \subset A$, ale $A \not\subset \varnothing$;
- jest antysymetryczna – jeśli $x \subset y$ i $y \subset x$, to $x = y$;
- jest przechodnia – jeśli $x \subset y$ i $y \subset z$, to $x \subset z$;
- nie jest spójna, pod warunkiem, że zbiór A ma przynajmniej dwa elementy – niech $x = \{a\}$, $y = \{b\}$, gdzie $a, b \in A$ takie, że $a \neq b$; wtedy $x \not\subset y$ i $y \not\subset x$.

Analizując wymienione w Definicji 3.5 własności możemy zauważyć różne między nimi zależności. Niektóre z nich są wymienione w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 3.10. *Niech ρ będzie dowolną relacją na niepustym zbiorze X.*

(1) *ρ jest zwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy $\nabla_X \subset \rho$.*
(2) *Jeśli ρ jest spójna, to ρ jest zwrotna.*
(3) *Jeśli ρ jest symetryczna i spójna, to $\rho = \Delta_X$.*
(4) *Relacja ρ jest symetryczna i antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho = \nabla_X$.*

Szczególną rolę w naszych dalszych rozważaniach będą odgrywały dwa typy relacji:

- relacje typu równoważności
- relacje porządku.

1.1. Relacje typu równoważności.

Rozpocznijmy od następującej definicji.

Definicja 3.11. Relację $\rho \subset X^2$ nazywamy *relacją typu równoważności*, jeśli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Przykład 3.12. Spośród relacji wymienionych w Przykładach 3.2 i 3.4 relacjami typu równoważności są: ∇_X, Δ_X, $=$.

Przykład 3.13. (Kongruencje) Niech $X = \mathbb{Z}$ (zbiór liczb całkowitych). Ustalmy liczbę $p \in \mathbb{N}$ taką, że $p > 2$. Mówimy, że liczby całkowite x i y przystają modulo p, jeśli różnica $x - y$ jest podzielna przez p. Zapisujemy to

$$x \equiv y \pmod{p}.$$

Tak określoną relację nazywa się czasami relacją *kongruencji*. Symbolicznie jej definicję możemy zapisać następująco

$$x \equiv y \pmod{p} \quad \Leftrightarrow \quad p|x - y$$

albo

$$x \equiv y \pmod{p} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : x - y = kp. \tag{3.1}$$

Wykażemy, że relacja ta jest relacją typu równoważności.

- Zwrotność. Dla każdego $x \in \mathbb{Z}$ prawdziwe są równości
$$x - x = 0 = 0 \cdot p$$
zatem $x \equiv x \pmod{p}$.
- Symetryczność. Jeśli $x \equiv y \pmod{p}$, to $x - y = kp$ dla pewnej liczby $k \in \mathbb{Z}$. Stąd zaś wynika, że
$$y - x = -(x - y) = -kp = (-k) \cdot p.$$
Z warunku (3.1) wynika więc, że $y \equiv x \pmod{p}$.
- Przechodniość. Załóżmy, że $x \equiv y \pmod{p}$ i $y \equiv z \pmod{p}$. Z warunku (3.1) wynika więc, że istnieją liczby $k, l \in \mathbb{Z}$ takie, że
$$x - y = kp \qquad \text{i} \qquad y - z = lp.$$
Stąd otrzymujemy
$$x - z = x - y + y - z = (x - y) + (y - z) = kp + lp = (k + l)p.$$
Ponowne zastosowanie warunku (3.1) prowadzi więc do wniosku, że $x \equiv z \pmod{p}$.

Przykład 3.14. Niech X będzie zbiorem wszystkich ludzi mieszkających na Ziemi. Na zbiorze tym definiujemy następującą relację ρ. Niech $x, y \in X$, a więc x i y są dwojgiem ludzi. Określamy

$$x \rho y \;\Leftrightarrow\; \text{gdy } x \text{ urodził się w tym samym roku kalendarzowym co } y.$$

Zbadajmy jej własności:

- Zwrotność. Ta własność jest oczywista.

- Symetryczność. To też jest oczywiste. Jeśli x urodził się w tym samym roku co y, to jasne, że y urodził się w tym samym roku co x.
- Przechodniość. Jeśli x urodził się w tym samym roku co y i y urodził się w tym samym roku co z, to znaczy, że wszystcy urodzili się w tym samym roku. W szczególności prawdą jest, że x urodził się w tym samym roku co z.

Zatem ρ jest relacją równoważności.

Przykład 3.15. Niech $X = \mathbb{R}$. Relacja ρ zdefiniowana jest następująco:

$$x\rho y \Leftrightarrow |x - y| \leq 1.$$

Sprawdźmy, czy relacja ta jest relacją równoważności:

- Zwrotność. Oczywiście $|x - x| = 0 \leq 1$, zatem $x\rho x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
- Symetryczność. To też jest oczywiste. Jeśli x urodził się w tym samym roku co y, to jasne, że y urodził się w tym samym roku co x.
- Przechodniość. Relacja ta **nie jest** przechodnia. Wynika to z faktu, że np. $0\rho 1$ i $1\rho 2$, ale $\sim(0\rho 2)$.

Rozważana relacja nie jest zatem relacją równoważności.

Definicja 3.16. Niech $\rho \subset X \times X$ będzie relacją typu równoważności. Jeśli $x \in X$, to *klasą abstrakcji* elementu x nazywamy podzbiór

$$[x]_\rho = \{y \in X : y\rho x\} \subset X. \tag{3.2}$$

Twierdzenie 3.17. *Jeśli ρ jest relacją typu równoważności, to klasy abstrakcji relacji ρ mają następujące własności:*

(1) $\forall x \in X : x \in [x]_\rho$,
(2) $\forall x, y \in X : [x]_\rho = [y]_\rho \vee [x]_\rho \cap [y]_\rho = \emptyset$,
(3) $\bigcup_{x \in X} [x]_\rho = X$.

Dowód. (1) Wynika to z tego, że $x\rho x$ (zwrotność!). Każda klasa abstrakcji jest zatem niepustym podzbiorem zbioru X.

(2) Należy wykazać, że jeśli $[x]_\rho \cap [y]_\rho \neq \emptyset$, to $[x]_\rho = [y]_\rho$. Załóżmy zatem, że część wspólna klas abstrakcji elementów x i y jest niepusta. Oznacza to, że istnieje element

$z \in [x]_\rho \cap [y]_\rho$. Element z należy zatem jednocześnie do obu klas abstrakcji, więc z określenia (3.2) wynika, że jednocześnie

(3.3) $$z\rho x$$

(3.4) $$z\rho y$$

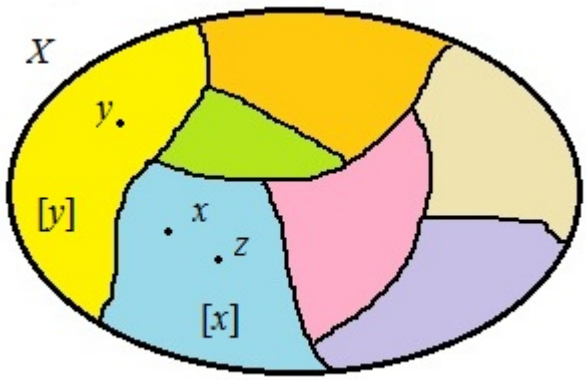
Wykażemy, że $[x]_\rho \subset [y]_\rho$. Ponieważ relacja ρ jest symetryczna, to z (3.3) wynika, że $x\rho z$. Teraz skorzystamy z przechodniości: z tego, że $x\rho z$ i $z\rho y$ (patrz (3.4)) wynika

(3.5) $$x\rho y.$$

Niech teraz $w \in [x]_\rho$. Z określenia (3.2) wynika, że $w\rho x$. Uwzględniając (3.5) i przechodniość relacji ρ wnioskujemy, że $w\rho y$. Oznacza to, że $w \in [y]_\rho$. Wykazaliśmy więc, że każdy element w klasy abstrakcji $[x]_\rho$ należy także do klasy $[y]_\rho$, więc $[x]_\rho \subset [y]_\rho$. Podobnie wykazujemy, że $[y]_\rho \subset [x]_\rho$. Zawierania $[x]_\rho \subset [y]_\rho$ i $[y]_\rho \subset [x]_\rho$ implikują równość $[x]_\rho = [y]_\rho$.

(3) Wynika to bezpośrednio z punktu (1). □

Powyższe twierdzenie należy interpretować w ten sposób, że każda relacja typu równoważności dzieli cały zbiór X na rozłączne "kawałki", którymi są właśnie klasy abstrakcji.



Na powyższym rysunku zilustrowaliśmy fakt, że klasa abstrakcji elementu x składa się ze wszystkich elementów, które pozostają w relacji ρ z elementem x: mamy tutaj zarówno $x\rho x$ jak i $z\rho x$. Ponieważ y nie jest w relacji z elementem x, to klasy abstrakcji $[x]_\rho$ i $[y]_\rho$ są rozłączne.

Definicja 3.18. Zbiór wszystkich klas abstrakcji względem relacji typu równoważności ρ nazywamy *zbiorem ilorazowym* zbioru X względem relacji ρ i oznaczamy X/ρ.

Przykład 3.19. Rozważmy relację równoważności ∇_X z Przykładu 3.12. Z określenia tej relacji wynika, że x pozostaje w tej relacji z elementem y wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$. Oznacza to, że klasa abstrakcji każdego elementu x jest jednoelementowa i składa się właśnie z tego jedynego elementu x

$$[x]_{\nabla_X} = \{x\}, \qquad x \in X.$$

Ponieważ wszystkie klasy abstrakcji relacji ∇_X są jednoelementowe, to zbiór ilorazowy X/∇_X można utożsamić ze zbiorem X.

Przykład 3.20. Rozważamy teraz relację Δ_X z Przykładu 3.12. Z określenia tej relacji wynika, że każde dwa elementy zbioru X pozostają ze sobą w tej relacji. Klasa abstrakcji każdego elementu składa się więc ze wszystkich elementów zbioru X, co oznacza, że jest tylko jedna klasa abstrakcji. Zbiór X/Δ_X jest więc jednoelementowy.

Przykład 3.21. Rozważmy relację kongruencji zdefiniowaną w Przykładzie 3.13.

Niech np. $p = 2$. Łatwo zauważyć, że dwie liczby całkowite x i y pozostają ze sobą w relacji wtedy i tylko wtedy, gdy obie te liczby są parzyste lub gdy obie są nieparzyste. Wynikają stąd następujące równości

$$\begin{aligned} \ldots = [-4] = [-2] = [0] = [2] = [4] = \ldots &= \text{zbiór liczb parzystych} \\ \ldots = [-3] = [-1] = [1] = [3] = [5] = \ldots &= \text{zbiór liczb nieparzystych} \end{aligned}$$

Jak widać, zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ rozpadł się na dwie klasy abstrakcji:

$$\mathbb{Z}/\rho = \{[0], [1]\} = \{\mathbb{P}, \mathbb{Z} \setminus \mathbb{P}\}$$

gdzie przez $\mathbb{P}$ oznaczyliśmy zbiór liczb parzystych.

Jeśli $p = 3$, to mamy następujące równości:

$$\begin{aligned} \ldots = [-6] = [-3] = [0] = [3] = [6] = \ldots &= \{3k : k \in \mathbb{Z}\} \\ \ldots = [-5] = [-2] = [1] = [4] = [7] = \ldots &= \{3k+1 : k \in \mathbb{Z}\} \\ \ldots = [-4] = [-1] = [2] = [5] = [8] = \ldots &= \{3k+2 : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Zbiór liczb całkowitych, które są postaci $3k$ dla $k \in \mathbb{Z}$, czyli zbiór liczb podzielnych przez 3 oznacza się czasami $3\mathbb{Z}$. Podobnie zbiór liczb postaci $3k+1$ oznacza się symbolem $3\mathbb{Z}+1$, a zbiór liczb postaci $3k+2$ symbolem $3\mathbb{Z}+2$. Zbiór ilorazowy względem relacji kongruencji, gdy $p = 3$, wygląda więc następująco

$$\mathbb{Z}/\rho = \{3\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}+1, 3\mathbb{Z}+2\}.$$

Powyższe klasy abstrakcji można scharakteryzować w jeszcze jeden sposób: $3\mathbb{Z}$ to liczby całkowite, które są podzielne przez 3, $3\mathbb{Z}+1$ to liczby, które dają resztę 1 przy dzieleniu przez 3, zaś $3\mathbb{Z}+2$ składa się z liczb, które dają resztę 2.

Dla dowolnej liczby naturalnej p i dowolnej liczby $r \in \{0,1,2,\ldots,p-1\}$ oznaczamy przez $p\mathbb{Z}+r$ zbiór liczb calkowitych postaci $pk+r$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, czy zbiór liczb, które przy dzieleniu przez p dają resztę r. Zbiór klas abstrakcji zbioru liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ względem relacji przystawania modulo p składa się z p elementów:

$$\mathbb{Z}/\rho = \{p\mathbb{Z}, p\mathbb{Z}+1, p\mathbb{Z}+2, \ldots, p\mathbb{Z}+p-1\}$$

Uwaga 3.22. Rozważanie klas abstrakcji można utożsamiać z procesem "sklejania" pewnych grup elementów zbioru X w jeden element.

Na przykład relacja przystawania modulo 2 "skleja" wszystkie liczby parzyste w jeden element i wszystkie liczby nieparzyste w drugi element.

2. Funkcje

Intuicyjnie funkcja oznacza pewną zależność między dwiema wielkościami lub cechami. Jeśli mówimy np. że wynik egzaminu jest funkcją czasu poświęconego na naukę, to mamy na myśli, że wynik egzaminu *zależy* od tego, ile czasu poświęcimy na naukę przed egzaminem.

2.1. Definicja funkcji.

W matematyce przyjmujemy następującą definicję.

Definicja 3.23. Niech X i Y będą dowolnymi zbiorami. Funkcją działającą ze zbioru X w zbiór Y nazywamy dowolny podzbiór $f \subset X \times Y$ (patrz Definicja 2.3) spełniający następujące dwa warunki:

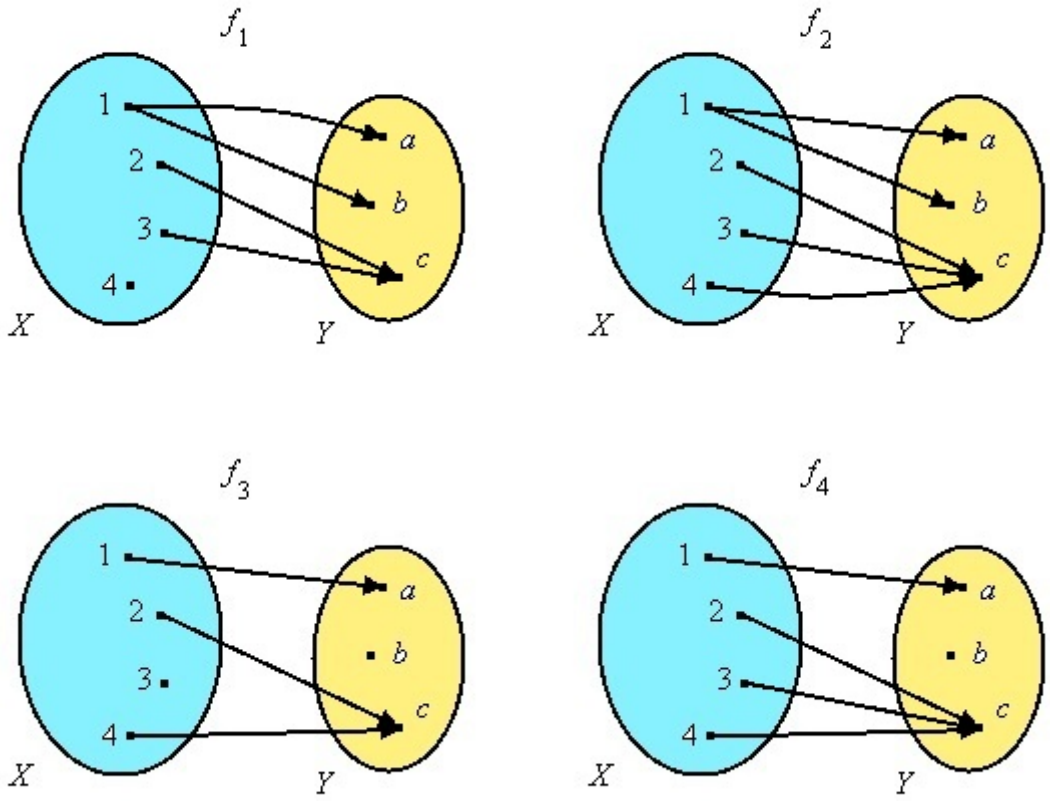
(i) $\forall x \in X\ \exists y \in Y : (x,y) \in f$.
Dla każdego $x \in X$ *istnieje element* $y \in Y$ *taki, że* $(x,y) \in f$

(ii) $\forall x \in X\ \forall y_1, y_2 \in Y : ((x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f) \Rightarrow y_1 = y_2$
Dla każdego $x \in X$ *istnieje co najwyżej jeden element* $y \in Y$ *taki, że* $(x,y) \in f$.

Przykład 3.24. Niech $X = \{1, 2, 3, 4\}$ i $Y = \{a, b, c\}$. Rozważmy następujące podzbiory iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$:

$$\begin{aligned} f_1 &= \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, c)\} \\ f_2 &= \{(1, b), (1, b), (2, c), (3, c), (4, c)\} \\ f_3 &= \{(1, a), (2, c), (4, c)\} \\ f_4 &= \{(1, a), (2, c), (3, c), (4, c)\} \end{aligned}$$

Podzbiory możemy graficznie zilustrować w następujący sposób



Spójrzmy dla przykładu na rysunek ilustrujący podzbiór f_1. Każdy jego element będący parą składającą się z elementu zbioru X i elementu zbioru Y reprezentowany jest przez strzałkę wychodzącą z odpowiedniego elementu zbioru X do odpowiedniego elemenetu zbioru Y. Para $(1, a)$ reprezentowana jest przez strzałkę wychodzącą z 1 i dochodzącą so a, para $(1, b)$ to strzałka wychodząca z 1 i dochodząca do b, itd. Przy takiej interpretacji warunek (i) w Definicji 3.23 można sformułować następująco:

(i') *Z każdego punktu zbioru* X *wychodzi przynajmniej jedna strzałka.*

Łatwo zauważyć, że tylko zbiory f_2 i f_4 spełniają ten warunek.
Z kolei warunek (ii) w Definicji 3.23 formułujemy następująco:

(ii') *Z każdego punktu zbioru* X *wychodzi co najwyżej jedna strzałka.*

Ten warunek spełniają tylko zbiory f_3 i f_4.
Z powyższych czterech zbiorów tylko f_4 jest zatem funkcją.

Uwaga 3.25. Zauważmy, że jednoczesne spełnienie obu warunków (i') i (ii') równoważne jest następującemu warunkowi:
Z każdego punktu zbioru X *wychodzi dokładnie jedna strzałka.*

Wniosek 3.26. *Podzbiór* $f \subset X \times Y$ *jest funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego elementu* $x \in X$ *istnieje* dokładnie *jeden element* $y \in Y$ *taki, że* $(x, y) \in f$*, tzn.*

$$\forall\, x\ \exists!\, y:\ (x, y) \in f$$

2.2. Dziedzina, przeciwdziedzina, argumenty i wartości. Jeśli $f \subset X \times Y$ jest funkcją, to zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji f, zaś zbiór Y – jej *przeciwdziedziną*. Kierunek działania funkcji ze zbioru X w zbiór Y zaznaczamy symbolicznie

$$f : X \to Y$$

Elementy dziedziny X nazywamy *argumentami* funkcji f. Z Wniosku 3.26 wynika, że dla każdego argumentu x istnieje dokładnie jeden element $y \in Y$ taki, że $(x, y) \in f$. Element ten oznaczamy $f(x)$ i nazywamy *wartością* funkcji f w punkcie x, co zapisujemy krótko

$$y = f(x)$$

Czasami mówimy, że funkcja f *przyporządkowuje* element y argumentowi x, lub że *odwzorowuje* argument x na element y.

Dla funkcji f_4 z Przykładu 3.24 możemy więc zapisać:

$$f_4(1) = a, \quad f_4(2) = c, \quad f_4(3) = c, \quad f_4(4) = c$$

Definicja 3.27. Jeśli przeciwdziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, tzn.

$$f : X \to \mathbb{R}$$

dla pewnego zbioru X, to mówimy, że f jest *funkcją rzeczywistą*.

Przykład 3.28. Niech X będzie zbiorem studentów pierwszego roku fizyki medycznej. Określamy funkcję $f : X \to \mathbb{R}$ warunkiem: dla dowolnego studenta $x \in X$ niech $f(x)$ będzie liczbą punktów uzyskanych na egzaminie maturalnym z matematyki. Wtedy f jest funkcją liczbową, której dziedziną jest wspomniany zbiór studentów.

Najczęściej rozpatrywanym przez nas przypadkiem będzie sytuacja, gdy f jest funkcją liczbową określoną na pewnym podzbiorze zbioru liczb rzeczywistych, tzn. $X \subset \mathbb{R}$. Szerzej o tym przypadku będziemy mówić w Wykładzie 5. Teraz podamy kilka przykładów.

Przykład 3.29. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, której wartości dla każdego $n \in \mathbb{N}$ określamy wzorem[4]

$$f(n) = 2n$$

Mamy wtedy

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 6, \quad f(4) = 8, \quad \dots$$

tzn. każdej liczbie naturalnej n jest przyporządkowana n-ta liczba parzysta.

Przykład 3.30. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = ax + b, \qquad x \in \mathbb{R},$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ są pewnymi współczynnikami rzeczywistymi. Wtedy f jest dobrze nam znaną ze szkoły funkcją liniową.

Przykład 3.31. Niech $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Wtedy f jest funkcją homograficzną.

2.3. Injekcje, surjekcje i bijekcje. Przypomnijmy teraz pewne specjalne typy funkcji, które będą nas w dalszym ciągu interesować

[4]Oczywiście nie ma powodu, dla którego zawsze należałoby oznaczać argumenty funkcji symbolem x. Tutaj zamiast x używamy litery n.

2.3.1. *Funkcje różnowartościowe (injekcje).* Rozpocznijmy od następującego przykładu

Przykład 3.32. Niech X oznacza zbiór wszystkich obywateli polskich, zaś zbiór Y oznacza zbiór, którego elementami są ciągi złożone z jedenastu cyfr. Rozważmy funkcję $f : X \to Y$ określoną w ten sposób, że $f(x)$ oznacza numer PESEL obywatela x. Numery PESEL są tak przydzielane, by każdy miał swój unikalny numer, który nie powtórzy się u innej osoby. Inaczej, dwaj różni obywatele x_1 i x_2 mają różne numery PESEL, co oznacza, że $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definicja 3.33. Mówimy, że $f : X \to Y$ jest funkcją *różnowartościową* (lub *injekcją*), jeśli

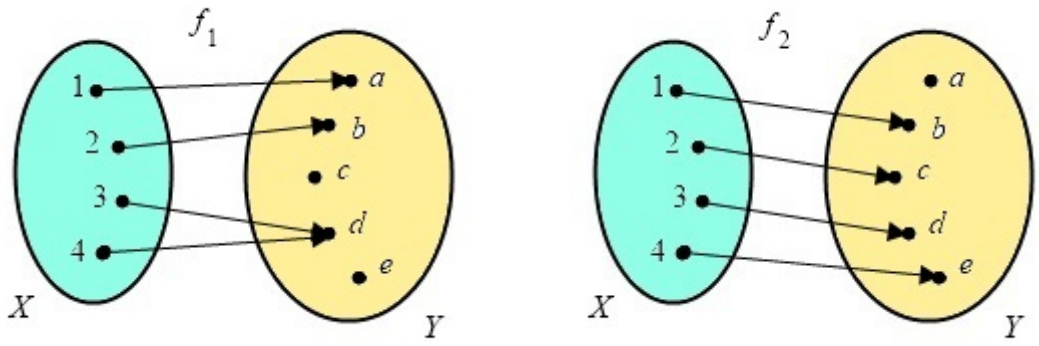
$$\forall\, x_1, x_2 \in X :\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2), \tag{3.6}$$

tzn. każdym dwóm *różnym* argumentom są przyporządkowane dwie *różne* wartości.

Uwaga 3.34. Warunek (3.6) można równoważnie sformułować następująco:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X :\ f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2. \tag{3.7}$$

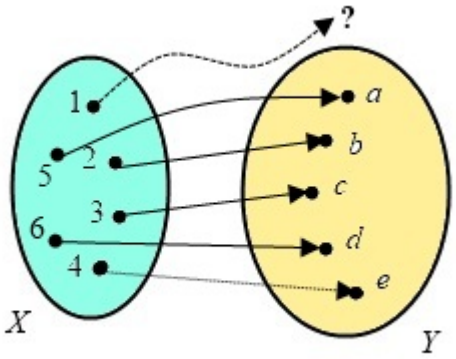
Przykład 3.35. Rozważmy funkcje reprezentowane przez diagramy rysunkowe tak jak w Przykładzie 3.24



Łatwo zauważyć, że f_1 nie jest funkcją różnowartościową, bo $f_1(3) = f_1(4)$. Z kolei funkcja f_2 jest różnowartościowa.

Funkcja jest różnowartościowa, jeśli do każdego punktu zbioru Y dochodzi co najwyżej jedna strzałka.

Analizując takie rysunkowe diagramy możemy zauważyć, że między niektórymi zbiorami nie da się określić żadnej funkcji różnowartościowej.



Ponieważ zbiór X ma więcej elementów niż zbiór Y, to ze zbioru X wychodzi za dużo strzałek i warunek opisany w ramce nie może być spełniony.

Przykład 3.36. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie $a \neq 0$. Wykażemy, że funkcja f jest różnowartościowa. Posłużymy się warunkiem (3.7). Załóżmy, że $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ są takie, że $f(x_1) = f(x_2)$. Oznacza to, że

$$ax_1 + b = ax_2 + b.$$

Równość ta jest równoważna równości

$$ax_1 = ax_2$$

czyli

$$a(x_1 - x_2) = 0.$$

Ponieważ założyliśmy, że $a \neq 0$, to ostatnia równość prowadzi do wniosku, że $x_1 - x_2 = 0$, czyli $x_1 = x_2$.

Przykład 3.37. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = x^2$. Łatwo zauważyć, że funkcja ta nie jest różnowartościowa, bo np.

$$f(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f(1).$$

Przykład 3.38. Rozważmy funkcję $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = x^2$. Mimo, że funkcja ta jest zadana tym samym wzorem co funkcja z poprzedniego przykładu, to

w przeciwieństwie do tamtej jest ona różnowartościowa. Uzasadnijmy to posługując się warunkiem (3.6). Niech $x_1, x_2 \geq 0$ i $x_1 \neq x_2$. Zauważmy, że w tym wypadku musi być $x_1 > 0$ lub $x_2 > 0$, co prowadzi do wniosku, że $x_1 + x_2 > 0$, czyli

$$x_1 + x_2 \neq 0.$$

Ponieważ założyliśmy, że $x_1 \neq x_2$, to oczywiście mamy również

$$x_1 - x_2 \neq 0.$$

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

otrzymujemy

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \neq 0.$$

Ostatnia nierówność wynika z faktu, że iloczyn dwóch liczb różnych od zera jest też niezerowy.

Zauważmy więc, że własności funkcji liczbowej nie zależą tylko od jej wzoru, ale również od tego, jaka jest jej dziedzina i przeciwdziedzina.

2.3.2. *Funkcje "na" (surjekcje).* Podobnie jak poprzednio rozpocznijmy od przykładu.

Przykład 3.39. Niech $X = \mathbb{Z}$ (zbiór liczb całkowitych), zaś $Y = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ dla pewnej liczby naturalnej p. Niech $f : X \to Y$ będzie określona następująco:

$$f(x) = \text{reszta z dzielenia liczby } x \text{ przez } p.$$

Zauważmy, że każdy element przeciwdziedziny Y jest wartością funkcji f dla przynajmniej jednego argumentu. Istotnie, dla każdego $k \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ mamy równość $f(k) = k$.

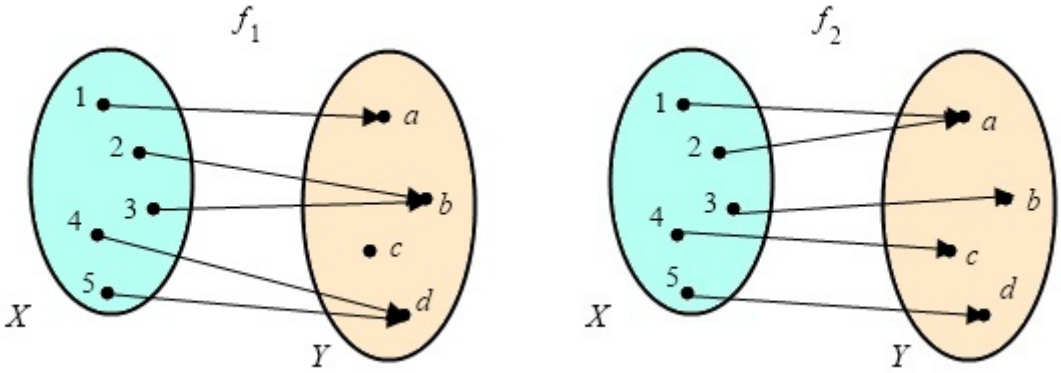
Definicja 3.40. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy *funkcją "na"* (albo *surjekcją*), jeśli

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X : \; y = f(x) \tag{3.8}$$

tzn. każdy element zbioru Y jest wartością dla pewnego argumentu pochodzącego ze zbioru X.

Po pierwsze, prześledźmy, jak surjekcje wyglądają na diagramach rysunkowych.

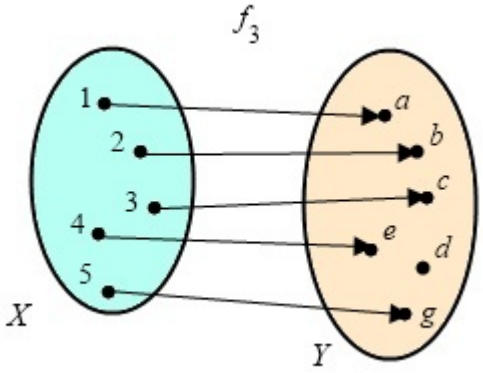
Przykład 3.41. Rozważmy funkcje reprezentowane przez diagramy rysunkowe tak jak w Przykładzie 3.24



Funkcja f_1 nie jest funkcją "na", bo element c ze zbioru Y nie jest jej wartością dla żadnego argumentu pochodzącego ze ze zbioru X. Po prostu, nie dochodzi do niego żadna strzałka. Z kolei funkcja f_2 jest surjekcją, bo do każdy punkt jest wartością funkcji f_2 dla przynajmniej jednego argumentu pochodzącego ze zbioru X.

Funkcja jest "na", jeśli do każdego punktu zbioru Y dochodzi co najmniej jedna strzałka.

Analizując rysunkowe diagramy również tutaj możemy zauważyć, że między niektórymi zbiorami nie da się określić żadnej surjekcji.



Ponieważ zbiór X ma mniej elementów niż zbiór Y, to ze zbioru X wychodzi za mało strzałek i warunek opisany w ramce nie może być spełniony.

Przykład 3.42. Tak jak w Przykładzie 3.36 rozważmy funkcję liniową $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie $a \neq 0$. Wykażemy, że funkcja ta spełnia warunek (3.8). Niech y będzie dowolnym elementem przeciwdziedziny $\mathbb{R}$. Musimy pokazać, że

istnieje taki element $x \in \mathbb{R}$, że $f(x) = y$, czy spełnione jest równanie

$$ax + b = y.$$

Jest to bardzo łatwe równanie liniowe, które dzięki temu, że $a \neq 0$, ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$x = \frac{y - b}{a}.$$

Możemy teraz sprawdzić, że

$$f(x) = f\left(\frac{y - b}{a}\right) = a \cdot \frac{y - b}{a} + b = y - b + b = y,$$

czyli warunek (3.8) jest faktycznie spełniony

Przykład 3.43. Podobnie jak w Przykładzie 3.37 rozważamy funkcję kwadratową $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = x^2$. Łatwo zauważamy, że nie jest to surjekcja, bo liczba $y = -1$ nie jest wartością tej funkcji dla żadnego $x \in \mathbb{R}$. Nie bowiem takiej liczby rzeczywistej x, która spełniałaby równanie $x^2 = -1$.

Przykład 3.44. Zmodyfikujemy teraz funkcję opisaną w poprzednim przykładzie. Niech teraz funkcja będzie określona jako $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ze wzorem takim samym jak poprzednio, czyli $f(x) = x^2$. Teraz jest to surjekcja. Istotnie, jeśli y jest elementem przeciwdziedziny, to $y \geq 0$. Dla każdej takiej liczby równanie

$$x^2 = y$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie, dokładniej

$$\begin{aligned} x = 0 \qquad & \text{gdy } y = 0 \\ x = -\sqrt{y} \ \vee \ x = \sqrt{y} \quad & \text{gdy } y > 0 \end{aligned}$$

Dla każdego takiego rozwiązania mamy $f(x) = y$.

2.3.3. *Funkcje odwracalne (bijekcje).* Zilustrujmy kolejne pojęcie przykładem.

Przykład 3.45. Załóżmy, że pewna klasa składa się z 22 uczniów i X niech będzie zbiorem wszystkich uczniów w tej klasie. Niech

$$Y = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 22\} = \{1, 2, 3, \ldots, 22\}.$$

Każdemu uczniowi przyporządkowany jest jego numer w dzienniku. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją taką, że

$$f(x) = \text{numer ucznia } x \text{ w dzienniku}$$

dla każdego ucznia $x \in X$.

Zauważmy, że funkcja ta jest

- różnowartościowa, bo nie ma dwóch różnych uczniów o tym samym numerze,
- "na", bo każda liczba ze zbioru $Y = \{1, 2, \ldots, 22\}$ jest numerem pewnego ucznia w dzienniku.

Obie powyższe własności można sformułować następująco: *Każda liczba ze zbioru* Y *jest wartością funkcji* f *dla dokładnie jednego ucznia* $x \in X$.

Definicja 3.46. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy *funkcją odwracalną* (albo *funkcją wzajemnie jednoznaczną* lub *bijekcją*), jeśli

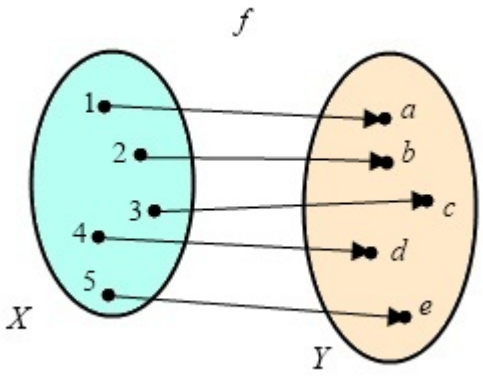
$$\forall y \in Y \; \exists! \, x \in X : \; y = f(x) \tag{3.9}$$

tzn. każdy element zbioru Y jest wartością dla dokładnie jednego argumentu pochodzącego ze zbioru X.

Twierdzenie 3.47. *Funkcja* $f : X \to Y$ *jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednocześnie różnowartościowa i "na".*

Przykład 3.48. Analizując Przykłady 3.35 i 3.41 oraz biorąc pod uwagę powyższe twierdzenie dedukujemy następującą regułę dla diagramów przedstawijących bijekcje

Funkcja jest bijekcją, jeśli do każdego punktu zbioru Y dochodzi dokładnie jedna strzałka.



Z powyższego przykładu wynika następujący wniosek.

Wniosek 3.49. *Jeśli X i Y są zbiorami skończonymi, to istnieje bijekcja działająca między tymi zbiorami wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory te mają tyle samo elementów.*

ROZDZIAŁ 4

Ciągi

1. Zbiór liczb naturalnych

Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest pierwszym zbiorem liczbowym, jaki dziecko poznaje w trakcie swojego poznawania i przyswajania świata. W związku z tym liczby naturalne $1, 2, 3$, itd. znamy odkąd sięgamy pamięcią i wydaje się, że wszystko, co z tymi liczbami związane jest oczywiste i nie wymaga specjalnego definiowania. Liczby służą nam do liczenia, posługujemy się nimi w życiu codziennym i dotychczas intuicja wystarczała, aby zrozumieć i wysłowić wszystkie własności zbioru $\mathbb{N}$. Zauważmy, że sama nazwa tych liczb wskazuje, że wszystko jest tutaj oczywiste i łatwe.

Tymczasem, po chwili refleksji dochodzimy do wniosku, że właściwie trudno jest powiedzieć, co to są tak naprawdę liczby naturalne. Wiedząc, co to są liczby naturalne, potrafimy opisać zbiór całkowitych $\mathbb{Z}$, potem zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, by na końcu opisać zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Widząc problem z podaniem ścisłej definicji zbioru liczb naturalnych, Leopold Kronecker, matematyk żyjący w XIX wieku wypowiedział słynne stwierdzenie: *Liczby naturalne stworzył dobry Bóg. Reszta jest dziełem człowieka.*

Ścisłe definicje matematyczne zbioru liczb naturalnych powstały dopiero w pierwszej połowie XX wieku za sprawą m.in. Giuseppe Peano i Johna von Neumanna. Nie będziemy tutaj wdawali się w szczegóły tych definicji. Omówimy tylko niektóre ważne dla nas własności zbioru $\mathbb{N}$. Będziemy potrzebowali dodatkowych wiadomości dotyczących relacji.

1.1. Relacje porządku. Pojęcie relacji zostało zdefiniowane w Rozdziale 3 (patrz Definicja 3.1). W Definicji 3.5 podaliśmy definicje podstawowych typów relacji: zwrotnych, symetrycznych, antysymetrycznych, przechodnich i spójnych.

Definicja 4.1. Niech X będzie dowolnym zbiorem, a $\rho \subset X \times X$ niech będzie relacją. Mówimy, że ρ jest *relacją porządku*, jeśli jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna.

Jeśli ρ jest dodatkowo relacją spójną, to mówimy, że ρ jest *porządkiem liniowym*. Jeśli relacja porządku nie jest spójna, to nazywamy ją *porządkiem częściowym*.

Przykład 4.2. Niech $X = \mathbb{N}$. Niech ρ będzie relacją podzielności $|$ opisaną w Przykładzie 3.8. W przykładzie tym wykazaliśmy, że relacja ta jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna, zatem jest relacją porządku. Ponieważ relacja ta nie jest spójna, to jest to porządek częściowy.

Przykład 4.3. Niech A będzie zbiorem niepustym i niech $X = 2^A$. Rozważamy relację inkluzji opisaną w Przykładzie 3.9. W przykładzie tym wykazaliśmy, że relacja ta jest również częściowym porządkiem.

Przykład 4.4. W Przykładzie 3.7 przeanalizowaliśmy własności relacji $\leq$, $<$, $\neq$ i $=$ określonych na zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Tylko relacja $\leq$ jest relacją porządku, w dodatku jest to porządek liniowy.

Oczywiście jest sens rozważać relację $\leq$ dla dowolnego podzbioru $X \subset \mathbb{R}$ i w dalszym ciągu będzie to liniowy porządek.

Z własności relacji porządku wynika, że jeśli $x\rho y$ dla różnych x i y, to warunek $y\rho x$ nie zachodzi. Z tego względu mówimy, że element x poprzedza y, albo y następuje po x. Z tego też względu często taką ogólną relację porządku oznaczamy symbolem $\preceq$ zamiast ρ.

Niech $\preceq$ będzie relacją porzadku na pewnym zbiorze X i niech $A \subset X$ będzie niepustym podzbiorem.

Definicja 4.5. Mówimy, że element $x_m \in X$ jest *elementem najmniejszym* zbioru A, jeśli

(i) $x_m \in A$,

(ii) $\forall x \in A : x_m \preceq x$

Innymi słowy, element najmniejszy zbioru A to taki element zbioru A, który poprzedza wszystkie elementy tego zbioru.

Analogicznie definiujemy *element największy* zbioru A. Jest to taki element $x_M \in X$, że

(i) $x_M \in A$,

(ii) $\forall x \in A : x \preceq x_M$

Jest to więc taki element zbioru A, który następuje po każdym elemencie tego zbioru.

Twierdzenie 4.6. *Jeśli zbiór A ma element najmniejszy, to jest on jednoznacznie wyznaczony. Dokładniej, jeśli elementy x_m i x'_m są elementami najmniejszymi zbioru A, to $x_m = x'_m$.*

Analogiczne stwiedzenie jest również prawdziwe dla elementów największych.

Dowód. Z faktu, że x_m i x'_m są elementami najmniejszymi zbioru A, wynika, że $x_m \in A$ i $x'_m \in A$ (warunek (i) w Definicji 4.5). Zatem, z warunku (ii) wynika $x_m \preceq x'_m$ (bo x_m jest najmniejszy) i $x'_m \preceq x_m$ (bo x'_m jest najmniejszy). Ponieważ $\preceq$ jest relacją antysymetryczną, wnioskujemy, że $x_m = x'_m$. □

Motywując się powyższym twierdzeniem, jeśli A ma element najmniejszy, to oznaczamy go symbolem $\min A$. Analogicznie element największy zbioru A oznaczamy $\max A$.

Przykład 4.7. Rozważmy zbiór $\mathbb{N}$ z relacją podzielności $|$. Rozważmy następujące podzbiory zbioru liczb naturalnych:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{2, 4, 6, 8, 12, 24\} \\ A_2 &= \{3, 6, 12, 24, 48\} \\ A_3 &= \{2, 4, 6\} \\ A_4 &= \{3, 5\} \end{aligned}$$

Mamy tutaj następujące równości:

$$\min A_1 = 2, \qquad \max A_1 = 24.$$

Istotnie, zarówno 2 jak i 24 są elementami zbioru A_1. Wszystkie elementy zbioru A_1 są parzyste, zatem 2 jest dzielnikiem każdego elementu tego zbioru. Podobnie zauważamy, że każdy element zbioru A_1 jest dzielnikiem liczby 24.

W przypadku zbioru A_2 mamy:

$$\min A_2 = 3, \qquad \max A_2 = 48.$$

Uzasadnienie jest tu podobne jak w przypadku zbioru A_2.

Łatwo zauważyć, że

$$\min A_3 = 2,$$

bo 2 jest dzielnikiem każdego elementu zbioru A_3. Zbiór A_3 nie ma jednak elementu największego. Żaden bowiem z jego trzech elementów nie ma tej własności, że jest wielokrotnością wszystkich elementów zbioru A_3.

Zbiór A_4 jest przykładem takiego zbioru, który nie ma ani elementu najmniejszego, ani elementu największego.

Przykład 4.8. Niech $X = \mathbb{R}$ i załóżmy, że zbiór $\mathbb{R}$ jest uporządkowany przez relację $\leq$. Rozważmy następujące podzbiory zbioru $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} A_1 &= [0,1] \\ A_2 &= (0,1] \\ A_3 &= [0,1) \\ A_4 &= (0,1) \\ A_5 &= \mathbb{N} \\ A_6 &= \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

Wtedy:

- $\min A_1 = 0$, $\max A_1 = 1$,
- A_2 nie ma elementu najmniejszego i $\max A_2 = 1$,
- $\min A_3 = 0$ i A_3 nie ma elementu największego,
- A_4 nie ma ani elementu najmniejszego, ani największego,
- $\min A_5 = 1$ i A_5 nie ma elementu największego,
- A_6 nie ma elementu najmniejszego i $\max A_6 = 1$.

Z powyższych przykładów wynika, że nie każdy podzbiór zbioru uporządkowanego musi mieć element najmniejszy i nie każdy podzbiór musi mieć element największy.

Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ wyróżnia się spośród innych zbiorów uporządkowanych pewną specjalną własnością, którą nazywamy *dobrym uporządkowaniem*.

Definicja 4.9. Niech $\preceq$ będzie liniowym porządkiem na zbiorze X. Mówimy, że $\preceq$ jest *dobrym porządkiem*, jeśli każdy niepusty podzbiór zbioru X ma element najmniejszy. O zbiorze X mówimy wtedy, że jest *zbiorem dobrze uporządkowanym* przez relację $\preceq$.

Kluczowym dla nas jest następujące stwierdzenie:

Zasada dobrego uporządkowania. *Zbiór liczb naturalnych jest dobrze uporządkowany przez relację* $\leq$.

Wspominaliśmy wcześniej o różnych sposobach definiowania zbioru liczb naturalnych. W niektórych ujęciach powyższe stwierdzenie jest po prostu częścią definicji. W innych ujęciach zasada dobrego uporządkowania jest wnioskiem z przyjętej definicji, a więc jest twierdzeniem.

Przykład 4.10. Zauważmy, że zbiór liczb naturalnych nie jest dobrze uporządkowany przez relację podzielności $|$. W Przykładzie 4.7 podaliśmy przykłady podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$, które nie mają elementu najmniejszego ze względu na tę relację.

Przykład 4.11. Zbiór liczb rzeczywistych nie jest dobrze uporządkowany przez relację $\leq$. Wynika to z Przykładu 4.8, w którym podaliśmy przykłady podzbiorów nie posiadających elementów najmniejszych

Przykład 4.12. Zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ nie jest dobrze uporządkowany przez relację $\leq$, bo np. cały zbiór $\mathbb{Z}$ nie ma elementu najmniejszego.

Przykład 4.13. Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb całkowitych jest zbiorem dobrze uporządkowanym przez relację $\leq$. Wynika to bezpośrednio z Definicji 4.9.

W szczególności zbiorami dobrze uporządkowanymi są:

(1) każdy podzbiór skończony,
(2) zbiór liczb parzystych,
(3) zbiór liczb podzielnych przez 3,
(4) zbiór liczb pierwszych,
(5) zbiór $\{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots\}$ składający się z kolejnych potęg liczby 2.

1.2. Zasada indukcji matematycznej. Niech $p(n)$ będzie formą zdaniową (patrz Definicja 1.15), której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych, $n \in \mathbb{N}$. Sformułujemy teraz bardzo ważne twierdzenie zwane *zasadą indukcji matematyczne*.

Twierdzenie 4.14. *Zdanie* $p(n)$ *jest prawdziwe dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy następujące dwa warunki są spełnione:*

(1) *zdanie* $p(1)$ *jest prawdziwe,*
(2) *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *prawdziwa jest implikacja* $p(n) \Rightarrow p(n+1)$.

Dowód. Wystarczy wykazać, że jeśli spełnione są warunki (1) i (2), to zdanie $p(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Reszta jest bowiem oczywista. Przeprowadzimy tzw. dowód *niewprost*. Załóżmy, że nie jest prawdą, że zdanie $p(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że dla przynajmniej jednej liczby naturalnej n zdanie $p(n)$ jest fałszywe. Niech $A \subset \mathbb{N}$, będzie zbiorem wszystkich takich liczb naturalnych n, dla których zdanie $p(n)$ jest fałszywe, tzn.

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \sim p(n)\}.$$

Z założenia niewprost wynika, że zbiór ten jest niepusty. Z zasady dobrego uporządkowania wynika więc, że zbiór A ma element najmniejszy. Niech $n_0 = \min A$. Oczywiście $p(n_0)$ jest zdaniem fałszywym. Ponieważ założyliśmy, że $p(1)$ jest zdaniem prawdziwym, $n_0 > 1$. Z faktu, że n_0 jest najmniejszym elementem zbioru A wnioskujemy, że $n_0 - 1 \notin A$, czyli zdanie $p(n_0 - 1)$ jest prawdziwe.

Rozważmy teraz implikację $p(n_0 - 1) \Rightarrow p(n_0)$. Właśnie uzasadniliśmy, że jej poprzednik $p(n_0 - 1)$ jest zdaniem prawdziwym, a następnik $p(n_0)$ jest fałszywy. Oznacza to, że implikacja jest fałszywa. Jest to jednak w sprzeczności z warunkiem opisanym w punkcie (2). Nasze założenie niewprost doprowadziło więc do sprzeczności, co oznacza, że zdanie $p(n)$ musi być prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}$. □

Powyższa zasada jest ważnym narzędziem do przeprowadzania dowodów twierdzeń o liczbach naturalnych. Jeśli chcemy wykazać, że jakieś zdanie $p(n)$ (np. równość lub nierówność) jest prawdziwe dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to wykazujemy, że spełnione są warunki (1) i (2). Wykazywanie warunku (1) nazywamy *pierwszym krokiem indukcyjnym*, zaś dowodzenie warunku (2) nazywamy *drugim krokiem indukcyjnym*.

Drugi krok indukcyjny wymaga uzasadnienia, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest implikacja $p(n) \Rightarrow p(n+1)$. Zauważmy, że gdyby zdanie $p(n)$ było fałszywe, to implikacja ta byłaby prawdziwa niezależnie od wartości logicznej zdania $p(n+1)$. Trzeba więc jedynie założyć, że zdanie $p(n)$ jest prawdziwe i wykazać, że w tym wypadku zdanie $p(n+1)$ jest również prawdziwe. Drugi krok indukcyjny składa się więc z następujących etapów:

- sformułowanie *założenia indukcyjnego* o tym, że zdanie $p(n)$ jest prawdziwe,
- sformułowanie *tezy indukcyjnej* o tym, że zdanie $p(n+1)$ jest prawdziwe,
- dowód tezy indukcyjnej (zwykle z wykorzystaniem założenia indukcyjnego).

2. Ciągi i ich własności

Ważnym narzędziem przydatnym w analizie są ciągi.

2.1. Definicja ciągu. Zacznijmy od przypomnienia czym są ciągi.

Definicja 4.15. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Dowolną funkcję $f : \mathbb{N} \to X$ nazywamy *ciągiem elementów zbioru X* lub krótko *ciągiem*.

Jeśli $X = \mathbb{R}$, to ciąg $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazywamy *ciągiem liczbowym*.

Z powyższej definicji wynika, że ciąg to funkcja, która każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje pewien element zbioru X. Zwykle ten element oznczamy jako x_n i nazywamy *n-tym wyrazem ciągu*. Możemy sobie teraz wyobrażać ciąg jako pewien układ elementów zbioru X, które są ponumerowane liczbami naturalnymi:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

W układzie tym wiadomo zatem, który wyraz jest pierwszy, który jest drugi, itd. W ciągu ważna jest zatem kolejność wyrazów. Ciąg o wyrazach $x_1, x_2, x_3, \ldots$ będziemy oznaczali $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lub $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ lub krótko (x_n).

W dalszym ciągu będą nas interesować jedynie ciągi liczbowe. Jeśli chcemy opisać taki ciąg, możemy to zrobić na kilka sposobów:

(1) wzór ogólny,
(2) rekurencja,
(3) wypisanie kilku pierwszych wyrazów.

Opisanie ciągu przez podanie jego wzoru polega na tym, że podajemy pewną formułę, w której może występować zmienna n. Po podstawieniu za nią konkretnej liczby naturalnej otrzymujemy wyraz ciągu stojący w miejscu wyznaczonym przez tą liczbę.

Przykład 4.16. Załóżmy, że ciąg (x_n) jest opisany wzorem

$$x_n = \frac{n^2}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Możemy teraz obliczyć kilka pierwszych wyrazów:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}, \\ x_2 &= \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}, \\ x_3 &= \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}, \\ x_4 &= \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}, \end{aligned}$$

itd. Jeśli z jakiegoś powodu będzie nas interesować wyraz tego ciągu stojący na miejscu nr 1034, to po prostu korzystamy ze wzoru:

$$x_{1034} = \frac{1034^2}{1034+1} = \frac{1069156}{1035}.$$

Definicja rekurencyjna polega na tym, że pierwszy wyraz (lub kilka pierwszych wyrazów), a następnie przepis (zwykle wyrażony wzorem), który informuje jak każdy wyraz (oczywiście oprócz pierwszego) zależy od wyrazu stojącego bezpośrednio przed nim (lub jak zależy od kilku poprzedników).

Przykład 4.17. Rozważmy ciąg zadany następującym warunkiem:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = 2a_n, \quad \text{dla } n \geq 1. \end{cases}$$

Wykorzystując powyższe określenie możemy obliczyć kolejne wyrazu ciągu:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_{1+1} = 2a_1 = 2 \cdot 1 = 2 \\ a_3 &= a_{2+1} = 2a_2 = 2 \cdot 2 = 4 \\ a_4 &= a_{3+1} = 2a_3 = 2 \cdot 4 = 8 \\ a_5 &= a_{4+1} = 2a_4 = 2 \cdot 8 = 16. \end{aligned}$$

Oczywiście zauważamy, że tak określony ciąg, to dobrze nam znany ze szkoły ciąg geometryczny o ilorazie $q = 2$.

Zauważmy jednak, że bez znajomości wzoru ogólnego definicja rekurencyjna nie pozwoliłaby nam na natychmiastowe obliczenie wyrazu o dużym numerze, np. dla $n = 1034$ jak w poprzednim przykładzie. Do obliczenia tego wyrazu potrzebny nam jest wyraz a_{1033}, do tego zaś – a_{1032}, itd. Musieliśmy zatem oblicz wszystkie poprzedzające go 1033 wyrazy.

Wypisanie kilku pierwszych wyrazów polega na tym, by podać kilka początkowych wyrazów w taki sposób, by łatwa do odgadnięcia stała się reguła wg której powstają następne wyrazy.

Przykład 4.18. Niech (x_n) będzie ciągiem opisanym następująco:

$$(1, 2, 3, 4, \ldots).$$

Oczywiście kolejnymi wyrazami takiego ciągu będą liczby $5, 6, 7, \ldots$, itd. Łatwo zauważyć, że ten ciąg można też opisać wzorem

$$a_n = n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2.2. Ciągi ograniczone. Jeśli mamy dany skończony układ liczb $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, to jest jasne, że wszystkie te liczby zawierają się w pewnym przedziale o skończonej długości. Taki przedział możemy wyznaczyć następująco. Niech a będzie najmniejszą spośród liczb $x_1, x_2, \ldots, x_N$, zaś b – największą, tj.

$$a = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}, \qquad b = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}.$$

Wtedy dla każdego $n = 1, 2, \ldots, N$ spełnione są nierówności

$$a \leq x_n \leq b,$$

co jest równoważne temu, że

$$x_n \in [a, b].$$

Jeśli ciąg jest nieskończony, to opisana wyżej własność oczywiście nie musi zachodzić. Na przykład nie ma tej własności ciąg opisany w Przykładzie 4.18. Dlatego spośród wszystkich ciągów nieskończonych wyróżniamy klasę ciągów ograniczonych.

Definicja 4.19. Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie pewnym nieskończonym ciągiem liczbowym. Mówimy ciąg ten jest *ograniczony*, jeśli istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $a \leq x_n \leq b$ dla każdej liczby naturalnej n, tj.

$$\exists\, a, b \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N}:\ a \leq x_n \leq b. \tag{4.1}$$

Łatwo wykazać następujące

Stwierdzenie 4.20. *Ciąg liczbowy (x_n) jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $C > 0$ taka, że $|x_n| \leq C$ dla każdej liczby naturalnej n, tj.*

$$\exists\, C > 0\, \forall\, n \in \mathbb{N}:\ |x_n| \leq C. \tag{4.2}$$

Przykład 4.21. Niech $x_n = (-1)^{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Łatwo zauważyć, że ciąg ten jest postaci $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$, jego kolejne wyrazy są przemian równe 1 i -1. Jasne więc, że spełniona jest nierówność

$$-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1, \qquad n \in \mathbb{N},$$

więc ciąg jest ograniczony.

Przykład 4.22. Niech $x_n = \dfrac{2n}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Zauważmy, że dla każdego n spełnione są nierówności

$$\frac{2n}{n+1} \leq \frac{2n+2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} = 2.$$

Z drugiej strony, wszystkie wyrazu ciągu (x_n) są dodatnie, więc ostatecznie możemy zapisać

$$0 \leq x_n \leq 2, \qquad n \in \mathbb{N},$$

więc ciąg jest ograniczony.

Przykład 4.23. Niech $x_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Wykażemy, że nie ma takiej liczby b, dla której nierówność $x_n \leq b$ byłaby spełniona dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zrobimy to niewprost. Załóżmy, że istnieje $b \in \mathbb{R}$ taka, że $x_n \leq b$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{n^2+1}{n+1} \leq b \tag{4.3}$$

$$n^2 + 1 \leq b(n+1)$$

$$n^2 - bn + 1 - b \leq 0. \tag{4.4}$$

Rozważmy teraz funkcję kwadratową $f(x) = x^2 - bx + 1 - b$. W zależności od parametru b zachodzi jeden z trzech poniższych przypadków:

(a) f nie ma miejsc zerowych,
(b) f ma jedno miejsce zerowe x_0,
(b) f ma dwa miejsca zerowe x_1 i x_2.

Prześledźmy teraz, jak w każdym z tych trzech przypadków wygląda zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej

$$x^2 - bx + 1 - b \leq 0. \tag{4.5}$$

W przypadku (a) zbiór rozwiązań tej nierówności jest pusty.
W przypadku (b) zbiór rozwiązań jest jednoelementowy $\{x_0\}$.
W przypadku (c) zbiór rozwiązań jest przedziałem $[x_1, x_2]$.
Łatwo zauważyć, że w każdym z tych trzech przypadków istnieje liczba naturalna n_0, która do zbioru rozwiązań nierówności (4.5) nie należy. Oznacza to jednak, że liczba n_0 nie spełnia nierówności (4.4), a więc także nie spełnia nierówności (4.3). Otzrymaliśmy sprzeczność, bo założyliśmy, że (4.3) jest spełniona dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Wynika stąd, że ciąg x_n jest nieograniczony, bo nie ma takiej liczby rzeczywistej b dla której nierówność $x_n \leq b$ byłaby spełniona dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Wprowadźmy jeszcze następującą definicję.

Definicja 4.24. Mówimy, że ciąg (x_n) jest *ograniczony z dołu*, jeśli istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$ taka, że $x_n \geq a$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, tj.

$$\exists\, a \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N}:\ x_n \geq a.$$

Analogicznie mówimy, że ciąg (x_n) jest *ograniczony z góry*, jeśli istnieje liczba $b \in \mathbb{R}$ taka, że $x_n \leq b$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, tj.

$$\exists\, b \in \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N}:\ x_n \leq b.$$

Przykład 4.25. Zauważmy, że ciąg rozważany w Przykładzie 4.23 składa się z wyrazów dodatnich, czyli $x_n \geq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem, mimo że ciąg ten jest nieograniczony, to jest ograniczony z dołu.

Przykład 4.26. Niech $x_n = \log_2 \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Po pierwsze, z tego, że $n \geq 1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, wynika

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Przypomnijmy, że jeśli $x \in (0,1]$, to $f(x) \leq 0$ gdzie funkcja f jest zdefiniowana wzorem $f(x) = \log_2 x$. Wnioskujemy stąd, że

$$\log_2 \frac{1}{n} \leq 0$$

dla wszystkich liczb naturalnych n, co oznacza, że ciąg (x_n) jest ograniczony z góry.

Wykażemy teraz, że nie ma takiej liczby rzeczywistej a, że nierówność

$$\log_2 \frac{1}{n} \geq a \tag{4.7}$$

jest spełniona dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy niewprost, że jest taka liczba a. Niech n_0 będzie jakąkolwiek liczbą większą od liczby 2^{-a}. Mamy wtedy nierówność

$$n_0 > 2^{-a},$$

z której wynika

$$\frac{1}{n_0} < 2^{a}$$

$$\log_2 \frac{1}{n_0} < a.$$

Liczba n_0 nie spełnia więc nierówności (4.7), co kłóci się z założoną własnością liczby a.

Ciąg (x_n) jest więc nieograniczony, ale jest ograniczony z góry.

Zauważmy, że prawdziwe jest niemal oczywiste

Stwierdzenie 4.27. *Ciąg jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednocześnie ograniczony z dołu i z góry.*

2.3. Ciągi monotoniczne. Rozważmy następującą definicję.

Definicja 4.28. Niech (x_n) będzie ciągiem liczbowym. Mówimy, że ciąg (x_n) jest

(a) *rosnący*, jeśli $x_{n+1} > x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
(b) *słabo rosnący* (lub *niemalejący*), jeśli $x_{n+1} \geq x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
(c) *malejący*, jeśli $x_{n+1} < x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
(d) *słabo malejący* (lub *nierosnący*), jeśli $x_{n+1} \leq x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
(e) *stały*, jeśli $x_{n+1} = x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Jeśli ciąg spełnia którykolwiek z powyższych warunków, to mówimy, że jest *monotoniczny*.

Przykład 4.29. Niech (x_n) będzie ciągiem z Przykładu 4.21, tj.

$$(x_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots).$$

Ciąg ten nie jest monotoniczny, nie spełnia bowiem żadnego z warunków wymienionych w Definicji 4.28:

(a) nie jest rosnący, bo np. nie jest spełniona nierówność $x_2 > x_1$,
(b) nie jest słabo rosnący, bo np. nie jest spełniona nierówność $x_2 \geq x_1$,
(c) nie jest malejący, bo np. nie jest spełniona nierówność $x_3 < x_2$,
(d) nie jest słabo malejący, bo np. nie jest spełniona nierówność $x_3 \leq x_2$,
(a) nie jest stały, bo np. nie jest spełniona równość $x_2 = x_1$.

Zauważmy, że w każdym z pięciu warunków w Definicji 4.28 żądamy, by odpowiednia nierówność lub równość zachodziła dla każdego n. Jeśli więc chcemy pokazać, że jakiś

warunek nie zachodzi, wystarczy pokazać, że dana nierówność lub równość nie jest spełniona dla jakiejś jednej konkretnej liczny naturalnej.

Przykład 4.30. Niech (x_n) będzie ciągiem z Przykładu 4.23, tj. $x_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykażemy, że jest to ciąg rosnący. Zauważmy, że warunek (a) z Definicji 4.28 można w sposób równoważny wysłowić następująco:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; x_{n+1} - x_n > 0. \tag{4.8}$$

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wtedy mamy

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n = \\ &= \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)+1} - \frac{n^2+1}{n+1} = \\ &= \frac{n^2+2n+2}{n+2} - \frac{n^2+1}{n+1} = \\ &= \frac{(n+1)(n^2+2n+2) - (n+2)(n^2+1)}{(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{n^3+2n^2+2n+n^2+2n+2-n^3-2n^2-n-2}{(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{n^2+3n}{(n+2)(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest oczywista, bo zarówno licznik jak i mianownik ułamka w ostatniej linii są liczbami dodatnimi. Zaznaczmy, że nierówność ta jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zatem warunek (4.8) jest spełniony, czyli ciąg jest rosnący.

Na koniec przytoczmy jeszcze w miarę oczywiste

Stwierdzenie 4.31. *Niech (x_n) będzie ciągiem liczbowym.*

(1) *Jeśli ciąg (x_n) jest rosnący, to jest słabo rosnący.*
(2) *Jeśli ciąg (x_n) jest malejący, to jest słabo malejący.*
(3) *Ciąg (x_n) jest stały wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednocześnie słabo rosnący i słabo malejący.*

3. Zbieżność ciągów

Kluczowym pojęciem analizy matematycznej jest pojęcie zbieżności i granicy. Pojęcie to obecne w rozważaniach matematycznych już od starożytności. Jednak posługiwano się nimi w sposób intuicyjny bez definicji.

Przykład 4.32. Rozważmy odcinek o jednostkowej długości. Podzielmy go na dwie równe częsci. Jeden z powstałych w ten sposób odcinków podzielmy znowu na dwie równe części. I znowu jeden z otrzymanych odcinków podzielmy na dwie równe części, itd. Długości powstałych w ten sposób odcinków są coraz mniejsze i jest intuicyjnie jasne, że te długości "dążą" do zera.

3.1. Definicja granicy ciągu. Jakkolwiek w ostatnim przykładzie wszystkie wydaje się oczywiste i jasne, to jednak potrzebujemy definicji, która pozwoli nam weryfikować nasze intuicje. Autorem poniższej definicji jest Augustin Louis Cauchy, francuski matematyk działający w pierwszej połowie XIX w.

Definicja 4.33. Niech (x_n) będzie ciągiem liczbowym. Mówimy, że liczba rzeczywista g jest *granicą* ciągu (x_n), jeśli

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall\, n > N :\ |x_n - g| < \varepsilon. \tag{4.9}$$

Piszemy wtedy $g = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Mówimy, że ciąg (x_n) jest *zbieżny*, jeśli istnieje liczba g, która jest jego granicą.

Spróbujemy tę (dosyć skomplikowaną na pierwszy rzut oka) definicję wypowiedzieć w trochę inny sposób. Zacznijmy od zdefiniowania bardzo użytecznego pojęcia.

Definicja 4.34. Niech $p(n)$ będzie formą zdaniową, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Mówimy, że warunek $p(n)$ zachodzi *dla prawie wszystkich* liczb naturalnych n, jeśli zbiór $\{n \in \mathbb{N} :\sim p(n)\}$ jest skończony, tzn. zdanie $p(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich oprócz skończenie wielu liczb naturalnych n.

Równoważnie, możemy powiedzieć, że $p(n)$ jest prawdziwe dla prawie wszystkich n, jeśli istnieje liczba naturalna N taka, że $p(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich $n > N$, tj.

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall\, n > N :\ p(n).$$

Przyjrzyjmy się teraz nierówności

$$|x_n - g| < \varepsilon$$

z warunku (4.9). Możemy ją równoważnie przekształcić w następujący sposób:

$$-\varepsilon < x_n - g < \varepsilon$$

$$g - \varepsilon < x_n < g + \varepsilon$$

Ostatnie nierówności są równoważne temu, że

$$x_n \in (g - \varepsilon, g + \varepsilon).$$

Przedziały postaci $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ nazywamy *otoczeniami* liczby g. Ostatecznie warunek (4.9) można wypowiedzieć następująco.

Liczba g jest granicą ciągu (x_n), jeśli dla każdego otoczenia $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ liczby g prawie wszystkie wyrazy ciągu należą do tego otoczenia.

Przykład 4.35. Niech $x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Jest to ciąg z Przykładu 4.32, o którym w intuicyjny sposób stwierdziliśmy, że ma granicę 0. Udowodnijmy to teraz posługując się Definicją 4.33.

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Musimy pokazać, że istnieje liczba naturalna N taka, że

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon.$$

Niech N będzie dowolną liczbą naturalną większą od liczby $1 - \log_2 \varepsilon$. Zatem dla dowolnej liczby naturalnej n takiej, że $n > N$ prawdziwa jest nierówność

$$n > 1 - \log_2 \varepsilon.$$

Przekształcając ją równoważnie otrzymujemy

$$n - 1 > -\log_2 \varepsilon$$

$$n - 1 > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$$

$$2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

Wykazaliśmy zatem z definicji, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$.

Przykład 4.36. Wykażemy, że ciąg $x_n = (-1)^{n-1}$ z Przykładu 4.21 nie jest zbieżny. W tym celu należy wykazać, że żadna liczba rzeczywista nie jest granicą tego ciągu. Wykażemy to niewprost. Przypuśćmy, że $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1} = g$ dla pewnej liczby rzeczywistej g. Niech $\varepsilon = 1$. Z warunku (4.9) wynika, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|(-1)^{n-1} - g| < 1 \quad \text{dla każdego } n > N. \tag{4.10}$$

Niech n_0 będzie dowolną liczbą nieparzystą większą niż N. Oczywiście wtedy mamy też $n_0 + 1 > N$. Ponieważ $(-1)^{n_0-1} = 1$ i $(-1)^{n_0} = -1$, to z (4.10) otrzymujemy

$$|1 - g| < 1 \qquad \text{i} \qquad |-1 - g| < 1.$$

Drugą nierówność można też zapisać w postaci $|1+g| < 1$. Z nierówności tych dostajemy

$$2 = 1 + 1 = |1 + 1| = |1 - g + g + 1| \leq |1 - g| + |g + 1| < 1 + 1 = 2$$

czyli $2 < 2$, co daje oczywistą sprzeczność.

3.2. Własności ciągów zbieżnych. Podamy teraz kilka twierdzeń dotyczących opisujących własności ciągów zbieżnych i ich granic.

Twierdzenie 4.37. *Niech (x_n) będzie ciągiem liczbowym i niech $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$. Jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = g_1$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = g_2$, to $g_1 = g_2$.*

Powyższe twierdzenie orzeka po prostu, że każdy ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.

Twierdzenie 4.38. *Jeśli ciąg jest zbieżny, to jest ograniczony.*

Warto zwrócić uwagę, że implikacja odwrotna do tej w powyższym twierdzeniu nie jest prawdziwa. Na przykład ciąg $x_n = (-1)^{n-1}$ jest ograniczony (Przykład 4.21), ale nie jest zbieżny (Przykład 4.36).

Twierdzenie 4.39. *Niech (x_n) i (y_n) będą ciągami zbieżnymi i niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy ciągi (αx_n), $(x_n + y_n)$ i $(x_n y_n)$ są też zbieżne i prawdziwe są następujące równości:*

(a) $\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n$,
(b) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$,
(c) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$.

Jeśli dodatkowo założymy, że $y_n \neq 0$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *i* $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *to również ciąg* $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ *jest zbieżny oraz*

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$.

Przykład 4.40. Niech $x_n = \frac{3+2^n}{5-7\cdot 2^{n-1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Obliczamy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3+2^n}{5-7\cdot 2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2^{n-1}} + \frac{2^n}{2^{n-1}}}{\frac{5}{2^{n-1}} - \frac{7\cdot 2^{n-1}}{2^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot\frac{1}{2^{n-1}} + 2}{5\cdot\frac{1}{2^{n-1}} - 7} =$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(3\cdot\frac{1}{2^{n-1}} + 2\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(5\cdot\frac{1}{2^{n-1}} - 7\right)} = \frac{3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}} + 2}{5\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}} - 7} = \frac{3\cdot 0 + 2}{5\cdot 0 - 7} = -\frac{2}{7}$$

Skorzystaliśmy tutaj z tego, że $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ (patrz Przykład 4.35).

Twierdzenie 4.41. *Niech* $a \in \mathbb{R}$. *Jeśli* (x_n) *jest ciągiem zbieżnym i* $x_n \geq a$, *to* $\lim_{n\to\infty} x_n \geq a$.

Uwaga 4.42. Z tego, że $x_n > a$ dla $n \in \mathbb{N}$, nie wynika $\lim_{n\to\infty} x_n > a$.

Przykładem może tu być ciąg $x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Mamy nierówność $\frac{1}{2^{n-1}} > 0$ dla każdego n, ale $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$.

Twierdzenie 4.43. *Jeśli ciąg* (x_n) *jest ograniczony i monotoniczny, to jest zbieżny.*

Przykład 4.44. Niech $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Można uzasadnić, że ciąg (x_n) jest rosnący i ograniczony z góry, zatem na podstawie

powyższego twierdzenia wnioskujemy, że ciąg ten jest zbieżny. Granicę tego ciągu oznaczamy literą e i nazywamy stałą Eulera. Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{4.11}$$

Przybliżona wartość tej stałej to $e \approx 2{,}71$.

Twierdzenie 4.45. (Twierdzenie o trzech ciągach) *Niech (x_n), (y_n) i (z_n) będą ciągami liczbowymi spełniającymi następujące warunki:*

(i) $x_n \le y_n \le z_n$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$,
(ii) *ciągi* (x_n) *i* (z_n) *są zbieżne,*
(iii) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = g$.

Wtedy ciąg (y_n) *jest zbieżny i* $\lim_{n\to\infty} y_n = g$.

Przykład 4.46. Można uzasadnić (dowód pominiemy) następujące równości:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{4.12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \tag{4.13}$$

dla dowolnej stałej $a > 0$.

Przykład 4.47. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wykażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = 4. \tag{4.14}$$

W tym celu musimy wskazać ciągi (x_n) i (z_n) spełniające założenia Twierdzenia 4.45. Skorzystamy z następujących oczywistych nierówności:

$$4 = \sqrt[n]{4^n} \le \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \le \sqrt[n]{4^n + 4^n + 4^n} = \sqrt[n]{3\cdot 4^n} = 4\sqrt[n]{3}$$

Na podstawie poprzedniego przykładu stwierdzamy, że

$$\lim_{n\to\infty} 4\sqrt[n]{3} = 4\cdot 1 = 4.$$

Ponieważ po lewej stronie tych nierówności występuje ciąg stały o wartości 4, to założenia twierdzenia o trzech ciągach są spełnione. Równość (4.14) jest zatem spełniona.

3.3. Granice niewłaściwe. Oprócz ciągów posiadających granicę będącą liczbą rzeczywistą interesować nas także będą ciągi zbieżne do nieskończoności. O takich ciągach będziemy mówili, że mają granicę niewłaściwą.

Definicja 4.48. Niech (x_n) będzie ciągiem liczbowym. Mówimy, że ciąg ten jest *zbieżny do plus nieskończoności*, jeśli dla każdej liczby $C \in \mathbb{R}$ prawie wszystkie wyrazy tego ciągu spełniają nierówność $x_n > C$. Równoważnie:

$$\forall\, C \in \mathbb{R}\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n > N :\ x_n > C.$$

Piszemy wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Analogicznie, mówimy, że ciąg (x_n) jest *zbieżny do minus nieskończoności*, jeśli dla każdej liczby $C \in \mathbb{R}$ prawie wszystkie wyrazy tego ciągu spełniają nierówność $x_n < C$. Równoważnie:

$$\forall\, C \in \mathbb{R}\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n > N :\ x_n < C.$$

Piszemy wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Przykład 4.49. Niech $x_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$ będzie ciągiem z Przykładu 4.23. Wykażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = +\infty.$$

Wykażemy, że dla każdej liczby C nierówność

$$\frac{n^2+1}{n+1} > C \tag{4.15}$$

jest spełniona dla prawie wszystkich liczb naturalnych n. Zauważmy, że nierówność ta jest równoważna nierównościom

$$n^2+1 > C(n+1)$$

$$n^2 - Cn + 1 - C > 0. \tag{4.16}$$

Niech $f(x) = x^2 - Cx + 1 - C$. Podobnie jak w Przykładzie 4.23 rozważamy nierówność kwadratową

$$x^2 - Cx + 1 - C > 0. \tag{4.17}$$

Zbiór rozwiązań tej nierówności może być następującej postaci:

(a) cały zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ w przypadku, gdy funkcja f nie ma miejsc zerowych,

(b) $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ w przypadku, gdy f ma jedno rozwiązanie x_0,

(c) $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ w przypadku, gdy f ma dwa rozwiązania x_1, x_2 i $x_1 < x_2$.

Zauważmy, że w każdym z tych trzech przypadków będzie się w zbiorze rozwiązań zawierał przedział (N, ∞) dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że jeśli $n > N$, to n będzie rozwiązaniem nierówności (4.17). To oznacza, że n będzie także rozwiązaniem nierówności (4.16). Ta zaś jest równoważna nierówności (4.15). Wykazaliśmy zatem, że jeśli $n > N$, to n spełnia nierówność (4.15).

Omówimy teraz podstawowe własności ciągów z granicą niewłaściwą.

Twierdzenie 4.50. *Jeśli ciąg ma granicę niewłaściwą, to jest nieograniczony.*

Przykład 4.51. Niech $x_n = (-1)^n n$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Ciąg ten jest nieograniczony, bo $|x_n| = n$ dla $n \in \mathbb{N}$, a więc jest niemożliwe by istniała stała $C > 0$ taka, że nierówność $|x_n| \leq C$ jest spełniona dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Z Twierdzenia 4.38 wynika zatem, że ciąg (x_n) nie ma granicy. Ponadto ciąg ten nie ma granicy niewłaściwej: nie jest zbieżny do plus nieskończoności ani nie nie jest zbieżny do minus nieskończoności. Oznacza to, że implikacji w Twierdzeniu 4.50 nie da się odwrócić.

Twierdzenie 4.52. *Jeśli ciąg jest monotoniczny i nieograniczony, to ma granicę niewłaściwą.*

Z tego twierdzenia i z Twierdzenia 4.43 wynika, że każdy ciąg monotoniczny ma granicę właściwą lub niewłaściwą.

Twierdzenie 4.53. *Niech (x_n) i (y_n) będą ciągami mającymi granicę niewłaściwą, zaś (z_n) i (w_n) niech będą ciągami zbieżnymi.*

(1) $\lim_{n\to\infty}(x_n + z_n) = \lim_{n\to\infty} x_n$,
(2) *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *i* $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, *to* $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.
(3) *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *i* $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$, *to* $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$.
(4) *Ciąg $(x_n y_n)$ ma granicę niewłaściwą, a znak nieskończoności w granicy jest iloczynem znaków poszczególnych granic.*
(5) *Jeśli $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$, to ciąg $(x_n z_n)$ ma granicę niewłaściwą, a znak nieskończoności w granicy jest iloczynem znaków poszczególnych granic.*

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_n}{x_n} = 0$. *W szczególności* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.
(7) *Jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ *i* $z_n > 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = +\infty$.
(8) *Jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ *i* $z_n < 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = -\infty$.
(9) *Jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ *i spełniony jest jeden z następujących warunków*
  (a) $\lim\limits_{n\to\infty} w_n > 0$ *i* $z_n > 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
  (b) $\lim\limits_{n\to\infty} w_n < 0$ *i* $z_n < 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
  to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{w_n}{z_n} = +\infty$.
(10) *Jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ *i spełniony jest jeden z następujących warunków*
  (a) $\lim\limits_{n\to\infty} w_n > 0$ *i* $z_n < 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
  (b) $\lim\limits_{n\to\infty} w_n < 0$ *i* $z_n > 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
  to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{w_n}{z_n} = -\infty$.

3.4. Symbole nieoznaczone. Rozważmy dwa ciągi (x_n) i (y_n) takie, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Z punktu (2) Twierdzenia 4.53 wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty$. Czasami zapisujemy to symbolicznie

$$\infty + \infty = \infty$$

Nasuwa się teraz pytanie, czy da się powiedzieć cos ogólnego o granicy ciągu $(x_n - y_n)$. Okazuje się, że tym razem odpowiedź jest negatywna.

Stwierdzenie 4.54. *Dla dowolnej liczby* g *istnieją ciągi* (x_n) *i* (y_n) *takie, że* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = g$.

Dowód. Rozważmy ciągi $x_n = g + n$, $y_n = n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $x_n - y_n = g$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. □

Zatem w przeciwieństwie do $\infty + \infty$ nie da się w sposób przypisać jednoznacznej (nawet niewłaściwej) wartości wyrażeniu $\infty - \infty$. Wyrażenia tego typu nazwiemy *symbolami nieoznaczonymi.*

Symbolami nieoznaczonymi są:

$$\infty - \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 1^{\infty} \qquad \infty^{0}.$$

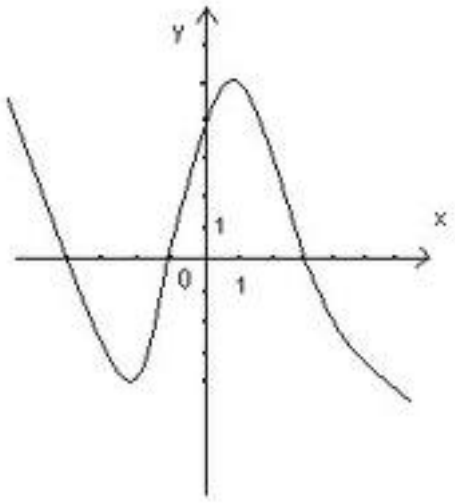
ROZDZIAŁ 5

Funkcje rzeczywiste jednej zmiennej

W dalszym ciągu naszego wykładu interesować nas będą funkcje, której dziedzina i przeciwdziedzina są podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, tj. $f : X \to Y$, gdzie $X, Y \subset \mathbb{R}$. Najczęściej jako zbiory X i Y będą tutaj występowały przedziały (mogą być nieograniczone), a reguła, według której warości są przyporządkowywane argumentom, jest opisana wzorem.

1. Wykres funkcji rzeczywistej

Przypomnijmy, że w Rozdziale 3 zdefiniowaliśmy funkcję $f : X \to Y$ jako podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ spełniający pewne własności (patrz Definicja 3.23).



Jeśli $X = Y = \mathbb{R}$, to $X \times Y$ jest zbiorem $\mathbb{R}^2$, który opisaliśmy w Przykładzie 2.8. Przypomnijmy, że zbiór $\mathbb{R}^2$ można interpretować graficznie jako płaszczyznę wyposażoną w kartezjański układ współrzędnych. Wynika z tego, że funkcja rzeczywsita zmiennej

rzeczywistej może być utożsamiana z pewnym podzbiorem płaszczyzny. Ten podzbiór to wykres funkcji f.

Definicja 5.1. *Wykresem* funkcji $f : X \to Y$, gdzie $X, Y \subset \mathbb{R}$, nazywamy podzbiór płaszczyzny W_f złożony ze wszystkich punktów postaci $(x, f(x))$, gdzie $x \in X$, tj.

$$W_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Wykres funkcji jest bardzo użyteczną graficzną formą prezentacji funkcji. Umożliwia rozpoznawanie i obserwowanie różbych własności funkcji takich jak ekstrema, monotoniczność, ciągłość, itp., o których będziemy mówili w następnych wykładach.

2. Dziedzina funkcji rzeczywistej

Funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej najczęściej definiujemy poprzez podanie wzoru funkcji. Musimy jednak pamiętać, że do pełnego opisu funkcji zawsze należy sprecyzować jaka jest jej dziedzina i przeciwdziedzina.

Przykład 5.2. Przypomnijmy, że w Przykładach 3.37, 3.38, 3.43 i 3.44 rozważaliśmy funkcje o wzorze $f(x) = x^2$. Zauważyliśmy, że własności funkcji zmieniają się, gdy zmieniamy dziedzinę i/lub przeciwdziedzinę mimo, że wzór pozostaje ten sam.

- Jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to f nie jest różnowartościowa i nie jest "na".
- Jeśli $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, to f jest różnowartościowa, ale nie jest "na".
- Jeśli $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, to f jest "na", ale nie jest różnowartościowa.
- Jeśli $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, to f jest odwracalna.

W przypadku, gdy funkcja określona jest tylko wzorem, będziemy przyjmować domyślnie, że jej dziedzina i przeciwdziedzina są maksymalnymi podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych, dla których określenie funkcji danym wzorem ma sens. Oznacza to, że **domyślną przeciwdziedziną jest zawsze cały zbiór** $\mathbb{R}$.

Jeśli chodzi o domyślną dziedzinę, to będzie nią tak zwana *dziedzina naturalna* D_f, czyli zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, które da się podstawić do wzoru funkcji.

Przykład 5.3. Rozważmy funkcję zadaną wzorem $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$.

Wyrażenie $\frac{1}{x}$ ma sens dla $x \neq 0$. Z kolei pierwiastek kwadratowy ma sens tylko wtedy,

gdy liczba pierwiastkowana jest nieujemna. Oznacza to, że $D_f = (0, \infty)$. Jeśli więc nie zdefiniowano dziedziny i przeciwdziedziny, to przyjmujemy $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Przykład 5.4. Niech $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{\ln x}$.

Liczba x należy do D_f wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:

(1) $2 - x \geq 0 \;\Rightarrow\; x \leq 2$, bo pierwiastkować możemy tylko liczby nieujemne,

(2) $x > 0$, bo logarytm jest określony tylko dla liczb dodatnich,

(3) $\ln x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 1$, bo liczba w mianowniku nie może być zerem.

Zbiór wszystkich x spełniających powyższe warunki jest postaci $D_f = (0, 1) \cup (1, 2]$.

3. Monotoniczność

W Rozdziale 4 omawialiśmy własności ciągów liczbowych. Zauważmy, że ciąg liczbowy jest szczególnym przypadkiem funkcji rzeczywistej. Zdefiniujemy teraz kilka własności analogicznych do tych, które definiowaliśmy dla ciągów.

Definicja 5.5. Niech $f : X \to Y$, gdzie $X, Y \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f jest

(a) *rosnąca* w zbiorze X, jeśli $f(x_1) < f(x_2)$ dla każdych $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X :\; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2);$$

(b) *słabo rosnąca* w zbiorze X, jeśli $f(x_1) \leq f(x_2)$ dla każdych $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X :\; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2);$$

(c) *malejąca* w zbiorze X, jeśli $f(x_1) > f(x_2)$ dla każdych $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X :\; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2);$$

(d) *słabo malejąca* w zbiorze X, jeśli $f(x_1) \geq f(x_2)$ dla każdych $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X :\; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2);$$

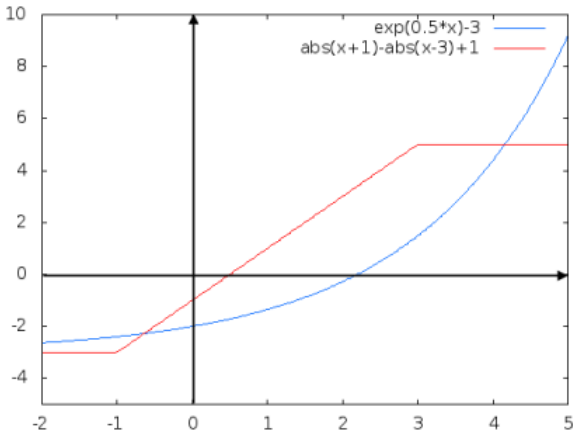
(e) *stała* w zbiorze X, jeśli $f(x_1) = f(x_2)$ dla każdych $x_1, x_2 \in X$.

$$\forall\, x_1, x_2 \in X :\; f(x_1) < f(x_2);$$

Jeśli funkcja spełnia jeden z powyższych warunków, to mówimy, że jest *monotoniczna*.

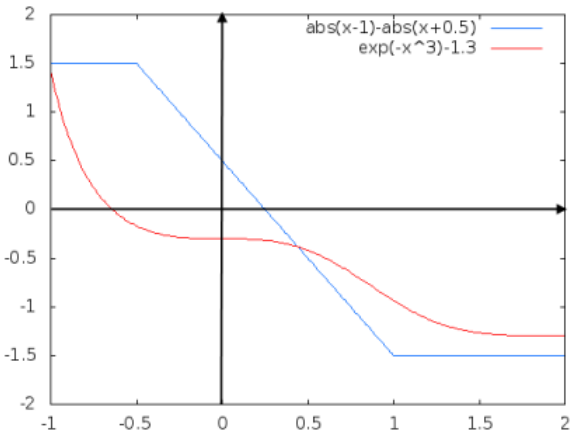
Na poniższych rysunkach widzimy przykłady wykresów dla funkcji monotonicznych. Śledzimy zachowanie się wykresu poruszając się od lewej do prawej strony. Zauważmy,

że w przypadku funkcji rosnącej wykres cały wznosi się w górę. W przypadku zaś funkcji słabo rosnącej możliwe są poziome fragmenty wykresu.



Rysunek 5.1. Wykres funkcji rosnącej (niebieski) i słabo rosnącej (czerwony)

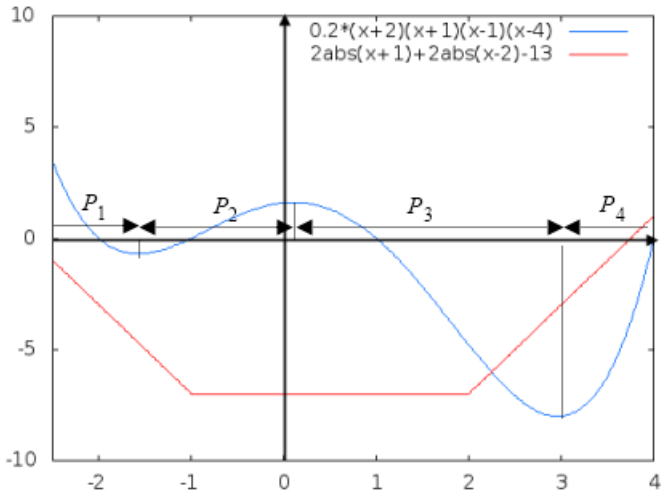
Analogicznie obserwacje można poczynić dla funkcji malejących i słabo malejących.



Rysunek 5.2. Wykres funkcji malejącej (czerwony) i słabo malejącej (niebieski)

Oczywiście nie każda funkcja musi być monotoniczna. Przykłady takich funkcji widzimy na Rysunku 3. Funkcja, której wykres jest niebieski nie jest ani rosnąca, ani malejąca. Z drugiej strony, łatwo zauważyć, że jeśli ograniczyć się do pewnych przedziałów na osi X, to da się wykryć monotoniczność. Na przykład, na przedziale P_2 wykres jest wznoszący. Jest to ilustracja faktu, że funkcja ta ograniczona tylko do przedziału

P_2 jest rosnąca. Z kolei, na przedziale P_3 funkcja jest malejąca. Oba te przedziały mają jeszcze jedną własność. Zauważmy, że przedziału P_2 nie da się przedłużyć tak, aby funkcja na tym przedłużonym przedziale była dalej rosnąca. Podobnie jest z przedziałem P_3: jest on maksymalnym przedziałem, na którym funkcja jest malejąca. Takie maksymalne przedziały, na których funkcja jest monotoniczna, nazywamy *przedziałami monotoniczności*. Niebieska funkcja ma zatem cztery przdziały monotoniczności: P_1 i P_3, na których jest malejąca, oraz P_2 i P_4, na których jest rosnąca. Funkcja czerwona



Rysunek 5.3. Funkcje niemonotoniczne i przedziały monotoniczności

ma trzy monotoniczności: na przedziale $(-\infty, -1)$ jest malejąca, na $(-1, 2)$ – stała, zaś na $(2, \infty)$ – rosnąca.

4. Funkcje ograniczone

Podobnie jak w przypadku ciągów możemy rozważać funkcje ograniczone.

Definicja 5.6. Niech $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f jest *ograniczona* w zbiorze X, jeśli istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że

$$a \leq f(x) \leq b$$

dla każdego $x \in X$.

Równoważnie możemy powiedzieć, że f jest ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy

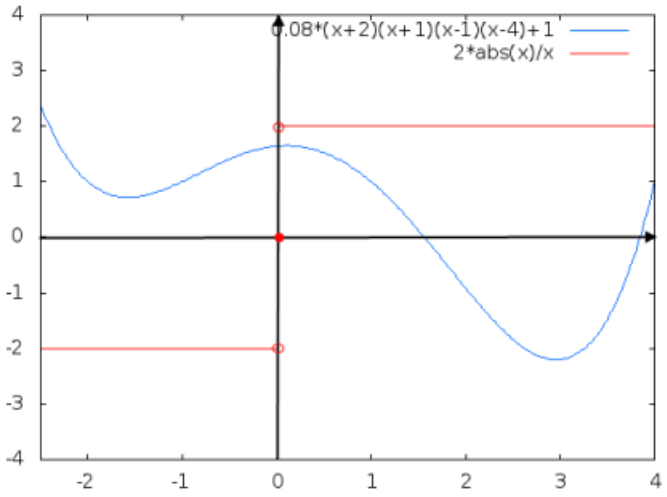
$$\exists\, C > 0\ \forall x \in X :\ |f(x)| \leq C. \tag{5.1}$$

ROZDZIAŁ 6

Granice i ciągłość funkcji jednej zmiennej

W Rozdziale 4 omówiliśmy jedno z podstawowych pojęć analizy matematycznej: granicy ciągu. Teraz pokażemy, jak to pojęcie można zastosować do badania funkcji rzeczywistych. Głównym naszym celem jest nadanie ścisłego znaczenia pojęciu funkcji ciągłej.

Przykład 6.1. Intuicja sugeruje, że funkcja ciągła, to taka funkcja, której wykres można narysować "bez odrywania ręki". Na rysunku wykres niebieski spełnia ten



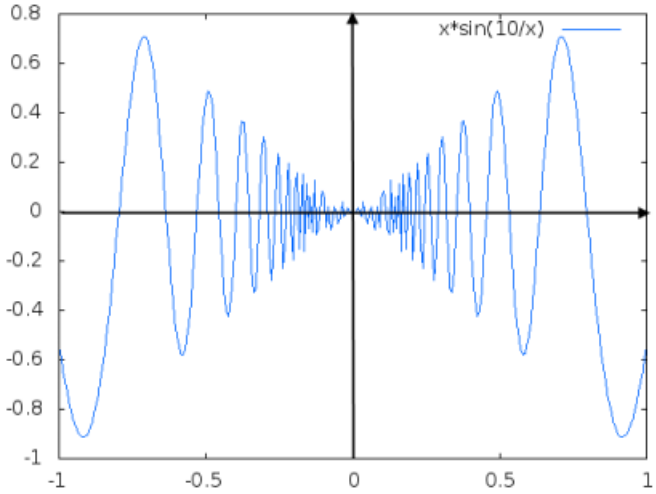
Rysunek 6.1. Wykres funkcji ciągłej (niebieski) i nieciągłej (czerwony)

warunek. Z kolei wykres czerwony składa się z trzech "kawałków": dwóch półprostuch i jednego punktu. Intuicyjnie więc rozpoznajemy, że niebieski wykres jest wykresem funkcji ciągłej, zaś wykres czerwony przedstawia funkcję nieciągłą.

Przykład 6.2. Intuicja może nas czasami zawieść. Kolejny rysunek prezentuje wykres funkcji zadanej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{10}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Mimo, że jest to funkcja ciągła, nie da się jej wykresu narysować "bez odrywania



Rysunek 6.2. Wykres funkcji ciągłej, którego nie da się narysować "bez odrywania ręki"

ręki", bo w każdym (nawet bardzo małym) otoczeniu punktu 0 jest nieskończenie wiele przedziałów monotoniczności.

1. Granica funkcji w punkcie

Kluczowym punktem w zrozumieniu czym jest ciągłość, jest pojęcie granicy funkcji w punkcie. Zanim zdefiniujeny to pojęcie, potrzebujemy kilku pojęć pomocniczych.

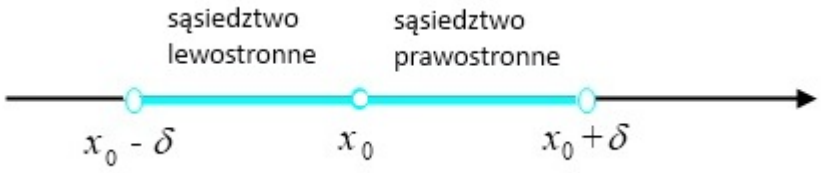
1.1. Otoczenie i sąsiedztwo punktu. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ dowolną liczbą. Dobrze jest rozumieć tę liczbę jako pewien punkt na osi liczbowej, czyli na prostej.

Definicja 6.3. *Otoczeniem* punktu x_0 nazywamy dowolny przedział otwarty postaci $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, gdzie δ jest dowolną liczbą dodatnią.

Z kolei, *sąsiedztwem* punktu x_0 nazywamy dowolny podzbiór w $\mathbb{R}$, który jest postaci $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, czyli $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, gdzie $\delta > 0$.



Rysunek 6.3. Otoczenie punktu x_0



Rysunek 6.4. Sąsiedztwo punktu x_0

Jak widać, sąsiedztwo różni się od otoczenia jedynie tym, że sam punkt x_0 należy do swojego otoczenia, a nie należy do sąsiedztwa.

Czasami przedział $(x_0 - \delta, x_0)$, czyli lewą "połówkę sąsiedztwa punktu x_0 nazywać będziemy *sąsiedztwem lewostronnym*, zaś przedział $(x_0, x_0 + \delta)$, czyli prawą połówkę sąsiedztwa – *sąsiedztwem prawostronnym*.

1.2. Określenie granicy funkcji w punkcie. Niech $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$, i niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Naszym celem jest zdefiniowanie granicy funkcji f w punkcie x_0. Aby nasze zadanie uczynić sensownym, musimy założyć, że funkcja f jest określona na pewnym sąsiedztwie punktu x_0, tzn.

$$\exists\, \delta > 0 : \ (x_0 - \delta) \cup (x_0, x_0 + \delta) \subset X. \tag{6.1}$$

Zauważmy, że w tym momencie **nie zakładamy**, że sam punkt x_0 należy do dziedziny funkcji f. Granicę funkcji można również liczyć w punktach, w których funkcja nie jest określona.

Definicja 6.4. (Definicja Heine'go) Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą funkcji f w punkcie x_0*, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

dla każdego ciągu (x_n) spełniającego warunki:

(1) $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Jeśli g jest granicą funkcji f w punkcie x_0, to piszemy $g = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Przykład 6.5. Niech $f(x) = 3x - 5$ i niech $x_0 = 4$.
Oczywiście warunek (6.1) jest spełniony, bo funkcja f jest określona na całym zbiorze $\mathbb{R}$. Rozważmy teraz ciąg $x_n = 4 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$, zatem ciąg ten spełnia warunki (1) i (2) z Definicji 6.4. Obliczamy teraz

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(4 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left[3\left(4 + \frac{1}{n}\right) - 5\right] = \lim_{n\to\infty} \left(7 + \frac{3}{n}\right) = 7$$

Zauważmy, że w tym momencie nie możemy stwierdzić, czy istnieje i jaka jest granica funkcji f w punkcie 4. Definicja mówi bowiem, że **dla każdego** ciągu (x_n) spełniającego warunki (1) i (2) musiałaby zachodzić równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 7$.

Sprawdźmy, że tak jest. Niech (x_n) będzie **dowolnym** ciągiem spełniającym warunki (1) i (2), tj.takim, że $x_n \neq 4$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 4.$$

Mamy wtedy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (3x_n - 5) = 3 \lim_{n\to\infty} x_n - 5 = 3 \cdot 4 - 5 = 7.$$

Wykazaliśmy zatem, że $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 7$.

Przykład 6.6. Niech $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{2x^2 - 3x + 1}$ i $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$. Warunek 6.1 jest spełniony bo np. dla $\delta = \frac{1}{2}$ mamy

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \subset D_f.$$

Wykażemy, że funkcja f ma granicę w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$. Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunki

(1) $x_n \neq \frac{1}{2}$ i $x_n \neq 1$ dla $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

Obliczamy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n^2 + 5x_n - 3}{2x_n^2 - 3x_n + 1}. \tag{6.2}$$

Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} (2x_n^2 + 5x_n - 3) = 2\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 + 5\lim_{n\to\infty} x_n - 3 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\cdot\frac{1}{2} - 3 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (2x_n^2 - 3x_n + 1) = 2\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 - 3\lim_{n\to\infty} x_n + 1 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{1}{2} + 1 = 0$$

Wynika stąd, że w granicy (6.2) mamy symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$.

Zauważmy jednak, że przy okazji wykryliśmy, że obie funkcje kwadratowe z licznika i z mianownika mają wspólny pierwiastek: $\frac{1}{2}$. Znajdźmy postacie iloczynowe obu tych funkcji. W tym celu należy wyznaczyć oba pierwiastki każdej z tych funkcji. Rozwiązując odpowiednie równania kwadratowe łatwo wyliczamy, że pierwiastkami funkcji kwadratowej z licznika są -3 i $\frac{1}{2}$, zaś dla mianownika są to $\frac{1}{2}$ i 1. Stwierdzamy zatem, że

$$2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3) = (2x-1)(x+3),$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) = (2x-1)(x-1).$$

Korzystając z tego kontynuujemy obliczenia granicy z (6.2)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2x_n-1)(x_n+3)}{(2x_n-1)(x_n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n+3}{x_n-1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n + 3}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n - 1} = \frac{\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}-1} = -7.$$

Podkreślmy, że powyższa równość zachodzi **dla każdego** ciągu (x_n) spełniającego warunki (1) i (2), zatem, w myśl Definicji 6.4 wykazaliśmy, że

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 5x - 3}{2x^2 - 3x + 1} = -7.$$

Przykład 6.7. Niech $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{2x^2 - 3x + 1}$ i $x_0 = 1$.

Jest to sama funkcja co w poprzednim przykładzie, a x_0 jest teraz drugim punktem, który nie należy do dziedziny funkcji f. Podobnie jak poprzednio sprawdzamy, że i tutaj spełniony jest warunek (6.1). Wykażemy, że tym razem jednak funkcja f nie ma granicy w punkcie x_0.

Niech $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Łatwo zauważyć, że ciąg ten spełnia warunki (1) i (2) w Definicji 6.4. Podobnie jak w poprzednim przykładzie wykazujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + 3}{x_n - 1}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + 3) = \lim_{n\to\infty} \left(4 + \frac{1}{n}\right) = 4,$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Na podstawie punktu (9) Twierdzenia 4.53 stwierdzamy, że $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$, a więc ciąg $f(x_n)$ nie jest zbieżny do żadnej liczby g. To zaś wyklucza istnienie granicy funkcji f w punkcie $x_0 = 1$.

Przykład 6.8. Niech $f(x) = \frac{|x|}{x}$ i niech $x_0 = 0$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, zatem każde sąsiedztwo punktu $x_0 = 0$ zawiera się w dziedzinie, czy warunek (6.1) jest spełniony. Wykażemy, że mimo to funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$.

Tym razem rozważymy dwa ciągi $x_n = \frac{1}{n}$ i $x'_n = -\frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Łatwo sprawdzić, że oba spełniają warunki (1) i (2) w Definicji 6.4. Obliczamy teraz:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n}\right|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{|x'_n|}{x'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|-\frac{1}{n}\right|}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1.$$

Mimo, że oba ciągi $(f(x_n))$ i $(f(x'_n))$ są zbieżne, to mają różne granice. To w myśl Definicji 6.4 wyklucza istnienie granicy funkcji f w punkcie x_0, bo do tego potrzebne jest, aby każdy ciąg $f(x_n)$ miał taką samą granicę.

Przykład 6.9. Niech $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ i $x_0 = 0$.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie stwierdzamy, że warunek (6.1) jest spełniony. I tutaj też wykażemy, że funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$ wskazując dwa ciągi (x_n) i (x'_n) zbieżne do x_0 takie, że ciągi $(f(x_n))$ i $(f(x'_n))$ mają różne granice. Niech

$x_n = \dfrac{2}{\pi(4n+1)}$ i $x'_n = \dfrac{2}{\pi(4n+3)}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi(4n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{2} = 1 \\
\lim_{n\to\infty} f(x'_n) &= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x'_n} = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi(4n+3)}{2} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{3\pi}{2} = -1
\end{aligned}$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie konkludujemy, że f nie ma granicy w punkcie x_0.

Warto zaznaczyć, że wspomniany już przez nas Cauchy wykazał, że przyjęta przez nas definicja Heinego granicy funkcji w punkcie równoważna jest tzw. definicji epsilonowo-deltowej, zwanej też definicją Cauchy'ego.

Twierdzenie 6.10. (Definicja Cauchy'ego) *Niech* $f : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *i niech będzie spełniony warunek (6.1). Liczba* g *jest granicą funkcji w punkcie* x_0 *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X:\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - g| < \varepsilon.$$

1.3. Własności granicy funkcji w punkcie. Ponieważ do zdefiniowania granicy funkcji w punkcie użyliśmy pojęcia granicy ciągu, to oczywiście wiele własności tej ostatniej przenosi się na granicę funkcji. Przytoczymy tutaj najważniejsze twierdzenia, które w większości są wnioskami z twierdzeń z Rozdziału 4.

Twierdzenie 6.11. *Jeśli* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g_1$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g_2$, *to* $g_1 = g_2$.

Innymi słowy, granica funkcji w punkcie (jeśli istnieje) jest jednoznacznie wyznaczona.

Twierdzenie 6.12. *Niech f i g będą funkcjami posiadającymi granice w punkcie x_0 i niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy funkcje αf, $f+g$ i fg też mają granice w punkcie x_0 oraz zachodzą równości:*

(a) $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f(x)) = \alpha \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,
(b) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
(c) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Jeśli dodatkowo założymy, że $g(x) \neq 0$ dla x należących do pewnego sąsiedztwa punktu x_0 i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, to

(d) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

Twierdzenie 6.13. *Niech $a \in \mathbb{R}$. Jeśli f ma granicę w punkcie x_0 i $f(x) \geq a$ dla x należących do pewnego sąsiedztwa punktu x_0, to $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq a$.*

Podobnie jak w przypadku ciągów (patrz Uwaga 4.42) tutaj też nie można zastąpić słabych nierówności ($\geq$) ostrymi ($>$).

Twierdzenie 6.14. *Niech f i g będą funkcjami określonymi na pewnym sąsiedztwie punktu x_0. Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ i g jest funkcją ograniczoną w pewnym sąsiedztwie punktu x_0, to $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.*

Przykład 6.15. Niech $f(x) = \dfrac{x}{x-1} \sin\dfrac{1}{x^2}$ i $x_0 = 0$.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Można ją przedstawić jako iloczyn dwóch funkcji:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{x}{x-1}, \\ f_2(x) &= \sin\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja sin przyjmuje wartości z przedziału $[-1,1]$, to

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x^2} \leq 1$$

dla wszystkich $x \neq 0$. Funkcja f_2 jest więc ograniczona. Ponadto obliczamy

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x-1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Z Twierdzenia 6.14 wnioskujemy więc, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x-1} \sin \frac{1}{x^2} = 0.$$

1.4. Granice niewłaściwe. Podobnie jak dla ciągów, również dla funkcji można rozważać granice niewłaściwe. Tutaj jednak będziemy rozważali niewłaściwości dwóch rodzajów:

(I) niewłaściwy jest punkt x_0,
(II) niewłaściwa jest granica g.

1.4.1. *Niewłaściwości I rodzaju.* Naszym celem jest zdefiniowanie granicy funkcji, gdy argument dąży do $+\infty$ lub do $-\infty$. Można do tego zastosować Definicję 6.4, tylko trzeba przeformułować pojęcie sąsiedztwa.

Definicja 6.16. *Sąsiedztwem punktu* $+\infty$ nazywamy dowolny przedział postaci (a,∞) dla pewnego $a \in \mathbb{R}$.

Sąsiedztwem punktu $-\infty$ nazywamy dowolny przedział postaci $(-\infty,a)$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$.

Granica funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ w $+\infty$ ma sens tylko wtedy, gdy zbiór X zawiera jakieś otoczenie punktu $+\infty$, czyli

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : (a,\infty) \subset X. \tag{6.3}$$

Przykład 6.17. Niech $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

Element x należy do dziedziny funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $\sin x \neq 0$. Ponieważ $\sin x = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, to wnioskujemy, że

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ten zbiór nie zawiera żadnego przedziału postaci (a,∞), czyli żadnego otoczenia punktu $+\infty$.

Podobnie, jeśli chcemy definiować granicę funkcji w punkcie $-\infty$, to zakładamy, że

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : (-\infty, a) \subset X. \tag{6.4}$$

Definicja 6.18. (Definicja Heine'go) Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą funkcji f w punkcie $+\infty$*, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

dla każdego ciągu (x_n) spełniającego warunki:

(1) $x_n \in X$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Analogicznie, liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą funkcji f w punkcie $-\infty$*, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

dla każdego ciągu (x_n) spełniającego warunki:

(1) $x_n \in X$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Jeśli g jest granicą funkcji f w punkcie $+\infty$, to piszemy $g = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, a jeśli jest granicą w punkcie $-\infty$, to piszemy $g = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

1.4.2. *Niewłaściwości II rodzaju.* Tym razem chcemy powiedzieć, co to znaczy, że funkcja f ma niewłasciwą granicę w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$. Ponownie musimy założyć, że f jest określona na pewnym sąsiedztwie punktu x_0, tzn. spełnia warunek (6.1).

Definicja 6.19. (Definicja Heine'go) Mówimy, że $+\infty$ jest *granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie x_0*, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$$

dla każdego ciągu (x_n) spełniającego warunki:

(1) $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Analogicznie, mówimy, że $-\infty$ jest *granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie x_0*, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$$

dla każdego ciągu (x_n) spełniającego warunki:

(1) $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Jeśli $+\infty$ jest granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie x_0, to zapisujemy to $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, a jeśli $-\infty$ jest granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie x_0, to piszemy $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

1.4.3. *Kombinacje niewłaściwości I i II rodzaju.* Modyfikując odpowiednio Definicje 6.18 i 6.19 możemy zdefiniować następujące sytuacje:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

W każdym z tych wypadków musimy założyć odpowiedni warunek spośród (??) i (??). Dla przykładu podajmy definicję pierwszej sytuacji.

Definicja 6.20. (Definicja Heine'go) Mówimy, że $-\infty$ jest *granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie $-\infty$*, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$$

dla każdego ciągu (x_n) spełniającego warunki:

(1) $x_n \in X$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Pozostałe sytuacje definiuje się analogicznie.

1.5. Granice jednostronne. Zdefiniujemy teraz granicę lewostronną i prawostronną funkcji f w punkcie x_0. Należy teraz założyć, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest określona na odpowiednio lewostronnym lub prawostronnym sąsiedztwie punktu x_0, tzn.

$$\exists\, \delta > 0 : \ (x_0 - \delta, x_0) \subset X \tag{6.5}$$

lub

$$\exists\, \delta > 0 :\ (x_0, x_0 + \delta) \subset X \tag{6.6}$$

Definicja 6.21. (Definicja Heine'go) Mówimy, że $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ jest *granicą lewostronną funkcji* f *w punkcie* x_0, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

dla każdego ciągu (x_n) spełniającego warunki:

(1) $x_n \in X$ i $x_n < x_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Analogicznie, $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ jest *granicą prawostronną funkcji* f *w punkcie* x_0, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

dla każdego ciągu (x_n) spełniającego warunki:

(1) $x_n \in X$ i $x_n > x_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Jeśli g jest granicą lewostronną funkcji f w punkcie x_0, to piszemy $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g$, a jeśli g jest granicą prawostronną funkcji f w punkcie x_0, to piszemy $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g$.

Twierdzenie 6.22. *Funkcja f ma granicę w punkcie x_0 (właściwą lub niewłaściwą) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją obie granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0 i są sobie równe. W takim wypadku granica funkcji w punkcie jest równa wspólnej wartości obu granic jednostronnych.*

2. Ciągłość

Niech $f : X \to \mathbb{R}$ i niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Tym razem będziemy zakładali, że funkcja f jest określona na pewnym otoczeniu punktu x_0, tzn.

$$\exists\, \delta > 0 :\ (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X. \tag{6.7}$$

Zauważmy, że teraz zakładamy, że funkcja f jest też określona w samym punkcie x_0.

Definicja 6.23. Mówimy, że funkcja f jest *ciągła w punkcie* x_0, jeśli spełnione są warunki:

(1) funkcja f ma granicę (właściwą) w punkcie x_0,
(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

ROZDZIAŁ 7

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

Koncepcja pochodnej jest kluczowym pomysłem, który pozwolił na nadanie precyzyjnej matematycznej formy zasadom dynamiki. Z czasem rachunek różniczkowy stał się podstawowym narzędziem mechaniki.

1. Określenie pochodnej funkcji

Rozważamy funkcję $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Będziemy zakładali, że funkcja f jest określona na pewnym otoczeniu punktu x_0, tzn. spełniony jest warunek (6.7)

Definicja 7.1. Mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna w punkcie* x_0, jeśli istnieje granica

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{7.1}$$

Granicę tę nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$.

Występujące w granicy (7.1) nazywamy *ilorazem róznicowym*. Równoważnie można zapisać

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{7.2}$$

Przykład 7.2. Niech $f(x) = ax + b$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ niech będzie dowolnym punktem. Obliczamy granicę (7.1)

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{a(x_0+h)+b-(ax_0+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ax_0+ah+b-ax_0-b}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a.$$

Wykazaliśmy zatem, że funkcja liniowa jest różniczkowalna w każdym punkcie i pochodna w każdym punkcie jest równa współczynnikowi kierunkowemu a.

Przykład 7.3. Niech $f(x) = x^2$ i niech $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie dowolnym punktem. Wtedy

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x_0+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x_0+h) = 2x_0. \end{aligned}$$

Przykład 7.4. Niech $f(x) = x^3$ i niech $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie dowolnym punktem. Wtedy

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3x_0^2 + 3x_0h + h^2)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}(3x_0^2 + 3x_0h + h^2) = 3x_0^2. \end{aligned}$$

Przykład 7.5. Niech $f(x) = \sqrt{x}$ i niech $x_0 > 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}\right)}{h\left(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}\right)} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h) - x_0}{h\left(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}\right)} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

Przykład 7.6. Niech $f(x) = \dfrac{1}{x}$ i niech $x_0 \neq 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x_0+h} - \dfrac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0 - (x_0+h)}{hx_0(x_0+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx_0(x_0+h)} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x_0(x_0+h)} = -\frac{1}{x_0^2} \end{aligned}$$

Przykład 7.7. Niech $f(x) = |x|$ i $x_0 = 0$.

Pokażemy, że granica (7.1) w tym wypadku nie istnieje. Skorzystamy z Twierdzenia 6.22. Wykażemy mianowicie, że

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Obliczamy

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

Z Twierdzenia 6.22 wnioskujemy, że granica (7.1) nie istnieje, zatem f nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

Rozważmy teraz funkcję, która jest określona na pewnym przedziale postaci (a, b), gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ (dopuszczamy też sytuację $a = -\infty$ lub $b = +\infty$). Zauważmy, że jeśli $x \in D_f$, to f jest też określona na pewnym otoczeniu punktu x. Dla każdego punktu z dziedziny jest sens pytać o różniczkowalność funkcji f w tym punkcie.

Definicja 7.8. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna w przedziale* (a, b), jeśli jest różniczkowalna w każdym punkcie należącym do tego przedziału.

W takim wypadku funkcję $(a, b) \to \mathbb{R}$, która każdemu punktowi $x \in (a, b)$ przyporządkowuje pochodną $f'(x)$ funkcji f w punkcie x, nazywamy *pochodną* funkcji f i oznaczamy f'.

2. Obliczanie pochodnych

Twierdzenie 7.9. *Niech f i g będą funkcjami różniczkowalnymi w punkcie x_0 i niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy funkcje αf, $f + g$, fg są funkcjami różniczkowalnymi w punkcie x_0 oraz prawdziwe są następujące równości:*

(a) $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$,

(b) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,

(c) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Jeśli ponadto $g(x) \neq 0$ dla x należących do pewnego otoczenia punktu x_0, to również funkcja $\frac{f}{g}$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Wzór (c) w powyższym twierdzeniu nazywa się *wzorem Leibnitza*.

Kolejne twierdzenie podaje regułę obliczania pochodnych z funkcji złożonych. Niech funkcja f będzie postaci $f(x) = F(\varphi(x))$ dla pewnych funkcji F i φ. Funkcję F będziemy nazywać funkcją zewnętrzną, zaś φ – funkcją wewnętrzną.

Twierdzenie 7.10. *Niech* $f(x) = F(\varphi(x))$ *dla pewnych funkcji rzeczywistych* F *i* φ. *Jeśli funkcja* φ *jest różniczkowalna w punkcie* x_0, *a funkcja* F *jest różniczkowalna w punkcie* $\varphi(x_0)$, *to funkcja* f *jest różniczkowalna w punkcie* x_0 *oraz prawdziwa jest równość*

$$f'(x_0) = F'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0). \tag{7.3}$$

Przykład 7.11. Niech $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
Jest funkcja złożona. Możemy zapisać $f(x) = F(\varphi(x))$, gdzie

$$\begin{aligned} F(t) &= \sqrt{t} \\ \varphi(x) &= 1+x^2 \end{aligned}$$

Obliczamy pochodne:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ \varphi'(x) &= 2x \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru (7.3) otrzymujemy

$$f'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x)}}\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Przykład 7.12. Niech $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.
Możemy zapisać $f(x) = F(\varphi(x))$, gdzie

$$\begin{aligned} F(t) &= \sin t \\ \varphi(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Obliczamy pochodne:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \cos t \\ \varphi'(x) &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru (7.3) otrzymujemy

$$f'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = \cos\varphi(x) \cdot \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}.$$

3. Własności funkcji różniczkowalnych i pochodnych

Wymienimy teraz podstawowe własności funkcji różniczkowalnych i pochodnych.

Twierdzenie 7.13. *Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła.*

Zauważmy, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. W Przykładzie 7.7 wykazaliśmy, że istnieje funkcja ciągła, która nie jest różniczkowalna.

Twierdzenie 7.14. (Rolle'a) *Załóżmy, że $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalną w (a, b). Jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $\xi \in (a, b)$ taki, że $f'(\xi) = 0$.*

Wnioskiem z tego twierdzenia jest następujące ważne

Twierdzenie 7.15. (Lagrange'a, o wartości średniej) *Załóżmy, że $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalną w (a, b). Wtedy istnieje punkt $\xi \in (a, b)$ taki, że*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{7.4}$$

4. Zastosowania rachunku różniczkowego

4.1. Związki pochodnej z monotonicznością. Kluczowe jest tutaj następujące twierdzenie

Twierdzenie 7.16. *Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną.*

(i) *Jeśli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale (a, b).*

(ii) *Jeśli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest malejąca w przedziale (a, b).*

Przykład 7.17. Rozważmy funkcję $f(x) = x^3$. Jest to funkcja rosnąca w całym zbiorze $\mathbb{R}$. Pochodna $f'(x) = 3x^2$. Zauważmy, że $f'(0) = 0$. Oznacza to, że implikacji w punkcie (i) powyższego twierdzenia nie da się odwrócić.

Prawdziwe jest za to następująca troszeczkę słabsza wersja powyższego twierdzenia.

Twierdzenie 7.18. *Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną.*

(i) *Funkcja f jest słabo rosnąca w przedziale (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \geq 0$ dla każdego $x \in (a, b)$.*

(ii) *Funkcja f jest słabo malejąca w przedziale (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \leq 0$ dla każdego $x \in (a, b)$.*

4.2. Pochodna a ekstrema lokalne. Rozpoczniemy od zdefiniowania niezbędnych pojęć.

Definicja 7.19. Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie określona na pewnym otoczeniu punktu x_0. Mówimy, że funkcja f osiąga w punkcie x_0 *maksimum lokalne*, jeśli istnieje otoczenie punktu x_0 takie, że $f(x_0)$ jest największą wartością funkcji spośród wartości przyjmowanych przez funkcję f na całym tym otoczeniu. Można to zapisać

$$\exists\, \delta > 0\ \forall x \in X:\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x_0) > f(x). \tag{7.5}$$

Analogicznie, funkcja f osiąga w punkcie x_0 *minimum lokalne*, jeśli istnieje otoczenie punktu x_0 takie, że $f(x_0)$ jest najmniejszą wartością funkcji spośród wartości przyjmowanych przez funkcję f na całym tym otoczeniu, co można zapisać

$$\exists\, \delta > 0\ \forall x \in X:\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x_0) < f(x). \tag{7.6}$$

Maksima i minima lokalne określamy wspólną nazwą *ekstremów lokalnych*.

Kluczowy jest problem, jak szukać ekstremów lokalnych.

Twierdzenie 7.20. (Warunek konieczny) *Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i osiąga w tym punkcie ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$.*

Uwaga 7.21. Twierdzenie odwrotne do powyższego nie jest prawdziwe! W Przykładzie 7.17 analizowaliśmy funkcję $f(x) = x^3$. W punkcie $x_0 = 0$ pochodna tej funkcji zeruje się mimo, że funkcja ta (jako funkcja rosnąca) nie ma żadnych ekstremów lokalnych.

Twierdzenie 7.22. (Warunek konieczny i wystarczający) *Załóżmy, że funkcja f jest określona na pewnym otoczeniu punktu x_0 i różniczkowalna w pewnym sąsiedztwie tego punktu.*

(1) *Funkcja f osiąga w punkcie x_0 maksimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.*

(2) *Funkcja f osiąga w punkcie x_0 minimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.*

Warunek sformułowany w powyższym twierdzeniu wypowiada się czasami w następującej (niezbyt ścisłej) formie:

Funkcja f osiąga w punkcie x_0 ekstremum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy pochodna zmienia w tym punkcie znak.

4.3. Druga pochodna a wypukłość.

4.3.1. *Pochodne wyższych rzędów.* Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (a, b), to wyznacza ona kolejną funkcję określoną na przedziale (a, b): swoją pochodną f'. Jeśli funkcja f' jest ciągła, to mówimy, że funkcja f jest klasy C^1 i piszemy $f \in C^1(a, b)$.

Oprócz badania ciągłości funkcji f' możemy również zadać pytanie o jej różniczkowalność. Jeśli jest ona różniczkowalna, to jej pochodną oznaczamy f'' i nazywamy drugą pochodną funkcji f. O funkcji f mówimy wtedy, że jest dwukrotnie różniczkowalna. Jeśli druga pochodna f'' jest ciągła, to mówimy, że funkcja f jest klasy C^2 i piszemy $f \in C^2(a, b)$.

Procedurę tę możemy kontynuować i tak dochodzimy do pojęcia n-tej pochodnej (albo pochodnej rzędu n) dla dowolnej liczby naturalnej n. Pochodną rzędu n funkcji f oznaczamy $f^{(n)}$.

Możemy tutaj zastosować definicję rekurencyjną. Określiliśmy już pierwszą pochodną. Załóżmy teraz, że mamy określoną n-tą pochodną $f^{(n)}$. Wtedy pochodną rzędu $n + 1$

definiujemy jako pochodną funkcji $f^{(n)}$, o ile funkcja $f^{(n)}$ jest różniczkowalna:

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$

Jeśli n-ta pochodna funkcji f jest ciągła, to mówimy, że f jest klasy C^n i piszemy $f \in C^n(a,b)$. Jeśli istnieje n-ta pochodna funkcji f dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to mówimy, że funkcja f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna albo klasy C^∞ i piszemy $f \in C^\infty(a,b)$.

Przyjmować będziemy też umowę, że pochodna rzędu 0 to funkcja f, tzn. $f^{(0)} = f$.

Przykład 7.23. Niech $f(x) = e^x$.
Wtedy $f'(x) = e^x = f(x)$. Łatwo zauważyć, że pochodna dowolnego rzędu będzie zawsze równa funkcji f, czyli $f^{(n)}(x) = e^x$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 7.24. Niech $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Obliczmy pochodne kilku początkowych rzędów:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\
f''(x) &= \left(-x^{-2}\right)' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \\
f^{(3)}(x) &= \left(2x^{-3}\right)' = -2 \cdot 3x^{-4} = -\frac{6}{x^4} \\
f^{(4)}(x) &= \left(-2 \cdot 3x^{-4}\right)' = 2 \cdot 3 \cdot 4x^{-5} = -\frac{24}{x^5}
\end{aligned}$$

Analizując otrzymane wzory odgadujemy wzór na n-tą pochodną dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Przykład 7.25. Niech $f(x) = \sin x$.
Obliczmy pochodne kilku początkowych rzędów:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\sin x)' = \cos x \\
f''(x) &= (\cos x)' = -\sin x \\
f^{(3)}(x) &= (-\sin x)' = -\cos x \\
f^{(4)}(x) &= (-\cos x)' = \sin x
\end{aligned}$$

Widać, że przy liczeniu pochodnych wyższych rzędów otrzymana sekwencja będzie się powtarzać. W wyniku tego otrzymamy

$$f^{(n)} = \begin{cases} (-1)^k \cos x, & \text{gdy } n = 2k+1 \text{ dla } k = 0,1,2,\ldots, \\ (-1)^k \sin x, & \text{gdy } n = 2k \text{ dla } k = 0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

4.3.2. *Badanie kształtu wykresu.* Zachodzi tutaj twierdzenie analogiczne do Twierdzenia 7.26.

Twierdzenie 7.26. *Niech* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną.*

(i) *Jeśli* $f''(x) > 0$ *dla każdego* $x \in (a, b)$*, to funkcja* f *jest wypukła w przedziale* (a, b).

(ii) *Jeśli* $f''(x) < 0$ *dla każdego* $x \in (a, b)$*, to funkcja* f *jest wklęsła w przedziale* (a, b).

Twierdzenie 7.27. *Jeśli* f *jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie* x_0 *i ma w tym punkcie punkt przegięcia, to* $f''(x_0) = 0$.

Twierdzenie 7.28. *Załóżmy, że funkcja* f *jest określona na pewnym otoczeniu punktu* x_0 *i dwukrotnie różniczkowalna w pewnym sąsiedztwie tego punktu. Funkcja* f *ma w tym punkcie punkt przegięcia jeśli spełniony jest jeden z następujących warunków:*

(1) *istnieje liczba* $\delta > 0$ *taka, że* $f'(x) > 0$ *dla* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *i* $f'(x) < 0$ *dla* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$*;*

(2) *istnieje liczba* $\delta > 0$ *taka, że* $f'(x) < 0$ *dla* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *i* $f'(x) > 0$ *dla* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

4.4. Obliczanie granic. Przy obliczaniu granic funkcji w punkcie, w których występuje symbol nieoznaczony, przydatne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.29. (Reguła de l'Hospitala) *Załóżmy, że funkcje* f *i* g *są różniczkowalne w pewnym sąsiedztwie punktu* x_0 *(*x_0 *może być punktem niewłaściwym) i* $g(x) \neq 0$ *dla* x *z pewnego sąsiedztwa punktu* x_0*. Jeśli spełniony jest jeden z następujących warunków:*

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$,

to

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{7.7}$$

ROZDZIAŁ 8

Szeregi. Szereg Taylora funkcji jednej zmiennej

Celem tego rozdziału jest sformułowanie twierdzenia Taylora. Do tego niezbędne będzie wprowadzenie pojęcia zbieżności szeregu liczbowego.

1. Szeregi

Niech będzie dany nieskończony ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Będziemy rozważać następujący problem:

Czy da się obliczyć sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n):

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots ?$$

Czy może się zdarzyć, że ta suma będzie liczbą skończoną?

Odpowiedź na tak postawione pytanie jest praktycznie niemożliwa, bo jak dotąd, nie wiemy, co to znaczy "suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu". Umiemy obliczać sumy skończenie wielu składników, ale to nie ma zastosowania do postawionego problemu.

1.1. Definicja zbieżności szeregu. Wprowadźmy następujące oznaczenie. Zamiast pisać

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N$$

będziemy pisać

$$\sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Ogólniej

$$\sum_{n=k}^{N} = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{N-1} + a_N$$

dla każdych liczb całkowitych k i N takich, że $k \leq N$. Czasami przyjmuje się umowę, że jeśli $k > N$, to $\sum_{n=k}^{N} a_n = 0$.

Przykład 8.1.

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

Przykład 8.2.

$$\sum_{i=3}^{3} \frac{1+i^2}{i} = \frac{1+3^2}{3} = \frac{10}{3}$$

Mając dany ciąg (a_n) definiujemy dla każdego $N \in \mathbb{N}$ następującą sumę

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \tag{8.1}$$

Liczbę S_N nazywamy N-tą sumą częściową ciągu (a_n). W szczególności mamy

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\dots \end{aligned}$$

Łatwo jest zauważyć, że między kolejnymi sumami częściowymi jest następujący związek

$$S_{N+1} = S_N + a_{N+1}, \qquad N \in \mathbb{N}. \tag{8.2}$$

W wyniku procedury obliczania sum częściowych ciągu (a_n) otrzymujemy nowy ciąg $(S_N)_{N=1}^{\infty}$.

Przykład 8.3. Niech $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Obliczamy:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ S_3 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\ S_4 &= \frac{7}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

Można uzasadnić (np. stosując zasadę indukcji matematycznej), wzór

$$S_N = \frac{2^N - 1}{2^N}. \tag{8.3}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots.$$

Obiekt ten nazywać będziemy *szeregiem* wyrazów a_n. Sens tego pojecia wyjaśnia następująca

Definicja 8.4. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeśli ciąg (S_N) ma granicę właściwą. Jeśli $S = \lim_{N\to\infty} S_N$, to liczbę S nazywamy *sumą szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i piszemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Przykład 8.5. Powróćmy do Przykładu 8.3. Ze wzoru (8.3) wynika, że

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{2^N - 1}{2^N} = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^N}\right) = 1.$$

Wynika stąd, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1. \tag{8.4}$$

Przykład 8.6. Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Korzystając z zależności (refe:sumarekur) obliczamy kilka początkowych sum częściowych

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \\ S_3 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \\ S_4 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Czytelnik może potraktować jako ćwiczenie udowodnienie metodą indukcji matematycznej wzoru

$$S_N = \frac{N}{N+1}.$$

Stąd łatwo wynika, że

$$\lim_{N\to\infty} S_N = 1,$$

co prowadzi do wniosku, że badany szereg jest zbieżny i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

1.2. Kryteria zbieżności szeregów. Problem obliczenia sumy szeregu jest zazwyczaj bardzo trudny. Jest tylko nieliczna klasa szeregów, dla których da się łatwo znaleźć wzór jawny ciągu sum częściowych. Zazwyczaj już sama odpowiedź, czy dany szereg jest zbieżny jest trudna. Podamy teraz serię twierdzeń, które pozwalają znaleźć odpowiedź na tak postawione pytanie.

Twierdzenie 8.7. (Kryterium d'Alemberta) *Niech* $a_n \geq 0$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$. *Załóżmy, że istnieje granica*

$$t = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(1) *Jeśli* $t < 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

(2) *Jeśli* $t > 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Twierdzenie 8.8. (Kryterium Cauchy'ego) *Niech* $a_n \geq 0$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$. *Załóżmy, że istnieje granica*

$$s = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

(1) *Jeśli* $s < 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

(2) *Jeśli* $s > 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Twierdzenie 8.9. (Kryterium porównawcze) *Niech* $a_n \geq 0$ *i* $b_n \geq 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

(1) *Jeśli* $a_n \leq b_n$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *i szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest też zbieżny.*

(2) *Jeśli* $a_n \geq b_n$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *i szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest rozbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest też rozbieżny.*

Twierdzenie 8.10. (Kryterium Leibnitza) *Niech* $b_n \geq 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Jeśli ciąg* (b_n) *jest malejący i* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *jest zbieżny.*

1.3. Szeregi potęgowe. Rozważamy szeregi postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{8.5}$$

gdzie $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest pewnym ustalonym ciągiem liczbowym, $x_0 \in \mathbb{R}$ jest pewnym ustalonym punktem, zaś x jest dowolną liczbą rzeczywistą. Takie szeregi nazywamy *potęgowymi*. Szczególnym przypadkiem jest sytuacja, gdy $x_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Przypuśćmy, że istnieje granica

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Dopuszczamy również przypadek $\rho = +\infty$. Zdefiniujmy

$$R = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \rho = +\infty, \\ \dfrac{1}{\rho}, & \text{gdy } 0 < \rho < +\infty, \\ +\infty, & \text{gdy } \rho = 0. \end{cases} \tag{8.6}$$

Twierdzenie 8.11. *Niech* R *będzie określone tak, jak w równości (8.6).*

(1) *Jeśli* $|x - x_0| < R$, *to szereg potęgowy* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *jest zbieżny.*

(2) *Jeśli* $|x - x_0| > R$, *to szereg potęgowy* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *jest rozbieżny.*

Liczbę R nazywamy promieniem zbieżności szeregu potęgowego (**??**).

2. Szereg Taylora

Rozpoczniemy od następującego twierdzenia

Twierdzenie 8.12. (Twierdzenie Taylora) *Niech* $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją* $n+1$*-krotnie różniczkowalną w* (α, β). *Wówczas dla dowolnych punktów* a *i* b *takich, że* $\alpha < a < b < \beta$ *istnieje punkt* $\xi \in (a, b)$ *taki, że*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_{n+1},$$

gdzie

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+1}.$$

Wnioskiem jest następujące

Twierdzenie 8.13. *Niech* $f : X \to \mathbb{R}$ *będzie klasy* C^∞ *na pewnym otoczeniu punktu* x_0. *Załóżmy, że na pewnym otoczeniu wszystkie pochodne są wspólnie ograniczone, tzn.*

$$\exists\, \delta > 0\ \exists\, C > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in X :\ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f^{(n)}(x)| \leq C.$$

Wtedy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{8.7}$$

dla wszystkich $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Szereg występujący w (8.7) nazywamy *szeregiem Taylora* funkcji f względem punktu x_0.

Jeśli $x_0 = 0$, to (8.7) przybiera postać

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

i mówimy wtedy o *szeregu Maclaurina*.

Przykład 8.14. Niech $f(x) = e^x$.
Znajdziemy szereg Maclaurina tej funkcji. Ponieważ $f^{(n)}(x) = e^x$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Mamy zatem

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Bibliografia

[1] A. Błaszczyk, S. Turek, *Teoria mnogości*, PWN Wydawnictwo Naukowe 2007.
[2] V. V. Prasolov, V. M. Tikhomirov, *Geometry*, American Mathematical Society 2001.
[3] A. Wojciechowska, *Elementy logiki i teorii mnogości*, PWN 1979.