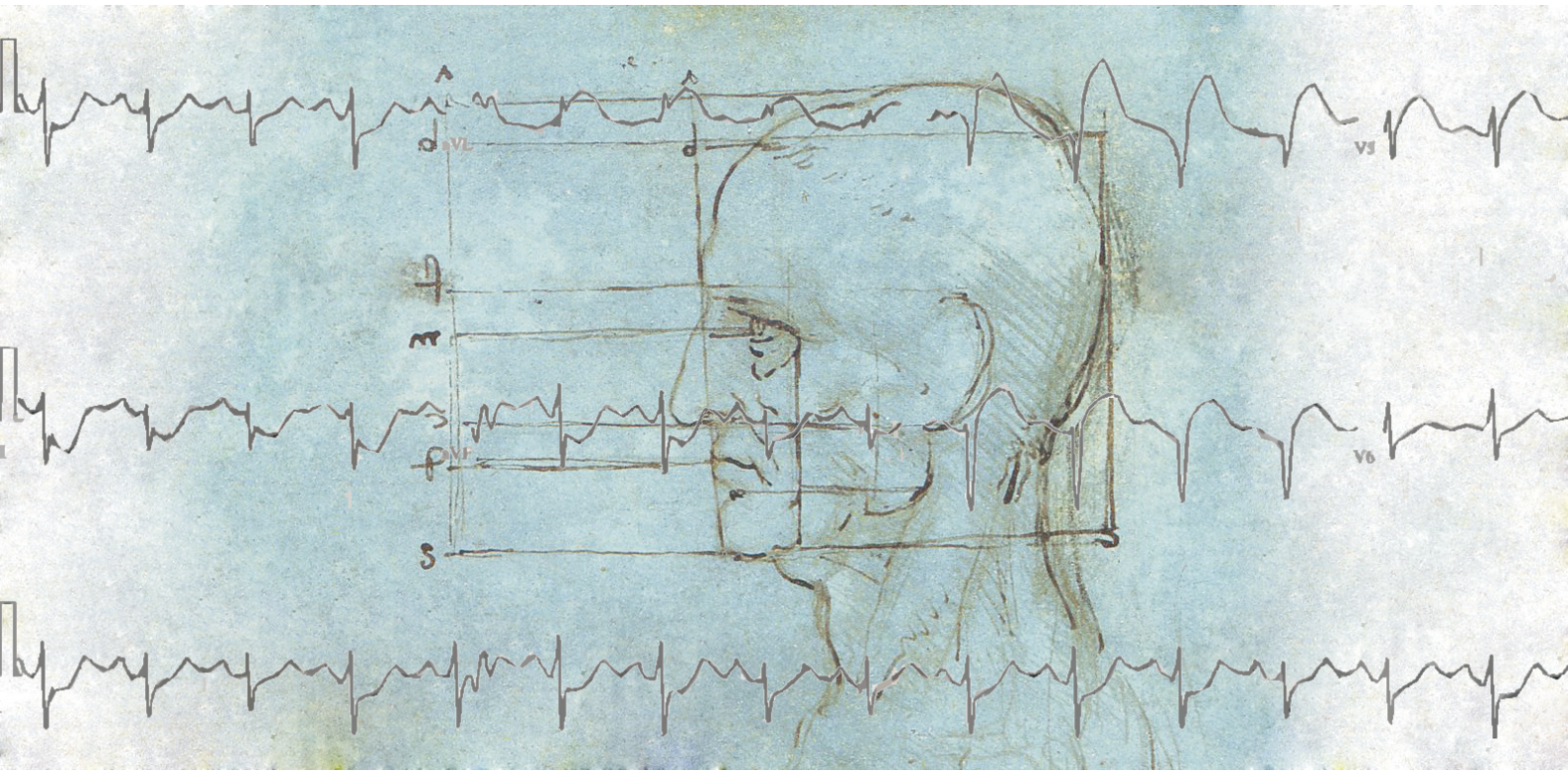

Analiza matematyczna

ćwiczenia

Marcin Marciniak

Gdańsk, 2011

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytetu Gdańskiego

Skrypt powstał w ramach projektu „Kształcimy profesjonalistów – kompleksowy program kształcenia skierowany do studentów, absolwentów oraz studentów niepełnosprawnych Uniwersytetu Gdańskiego” współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach środków Europejskiego Funduszu Społecznego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET GDAŃSKI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Analiza matematyczna

1. Logika

1.1 Które z podanych wyrażeń są zdaniami logicznymi?

(a) Na Księżycu żyją istoty rozumne.

(b) Janek idzie do szkoły.

(c) W roku 2020 w Polsce będzie 50 mln. mieszkańców.

(d) Wieloryb jest rybą.

(e) Proste a i b są równoległe.

(f) $2+2=5$. (g) $x+3=4$. (h) Zrób mi kawę¿

(i) Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą ujemną.

(j) Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $x-5=0$.

(k) Istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$ taka, że $a^2+a+1=0$.

1.2 Oceń wartość logiczną zdań:

(a) 5 jest liczbą pierwszą. (b) $\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (c) π jest liczbą wymierną.

(d) Istnieją dwie kolejne liczby naturalne będące liczbami pierwszymi.

1.3 Używając zdań p, q, r i s oraz spójników $\vee$ i $\wedge$ zapisz dwa zdania złożone prawdziwe i dwa zdania złożone fałszywe.

p : liczba 222 jest podzielna przez 3

q : $\sqrt{1\frac{16}{25}} = 1\frac{4}{5}$

r : $86-80=16$

s : $\sqrt{\sqrt{81}} = 3$

Następnie wśród powyższych czterech zdań wskaż te pary zdań dla których:

(a) prawdziwa jest zarówno ich koniunkcja jak i alternatywa,

(b) prawdziwa jest ich alternatywa, ale nie jest prawdziwa ich koniunkcja,

(c) prawdziwa jest ich koniunkcja, ale nie jest prawdziwa ich alternatywa.

1.4 Ze zdań p, q, r i s z zadania poprzedniego zapisz zdania:

(a) $(p \vee q) \wedge r$, (b) $p \vee (q \wedge r)$.

i oceń ich wartość logiczną.

1.5 Oceń wartość logiczną koniunkcji:

(a) 2 jest liczbą parzystą i 2 jest liczbą pierwszą,

(b) $\sqrt{2}$ jest liczbą dodatnią i $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną,

(c) $5>0$ i $5<4$,

(d) prosta jest figurą geometryczną i figurą ograniczoną.

1.6 Oceń wartość logiczną alternatyw:

(a) $2>5$ lub $2<5$,

(b) romb jest kwadratem lub romb jest czworokątem

(c) -3 jest liczbą parzystą lub jest liczbą nieparzystą

(d) $3<2$ lub równoległobok jest okręgiem

1.7 Oceń prawdziwość poniższych implikacji. Które ze zdań po zastąpieniu symbolu implikacji ($\Rightarrow$) symbolem równoważności ($\Leftrightarrow$) jest zdaniem prawdziwym?

(a) $4|100 \Rightarrow 4^2|100^2$, (b) $4|10 \Rightarrow 4^2|10^2$, (c) $9|15 \Rightarrow 3|15$, (d) $3|21 \Rightarrow 9|21$.

1.8 Oceń wartość logiczną zdań

(a) $3<2$ i Warszawa jest stolicą Polski

(b) $3 < 2$ lub Warszawa jest stolicą Polski

(c) jeżeli $3 < 2$, to Warszawa jest stolicą Polski

(d) $3 < 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy Ziemia jest planetą

(e) jeżeli $2 < 20$, to $3 > 4$

(f) jeżeli jestem chory, to $2 \cdot 2 = 4$

(g) jeżeli idę, to $2 \cdot 2 = 5$

(h) jeżeli $2 \cdot 5 = 12$, to $2 - 5 = 10$

1.9 Sformułuj zaprzeczenia następujących zdań, zapisz te zaprzeczenia bez użycia znaku negacji i oceń wartość logiczną otrzymanych zaprzeczeń:

(a) $(2 \geqslant \sqrt{5}) \vee (27$ jest podzielne przez $3)$,

(b) $(9$ jest liczbą wymierną$) \wedge (7 > \sqrt{45})$,

(c) $(\sqrt{3+6} = 2) \Rightarrow (16$ jest liczbą parzystą$)$,

(d) $5^2 \geqslant 15) \Rightarrow (25$ jest podzielne przez $4)$,

(e) $(216$ jest podzielne przez $3) \Rightarrow (3 + 6 = 9 \vee 14 \leqslant 10)$,

(f) $(5 > 7) \wedge (21$ jest podzielne przez $3 \Rightarrow \sqrt{21+4} = 5)$.

1.10 Oceń wartość logiczną zdań zawierających kwantyfikatory:

(a) $\forall\, x \in \mathbb{R} :\ x^4 + 2 > 1$,

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ 2n$ jest liczbą podzielną przez 4,

(c) $\exists\, x \in \mathbb{R} :\ 3x + 2 > -1$,

(d) $\exists\, n \in \mathbb{N} :\ 2n$ nie jest liczbą parzystą.

1.11 Sprawdź metodą zerojedynkową, które z podanych wyrażeń są prawami logicznymi:

(a) $p \Rightarrow (p \vee q)$, (b) $(p \vee q) \Rightarrow p$, (c) $(p \vee q) \Rightarrow q$,

(d) $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$, (e) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$, (f) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$.

1.12 Sprawdź metodą zerojedynkową, które z podanych wyrażeń są tautologiami:

(a) $(q \vee r) \Rightarrow (p \vee q)$, (b) $(p \vee q) \vee r \Rightarrow (p \vee r)$, (c) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$,

(d) $[p \vee (q \wedge \sim p)] \Rightarrow q$, (e) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

1.13 Sprawdź metodą zerojedynkową, które z poniższych wyrażeń są prawami logicznymi:

(a) $\sim (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow (p \vee q)$, (b) $[(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,

(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$, (d) $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (q \Rightarrow p)$,

(e) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$, (f) $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$,

(g) $(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow q$, (h) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$,

(i) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$, (j) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

1.14 Uzupełnij formuły tak, aby otrzymać zdania prawdziwe

(a) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$, $\sim (a \cdot b = 0) \Leftrightarrow \ldots \wedge \ldots$

(b) $|x| = 1 \Leftrightarrow \ldots \vee \ldots$, $\sim |x| = 1 \Leftrightarrow \ldots \wedge \ldots$

(c) $x^2 \geqslant 1 \Leftrightarrow \ldots\ ?\ \ldots$, $\sim x^2 \geqslant 1 \Leftrightarrow \ldots\ ?\ \ldots$

(d) $(x-1)(x+2) < 0 \Leftrightarrow \ldots\ ?\ \ldots$, $\sim (x-1)(x+2) < 0 \Leftrightarrow \ldots\ ?\ \ldots$

(e) $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow \ldots\ ?\ \ldots$, $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0 \Leftrightarrow \ldots\ ?\ \ldots$.

1.15 Rozważmy funkcje zdaniowe:

(a) $x^2 + 8 = 0$ (b) $x^2 > 4$ (c) $x = 2$ (d) $x^2 > 0$ (e) $x^2 = 4$ (f) $x < -2$

Którymi z powyższych funkcji zdaniowych można uzupełnić następujące implikację tak, aby były one prawdziwe dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$

$$x > 2 \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow x > 2$$

$$|x| > 2 \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow |x| > 2$$

Analiza matematyczna

2. Funkcje zdaniowe i zbiory

Stosujemy oznaczenia:
$\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych,
$\mathbb{R}_+$ – zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych,
$\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych.

2.1 Dla każdej z poniższych funkcji zdaniowych wyznacz zbiór tych wszystkich elementów x, które spełniają funkcję zdaniową.

(a) $p(x):\ x^2 > 1, \quad x \in \mathbb{R}$
(b) $q(x):\ x^2 - x + 1 \leqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}$
(c) $r(x):\ \sin^2 x = \dfrac{1}{2}, \quad x \in \left\langle -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{2} \right\rangle$
(d) $s(x):\ (x^2 - 3x + 2 \leqslant 0) \vee (|x + 11| < 2), \quad x \in \mathbb{R}$
(e) $t(x):\ (2x - 1 = |1 - 2x|) \wedge (4x^2 - 1 \leqslant 0), \quad x \in \mathbb{R}$
(f) $u(x):\ (2x + |x| \leqslant 0) \Rightarrow (x^2 = 1), \quad x \in \mathbb{R}$
(g) $w(x):\ (|x + 1| - |x| + x = 0) \Leftrightarrow (x^2 - x - 1 = 0), \quad x \in \mathbb{R}$

2.2 Sprawdź, które zdania są prawdziwe, a które fałszywe.

(a) $(\exists\, x \in \mathbb{R}:\ 10^x < 0) \Rightarrow \left(\forall\, x \in \mathbb{R}:\ \cos x \leqslant 2^0\right)$
(b) $(\exists\, x \in \mathbb{R}:\ 10^x > 0) \Rightarrow \left(\forall\, x \in \mathbb{R}:\ \cos x \leqslant 2^0\right)$
(c) $\left(\forall\, a \in \mathbb{R}:\ \sin a < 4^0\right) \Leftrightarrow \left(\exists\, b \in \mathbb{R}:\ \cos x \geqslant (4{,}32)^0\right)$
(d) $\forall\, x \in \mathbb{R}:\ (2^x > 1) \vee (x \leqslant 0)$
(e) $\exists\, x \in \mathbb{Q}:\ (x^2 = 10) \wedge (|x| < 4)$
(f) $\exists\, x \in \mathbb{R}:\ (x^2 = 10) \wedge (|x| < 4)$
(g) $\forall\, x \in \mathbb{R}:\ (x^2 = 4) \Rightarrow (x = 2)$
(h) $\forall\, x \in \mathbb{R}:\ (x = -2) \Rightarrow (x^2 = 4)$
(i) $\exists\, x \in \mathbb{R}:\ (x^2 = 4) \Rightarrow (x = 2)$
(j) $\forall\, a \in \mathbb{R}_+\, \forall\, b \in \mathbb{R}_+:\ \sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
(k) $\exists\, a \in \mathbb{R}_+\, \forall\, b \in \mathbb{R}_+:\ \sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
(l) $\forall\, a \in \mathbb{R}_+\, \exists\, b \in \mathbb{R}_+:\ \sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
(m) $\exists\, a \in \mathbb{R}_+\, \exists\, b \in \mathbb{R}_+:\ \sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
(n) $\forall\, a \in \mathbb{R}_+\, \forall\, b \in \mathbb{R}_+:\ (a + b = 0) \Rightarrow \left(\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$
(o) $\forall\, a \in \mathbb{R}_+\, \forall\, b \in \mathbb{R}_+:\ \left(\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \Rightarrow (a + b = 0)$
(p) $\forall\, a \in \mathbb{R}_+\, \forall\, b \in \mathbb{R}_+:\ \left(\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \Rightarrow (a \cdot b = 0)$

2.3 Uzupełnij zapisy tak, aby otrzymać zdania prawdziwe:

(a) $x \in A \cap B \Leftrightarrow \ldots\, ?\, \ldots \qquad x \notin A \cap B \Leftrightarrow \ldots\, ?\, \ldots$
(b) $x \in A \setminus B \Leftrightarrow \ldots\, ?\, \ldots \qquad x \notin A \setminus B \Leftrightarrow \ldots\, ?\, \ldots$
(c) $x \in A \cup B \Leftrightarrow \ldots\, ?\, \ldots \qquad x \notin A \cup B \Leftrightarrow \ldots\, ?\, \ldots$

2.4 A i B oznaczają zbiory niepuste. Jaki jest związek między tymi zbiorami, jeśli:

(a) $A \cup B \subset B$, (b) $A \cup B = B$, (c) $A \cap B = B$, (d) $A \subset A \cap B$, (e) $A \subset A \setminus B$.

2.5 Które z poniższych równości są prawami rachunku zbiorów? Odpowiedź uzasadnij rysując odpowiednie diagramy.

(a) $A \cap (A \cup B) = A$, (b) $A \cup (A \cap B) = B$, (c) $A \cap A = A$, (d) $A \cup A = A$,
(e) $(A \setminus B) \cup B = A$, (f) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$, (g) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$, (h) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$,
(i) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$, (j) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$, (k) $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (B \cap D)$.

Analiza matematyczna

3. Zbiory cd.

3.1 Podać elementy następujących zbiorów:

(a) $\emptyset$, (b) $\{\emptyset\}$, (c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, (d) $\{\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

(e) $\{a, b, c\}$, (f) $\{\{a, b\}, c\}$, (g) $\{\{a\}, a, b, \{a, b\}\}$, (h) $\{\{\{a\}\}, \{a\}, a\}$,

(i) $\{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 3\}$, (j) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\}$, (k) $\{t \in \mathbb{Z} : 6z^3 + 11z^2 - 3z - 2 = 0\}$

3.2 Zbadać, jakie zawierania zachodzą w każdej z następujących par zbiorów:

(a) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, d\}$;

(b) $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$;

(c) $A = \{x \in \mathbb{N} : x > 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{N} : y > 0\}$;

(d) $A = \{ax + b + 2 : a, b \in \mathbb{R}\}$, $B = \{bx + a : a, b \in \mathbb{R}\}$, x jest pewną ustaloną liczbą rzeczywistą;

(e) A – zbiór równoległoboków, B – zbiór kwadratów;

(f) A – zbiór równoległoboków, B – zbiór trapezów.

3.3 Wyznaczyć $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$ dla następujących zbiorów:

(a) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$;

(b) $A = \{\{a, b\}, c\}$, $B = \{c, \{d\}\}$;

(c) $A = \{a \in \mathbb{N} : a < \frac{13}{2}\}$, $B = \{b \in \mathbb{N} : b \geqslant 7\}$;

(d) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} : y^2 + y > 0\}$;

3.4 Dowieść, że dla wszystkich zbiorów A, B i C zachodzą następujące implikacje:

(a) $(A \subset B) \wedge (C \subset D) \Rightarrow (A \cap C \subset B \cap D)$;

(b) $(A \subset B) \wedge (C \subset D) \Rightarrow (A \cup C \subset B \cup D)$;

(c) $(A \subset B) \wedge (C \subset D) \Rightarrow (A \setminus D \subset B \setminus C)$;

(d) $(A \subset B) \Rightarrow (C \setminus B \subset C \setminus A)$;

(e) $(A \setminus B = B \setminus A) \Rightarrow (A = B)$;

(f) $(A \subset B) \Leftrightarrow [A \cup (B \setminus A) = B]$;

(g) $(A \subset B) \Leftrightarrow \{(B \subset C) \Rightarrow [(C \setminus A) \cap (C \setminus B) = C \setminus B]\}$.

3.5 Zbadać, jakie relacje inkluzji (zawierania) zachodzą między zbiorami A, B i C, jeśli prawdziwa jest równość:

(a) $(A \cap B) \cup (C \cap B) = B$;

(b) $(A \cup B) \cap (C \cup B) = B$;

(c) $(A \setminus C) \cup B = A \cup B$;

(d) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$;

(e) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = A \cap C$.

3.6 Wyznaczyć iloczyny kartezjańskie $A \times B$ i $B \times A$ dla następujących zbiorów A i B. Wyznaczone zbiory zaznaczyć na płaszczyznie.

(a) $A = \{n \in \mathbb{N} : 2 \leqslant n \leqslant 4\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} : 3 < n < 6\}$;

(b) $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$;

(c) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 2, 3\}$;

(d) $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leqslant 1\}$;

(e) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1 \vee 1 < x\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leqslant 1\}$.

3.7 Niech $X = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 4\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leqslant y \leqslant 3\}$. Narysuj zbiory:

(a) $X \times Y$,

(b) $A = \{(x, y) : (x, y) \in X \times Y \text{ i } x = 1\}$,

(c) $B = \{(x, y) : (y, x) \in Y \times X \text{ i } y = 0\}$.

3.8 Niech $A = \{a, b, \Pi\}$, $B = \{2, 3, +\}$. Wypisz elementy zbiorów:

(a) $A \times B$,

(b) $B \times \{(1, 2)\}$,

(c) $((A \times B) \cap \{(\Pi, 2)\}) \times B$,

(d) $(A \setminus \{a, b\}) \times (B \cup \{\Pi\})$,

(e) $(A \setminus \{(a, b)\}) \times \{2\}$.

3.9 Niech dane będą następujące zbiory: $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{X, Y\}$. Obliczyć iloczyn kartezjański $P = A \times B \times C$.

3.10 Niech dane będą następujące zbiory: $\mathbb{N}$ zbiór liczb naturalnych, $B = \{a, b\}$, $C = \{X, Y\}$. Sprawdzić, który z następujących ciągów należy do iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{N} \times B \times C$:

(a) $(1, a, X)$,

(b) $(a, 2, Y)$,

(c) $(-3, b, Y)$,

(d) $(100, a, b, X)$.

3.11 Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D zachodzi równość

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

3.12 Sprawdzić, czy prawdziwe są następujące równości:

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

(c) $A \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C)$;

(d) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$.

3.13 Obliczyć $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, gdy

(a) $A_n = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant n\}$; (b) $A_n = \{x \in \mathbb{R} : -n \leqslant x \leqslant n\}$; (c) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leqslant \frac{1}{n}\right\}$;

(d) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant n\right\}$; (e) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 3 - \frac{1}{n}\right\}$;

(f) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 + \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 3 + \frac{1}{n}\right\}$; (g) $A_n = \left(-2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{2}{n}\right)$; (h) $A_n = (10 - n, 12 + n]$;

(i) $A_n = [n - 3, 2n + 2)$; (j) $A_n = \left[\frac{4n + 6}{n + 1}, \frac{14n - 1}{2n + 1}\right]$; (k) $A_n = \left(-\frac{n}{2n^2 + 1}, \frac{n^2}{n^3 + 3}\right) \cup \left[\frac{n^2 + 10}{n + 1}, \infty\right)$.

3.14 Ile jest liczb naturalnych od 1 do 100 niepodzielnych ani przez 2, ani przez 3, ani przez 5?

3.15 W pewnej klasie 20 uczniów zdaje maturę z matematyki, 16 z geografii i 14 z fizyki. Ilu uczniów jest w tej klasie, jeżeli każdy z nich zdaje maturę z co najmniej jednego z wymienionych przedmiotów, nikt nie zdaje matury ze wszystkich trzech przedmiotów, 10 uczniów zdaje matematykę i fizykę, 6 matematykę i geografię, a 4 fizykę i geografię?

3.16 W 30-osobowej klasie 20 osób uczy się języka angielskiego, 15 osób języka niemieckiego, a 10 osób języka francuskiego. Spośród nich 5 osób uczy się angielskiego i francuskiego, 6 osób angielskiego i niemieckiego, a 6 osób niemieckiego i francuskiego. Ile osób uczy się wszystkich trzech języków?

3.17 Wyznacz wszystkie podzbiory zbioru

(a) $\emptyset$, (b) $\{a\}$, (c) $\{2, 7, \pi\}$.

3.18 Ile podzbiorów mają następujące zbiory?

(a) $\{1, 3, 5, 7\}$, (b) $\{x \in \mathbb{N} : x^2 < 150\}$.

Analiza matematyczna

4. Relacje

4.1 Dla następujących relacji w zbiorze $S = \{0, 1, 2, 3\}$ określ, które z własności (zwrotność, symetria, antysymetria, przechodniość, spójność) są spełnione:

(a) $(m, n) \in \rho$, jeśli $m + n = 3$,

(b) $(m, n) \in \rho$, jeśli $m - n$ jest liczbą parzystą,

(c) $(m, n) \in \rho$, jeśli $m \leqslant n$,

(d) $(m, n) \in \rho$, jeśli $m + n \leqslant 4$.

4.2 W zbiorze $\mathbb{N}$ (liczby naturalne) określone są następujące relacje:

(a) $(m, n) \in \rho$, jeśli $m + n = 5$,

(b) $(m, n) \in \rho$, jeśli $\max\{m, n\} = 2$,

(c) $(m, n) \in \rho$, jeśli $\min\{m, n\} = 2$.

Które z własności (zwrotność, symetria, antysymetria, przechodniość, spójność) są przez te ralacje spełnione?

4.3 Określ, jakie własności mają następujące relacje w zbiorze $\mathbb{Z}$:

(a) $x\rho y$, jeśli x i y są tej samej parzystości,

(b) $x\rho y$, jeśli x i y są względnie pierwsze,

(c) $x\rho y$, jeśli $x|y$ (x jest dzielnikiem liczby y),

(d) $x\rho y$, jeśli $x|y$ i $y|x$,

(e) $x\rho y$, jeśli $x = y + 1$.

4.4 Określ, jakie własności mają następujące relacje w zbiorze $\mathbb{R}$:

(a) $x\rho y$, jeśli $|x| < |y|$,

(b) $x\rho y$, jeśli $|x| \leqslant |y|$,

(c) $x\rho y$, jeśli $|x| = |y|$,

(d) $x\rho y$, jeśli $xy > 0$,

(e) $x\rho y$, jeśli $xy \geqslant 0$,

(f) $x\rho y$, jeśli $xy = 0$.

4.5 Jakie własności mają następujące relacje określone w dowolnym zbiorze A:

(a) relacja pusta $R = \emptyset \subset A \times A$,

(b) relacja przekątniowa $\nabla_A = \{(a, a) : a \in A\} \subset A \times A$,

(c) relacja pełna $\Delta_A = A \times A$?

4.6 Sprawdź, czy następujące relacje są relacjami równoważności:

(a) X – zbiór prostych na płaszczyznie, $x\rho y$ jeśli x i y są prostopadłe,

(b) X – zbiór prostych na płaszczyznie, $x\rho y$ jeśli x i y są równoległe,

(c) X – zbiór ludzi, $x\rho y$ jeśli x i y mają wspólnego rodzica,

(d) X – zbiór ludzi, $x\rho y$ jeśli x i y mają wspólną matkę,

(e) X – zbiór ludzi, $x\rho y$ jeśli x i y urodzili się w tym samym dniu,

(f) X – zbiór ludzi, $x\rho y$ jeśli x i y jeśli między chwilami urodzenia się x i y nie minęło więcej niż 24 godziny,

(g) X – zbiór skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$, $x\rho y$ jeśli x i y zawierają tyle samo liczb parzystych,

(h) $X = \mathbb{Z}$, $n \geqslant 2$ – ustalona liczba naturalna, $x\rho y$ jeśli $n|x - y$,

(i) $X = \mathbb{Z}$, $n \geqslant 2$ – ustalona liczba naturalna, $x\rho y$ jeśli $n|x + y$,

(j) $X = \mathbb{Z}$, $n \geqslant 2$ – ustalona liczba naturalna, $x\rho y$ jeśli $n|xy$,

4.7 Zbadać, czy następujące funkcje są różnowartościowe:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 10$,

(b) $f : (-\infty, -2\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 10$,

(c) $f : (-1, 2) \to \langle 0, \infty)$, $f(x) = x^2 + 4x + 10$,
(d) $f : (0, \pi) \to \langle 0, 1\rangle$, $f(x) = \sin x$,
(e) $f : (0, \pi) \to \langle 0, 1\rangle$, $f(x) = \sin \frac{1}{2}x$,
(f) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$,
(g) $f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^2 x$,
(h) $f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^3 x$.

4.8 Zbadać, czy następujące funkcje są "na":
(a) $f : (1, 2) \to \langle 3, 6\rangle$, $f(x) = x^2 - x + 3$,
(b) $f : \langle 0, 1\rangle \to \left\langle \dfrac{5}{2}, 3 \right\rangle$, $f(x) = x^2 - x + 3$,
(c) $f : (1, 3) \to \left(1, \dfrac{13}{4}\right)$, $f(x) = -x^2 + 3x + 1$,
(d) $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, $f(x) = \dfrac{x-4}{2x+1}$,
(e) $f : \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right) \to \langle -1, 1\rangle$, $f(x) = \sin x$,
(f) $f : \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right) \to \langle -1, 1\rangle$, $f(x) = \sin x$.

4.9 Zbadać, czy następujące funkcje są odwracalne. Jeśli tak, to wyznaczyć funkcje odwrotne.
(a) $f : (-\infty, 1\rangle \to \langle 1, \infty)$, $f(x) = 1 + \sqrt{1-x}$,
(b) $f : \langle 2, 6\rangle \to \langle -9, 0\rangle$, $f(x) = x^2 - 6x$,
(c) $f : (0, 3) \to (-9, 0)$, $f(x) = x^2 - 6x$,
(d) $f : \langle 3, \infty) \to \langle -9, \infty)$, $f(x) = x^2 - 6x$,
(e) $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$,
(f) $f : (-\infty, -3) \to (2, \infty)$, $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$.

4.10 Dla następujących wzorów dobrać dziedzinę i przeciwdziedzinę tak, aby funkcja była odwracalna i wyznaczyć funkcję odwrotną.
(a) $f(x) = -2x^2 - x + 4$,
(b) $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}x + 1$,
(c) $f(x) = \dfrac{4x-1}{4x+1}$,
(d) $f(x) = 2 - \sqrt{1+2x}$,
(e) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x+1}$,
(f) $f(x) = (x+8)^4 - 16$.

Analiza matematyczna

5. Ciągi

5.1 Zbadaj, czy ciągi o podanych wzorach ogólnych są monotoniczne:

(a) n^2+4n+2; (b) $-2n^2+8n+7$; (c) $\dfrac{\sqrt{4n^2-28n+49}}{|7-2n|}$; (d) $\dfrac{2^n}{n!}$; (e) $\dfrac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+1}$.

5.2 Zbadaj, czy ciągi o podanych wzorach ogólnych są monotoniczne:

(a) n^3-2n+1; (b) $\dfrac{n+\sin n}{2n}$; (c) $\dfrac{n+1}{n^2+n+1}$; (d) $n\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

5.3 Oblicz granice ciągów o podanych wyrazach ogólnych:

(a) $\dfrac{2n^2+1}{n+2}$; (b) $\dfrac{n^3+2n-1}{1-4n^2}$; (c) $\dfrac{5n^2+3n-1}{2n^3-2n+1}$; (d) $\dfrac{n^2+n+2}{3n^2-n-1}$; (e) $\dfrac{\frac{1}{2}n^3-2n+\frac{5}{2}n+6}{(1-\frac{1}{2}n)(\frac{2}{3}n^2+\frac{1}{4}n-\frac{1}{10})}$;

(f) $\dfrac{(1-2n)^3}{(2n+3)^2(1-7n)}$; (g) $\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

5.4 Oblicz granice ciągów o podanych wyrazach ogólnych:

(a) $\dfrac{-2n^5-3n^3-1}{\frac{1}{2}n^4-n+100}$; (b) $\dfrac{(2n-1)^3}{(1-3n)(2n+6)^2}$; (c) $\dfrac{(1-2n)^{10}}{(n^2+1)^5}$; (d) $\dfrac{2n^2+(-1)^n n}{5+n^2}$;

(e) $\dfrac{1-4n^2}{2+4+6+\ldots+2n}$; (f) $\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{7n^3+n-1}$;

5.5 Oblicz granice ciągów o podanych wyrazach ogólnych:

(a) $\dfrac{3+\sqrt{n}}{1-3n}$; (b) $\dfrac{3\sqrt[3]{n}+4}{6\sqrt[3]{n}-1}$; (c) $\dfrac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}$; (d) $\dfrac{\sqrt[4]{n^8+1}}{\sqrt[5]{n^{10}+1}}$; (e) $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$;

(f) $\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+4n}-2n}$; (g) $\sqrt[3]{n^3+4n^2}-n$.

5.6 Oblicz granice ciągów o podanych wyrazach ogólnych:

(a) $\dfrac{\sqrt{n^2+5}-n}{\sqrt{n^2+5}+n}$; (b) $\dfrac{n}{\sqrt[3]{27n^3-n}-n}$; (c) $\sqrt{2n-1}-\sqrt{n+7}$; (d) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+6}-n}$;

(e) $\sqrt{9n^2+1}-3n$; (f) $\dfrac{\sqrt{3n^2+5}}{3n+1}$; (g) $\dfrac{\sqrt{4n^2+9}}{2n+1}$; (h) $\dfrac{2+\sqrt{n}}{1-2n}$; (i) $\dfrac{(3-\sqrt{n})^2}{5+4n}$;

(j) $\sqrt{\dfrac{3n-2}{n+10}}$. (k) $\dfrac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$; (l) $\sqrt{n^2-1}-n$;

5.7 Oblicz granice ciągów o podanych wyrazach ogólnych:

(a) $\dfrac{4^{n-1}+5}{2^{2n}-7}$; (b) $\dfrac{4\cdot 3^{n+2}+2\cdot 4^n}{5\cdot 2^n+4^{n+1}}$; (c) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\cdot\dfrac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}$; (d) $\dfrac{1+2+4+\ldots+2^n}{2^n}$.

5.8 Oblicz granice ciągów o podanych wyrazach ogólnych:

(a) $\dfrac{4-6^n}{8^n-16^n}$; (b) $\dfrac{1-7\cdot 3^{2n}}{4\cdot 9^n+7}$; (c) $\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$; (d) $\dfrac{5\cdot 3^{n+1}-1}{4\cdot 9^n+7}$;

(e) $\dfrac{2^n+(-2)^n}{2^n}$.

5.9 Oblicz granice ciągów o podanych wyrazach ogólnych:

(a) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-2n}$; (b) $\left(\dfrac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$; (c) $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$; (d) $\left(1-\dfrac{4}{n}\right)^{-n+4}$.

5.10 Oblicz granice ciągów o podanych wyrazach ogólnych:

(a) $\left(\dfrac{n}{n-6}\right)^{2n}$; (b) $\left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{n}$; (c) $\left(\dfrac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+5}$; (d) $\left(1+\dfrac{1}{n^2+3}\right)^{2n^2-4}$.

5.11 Oblicz granice ciągów o podanych wyrazach ogólnych:

(a) $\sqrt[n]{\pi^n + 3^n + (3{,}14)^n}$; (b) $\sqrt[n]{5 \cdot 7^n + 7 \cdot 5^n}$; (c) $\sqrt[n]{(0{,}3)^n + (0{,}33)^n + (0{,}333)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$;

(d) $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n + n}$.

5.12 Oblicz granice ciągów o podanych wyrazach ogólnych:

(a) $\sqrt[n]{2 \cdot 3^n + 4 \cdot 7^n}$; (b) $\sqrt[n]{2n + n^2}$; (c) $\sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n}$; (d) $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n}$;

(e) $\sqrt[n]{2n + \sin n}$; (f) $\sqrt[n]{2^n + (-1)^n}$.

Analiza matematyczna

6. Granica funkcji. Ciągłość.

6.1 Obliczyć następujące granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{x+2}$; (b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$; (c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$; (d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x-6}$; (e) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$.

6.2 Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x+1}$, (b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{27-x^3}{x-3}$, (c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{x+1}$, (d) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^3+125}{2x^2-50}$, (e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$.

6.3 Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$, (b) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{12-2x}{\sqrt{x+3}-3}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$, (d) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{\sqrt{2+3x}-1}{\sqrt{1-9x}-2}$.

6.4 Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{10-x}}{1-x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^+1}-\sqrt{x-1}}{1-\sqrt{x+1}}$, (c) $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}}\dfrac{25-4x^2}{\sqrt{6-2x}-\sqrt{\frac{2}{5}x}}$.

6.5 Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{3\sin 2x}$, (c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}$.

6.6 Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$, (b) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{8-x}{\sin\frac{\pi x}{8}}$, (c) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}$, (d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}$.

6.7 Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to -\infty}2^{2-x^2}$, (b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2}{(x+1)^2}$, (c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, (d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

6.8 Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x}{\sqrt[3]{8x^3-x}}$, (b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2x^2+x}{x+1}}$, (c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2x^2+x}{x+1}}$, (d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{10x^2}{1-x}$.

6.9 Obliczyć granice jednostronne następujących funkcji:

(a) $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ w punkcie $x=0$, (b) $e^{\frac{1}{1-x^2}}$ w punkcie $x=1$, (c) $\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ w punkcie $x=0$.

6.10 Obliczyć granice jednostronne następujących funkcji:

(a) $xe^{\frac{1}{x}}$ w punkcie $x=0$, (b) $\dfrac{x}{2x+e^{\frac{1}{x-1}}}$ w punkcie $x=1$, (c) $2^{\frac{1}{x-a}}$ w punkcie $x=a$,

(d) $\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3}{3^{\frac{1}{x}}+2}$ w punkcie $x=0$.

6.11 Zbadać ciągłość następujących funkcji:

(a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x+5} & \text{gdy } x\neq -5,\\ -10 & \text{gdy } x=-5.\end{cases}$ (b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & \text{gdy } x\neq 0,\\ 2 & \text{gdy } x=0.\end{cases}$ (c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{|x|} & \text{gdy } x\neq 0,\\ 2 & \text{gdy } x=0.\end{cases}$

Analiza matematyczna

7. Własności funkcji ciągłych.

7.1 Wprowadzamy następujące funkcje:

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right), \qquad \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \cosh 3x$, (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh\frac{x}{3}$, (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{\cosh\frac{1}{x}}$, (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{x}$.

7.2 Dla jakiej wartości parametru a funkcja

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x < 0, \\ a + x^2 & \text{dla } x \le 0 \end{cases}$$

jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych. Narysować wykres tej funkcji ciągłej.

7.3 Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{gdy } |x| < 1, \\ x^3 + b & \text{gdy } |x| \ge 1 \end{cases}$$

jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych.

7.4 Znaleźć przybliżone (z dokładnością do $0{,}125$) rozwiązania równań:

(a) $x^3 = x - 1$, (b) $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = x$, (c) $x^5 = -x + 3$.

7.5 Uzasadnij ze podane równania mają jednoznaczne rozwiązania we wskazanych przedziałach:

(a) $x^3 + 6x - 2 = 0$, $(0, 1)$, (b) $x\sin x = 7$, $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$, (c) $\frac{\sin x}{2} + x = 1$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

(d) $x^{100} + x - 1 = 0$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, (e) $3^x + x = 3$, $(0, 1)$, (f) $x2^x = 1$, $(0, 1)$.

Wyznacz rozwiązania równań a), d) i f) z dokładnością $0{,}125$.

7.6 Uzasadnij, że dowolny wielomian stopnia nieparzystego ma przynajmniej jeden pierwiastek.

7.7 Pewien turysta o godzinie 8^{00} pierwszego dnia wyruszył ze schroniska u podnóża góry i o 20^{00} dotarł do schroniska na szczycie. O 8^{00} następnego dnia wyruszył ze szczytu, by o 20^{00} wrócić tą samą trasą do schroniska na dole. Uzasadnij, że istnieje taki punkt, w którym turysta był w oba dni dokładnie o tej samej godzinie.

7.8 Korzystajac z twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów uzasadnij, ze podane zagadnienia ekstremalne mają rozwiązania:

(a) Wsród stożków wpisanych w kulę o promieniu r istnieje ten, który ma największą objętość.

(b) Wsród trójkątów prostokątnych wpisanych w koło o promieniu r istnieje ten, który ma największy obwód.

(c) Wsród prostokątów wpisanych w trójkąt równoboczny o boku a istnieje ten, który ma największe pole (załóz, ze dwa wierzchołki prostokąta leżą na ustalonym boku trójkąata).

Analiza matematyczna

8. Obliczanie pochodnych

8.1 Obliczyć pochodne następujących funkcji:

(a) $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2{,}5x^2 - 0{,}3x + 0{,}1$, (b) $g(x) = \sqrt[8]{x} + \sqrt[8]{2}$, (c) $h(x) = \sqrt{x} - \frac{4}{x} + \frac{3}{4}\sqrt[4]{3}$,

(d) $f(x)\frac{2x^2}{\sqrt{x}} + \frac{5x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{x}$, (e) $a(t) = 0{,}1t^{-\frac{2}{3}} - \frac{5{,}2}{t^{1,4}} + \frac{2{,}5}{\sqrt[5]{t}}$, (f) $b(x) = \sqrt{x}(x^3 - \sqrt[3]{x} + 1)$.

8.2 Obliczyć pochodne następujących funkcji:

(a) $p(y) = \sqrt[4]{y^3} - \frac{y^8}{0{,}3} + \frac{1}{5y^2}$, (b) $f(z) = \frac{2z^3 - 3z + \sqrt{z} - 1}{\sqrt[3]{z^2}}$, (c) $g(x) = (x^3 - 3x + 2)(x^4 + x^3 - 1)$,

(d) $y(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$, (e) $h(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{3}\right)\left(4x\sqrt[8]{x} + \frac{\sqrt[7]{x^3}}{3x}\right)$,

(f) $f(x) = (\sqrt[3]{x} + 2x)(1 + \sqrt[3]{x^2} + 3x)$.

8.3 Obliczyć pochodne następujących funkcji:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, (b) $f(s) = \left(1 - 2s^{\frac{2}{3}}\right)^4$, (c) $h(t) = \frac{2}{(t^2 - t + 1)^2}$, (d) $d(q) = \frac{1}{\sqrt{4 - q^2}}$,

(e) $k(p) = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + p^2}}$.

8.4 Obliczyć pochodne następujących funkcji:

(a) $v(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}}$, (b) $f(y) = \frac{1}{y - \sqrt{4 + y^2}}$, (c) $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x - 1}} + \frac{5}{\sqrt[4]{(x^2 + 2)^3}}$,

(d) $g(u) = \left(\frac{u}{1 - u}\right)^7$, (e) $k(u) = \frac{1 + u}{\sqrt{1 - u}}$, (f) $h(s) = \sqrt{\frac{1 - s^2}{1 + s^2}}$.

8.5 Obliczyć pochodne następujących funkcji:

(a) $f(x) = \sin x + \cos x$, (b) $g(u) = \frac{u}{1 - \cos u}$, (c) $k(\varphi) = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi$,

(d) $u(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{\alpha}{\sin \alpha}$, (e) $h(x) = \frac{x \sin x}{1 + \tan x}$, (f) $w(t) = 3\sin^2(3t - 1)$.

8.6 Obliczyć pochodne następujących funkcji:

(a) $y(t) = \frac{\sin t}{1 + \cos t}$, (b) $v(x) = \sin \frac{1}{x}$, (c) $y(t) = \sin(\sin t)$, (d) $r(\beta) = \sqrt{1 + 2\tan \beta}$,

(e) $g(u) = \sqrt{1 + \tan\left(u + \frac{1}{u}\right)}$, (f) $j(s) = \cos^2 \frac{1 - \sqrt{s}}{1 + \sqrt{s}}$, (g) $l(x) = \sin^2(\cos 3x)$.

8.7 Obliczyć pochodne następujących funkcji:

(a) $f(x) = x \arcsin x$, (b) $h(t) = \frac{\arcsin t}{\arccos t}$, (c) $f(s) = (\arcsin s)^2$,

(d) $u(y) = y \arcsin y + \sqrt{1 - y^2}$.

8.8 Obliczyć pochodne następujących funkcji:

(a) $a(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$, (b) $x(t) = \arcsin \frac{2}{t}$, (c) $g(v) = \arccos \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}}$,

(d) $f(x) = \arcsin \frac{\sin \alpha \sin x}{1 - \cos \alpha \sin x}$.

8.9 Obliczyć pochodne następujących funkcji:

(a) $f(u) = u^2 \log_3 u$, (b) $g(x) = \ln^2 x$, (c) $u(a) = \frac{a - 1}{\log_2 a}$,

(d) $k(y) = \log_2[\log_3(\log_5 x)]$, (e) $f(x) = 10^{x^2}$, (f) $g(s) = \dfrac{s}{4^s}$, (g) $h(x) = e^{\arcsin 2x}$.

8.10 Obliczyć pochodne następujących funkcji:

(a) $f(k) = \dfrac{1-\ln k}{1+\ln k}$, (b) $\varphi(t) = \log_{\frac{1}{2}}(\arccos 2t)$, (c) $l(\theta) = \sqrt[3]{\ln\sin\dfrac{\theta+3}{4}}$,

(d) $u(t) = 2^{\frac{t}{\ln t}}$, (e) $f(x) = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$, (f) $h(y) = a^y y^a$.

(g) $f(x) = \sin x \cdot e^{\cos x}$, (h) $g(u) = \dfrac{2\sin^2 u}{\cos 2u}$, (i) $h(s) = \arcsin(2\sin s)$,

(j) $f(u) = \sqrt{u+\sqrt{u+\sqrt{u}}}$, (k) $f(x) = \ln\sqrt[4]{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + \arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$

Analiza matematyczna

9. Zastosowania pochodnych

9.1 Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o współrzędnych $(x_0, f(x_0))$, jeśli

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $x_0 = 4$; (b) $f(x) = 2^{x+1}$, $x_0 = 0$;

(c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x_0 = \sin\alpha$ dla pewnego $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

9.2 Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o współrzędnych $(x_0, f(x_0))$, jeśli

(a) $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 4$; (b) $f(x) = 4\arcsin^2 x$, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$; (c) $f(x) = x\log_2 x$, $x_0 = -\dfrac{1}{\ln 2}$.

9.3 Wyznacz x_0 wiedząc, że styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3 + 4x - 20$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma równanie $y = 52x - 148$.

9.4 Wyznacz $x_0 \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ wiedząc, że styczna do wykresu funkcji $f(x) = \sin^2 x + \dfrac{11\pi\sqrt{3}}{12}$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma wzór $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \pi\sqrt{3}$.

9.5 Wykaż, że

(a) dla każdego $x \in (-1, 1)$ spełniona jest równość

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = 2\arctan x.$$

(b) dla każdego $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ spełniona jest równość

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x.$$

(c) dla ka/zdego $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ prawdziwa jest równość

$$3\arccos x = \pi + \arccos(3x - 4x^3).$$

9.6 Wykaż, że

(a) dla każdego $x \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość

$$\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{3}{4} + \cos x\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right).$$

(b) dla każdego $x \in (0, 1)$ prawdziwa jest równość

$$\frac{1}{2}\arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{4} - \arccos\sqrt{x}.$$

9.7 Załóżmy, że a jest pewną ustaloną liczbą rzeczywistą.

(a) Niech $a > e$. Uzasadnij, że dla każdego $x > 1$ spełniona jest nierówność

$$\log_a x < x - 1.$$

(b) Niech $1 < a < e$. Uzasadnij, że dla każdego $x > 0$ spełniona jest nierówność

$$\frac{x}{1+x} < \log_a(1+x).$$

9.9 Uzasadnij, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność

$$\cosh x \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Analiza matematyczna
10. Zastosowania pochodnych II

10.1 Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$,

(e) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$, (f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^{5x}}$, (g) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(\sin(1-x))}$

10.2 Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$, (c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 5x}{\tan 3x}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin 3x}$,

(e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x-\sin x+1}{\sin 2x-\cos x}$, (f) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\cos\ln(x-1)}{\ln(e^x-e)}$, (g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\arctan x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

10.3 Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$, (b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$, (c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$.

10.4 Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$, (b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{2\ln x}\right)$.

10.5 Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x-1)$, (c) $\lim\limits_{x\to 2^-}\ln(x-1)\ln(2-x)$, (d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}\ln x$.

10.6 Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$, (c) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sin(2x-1)\tan\pi x$, (d) $\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3)e^{\frac{1}{x-3}}$.

10.7 Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$, (b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$, (c) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$, (d) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\ln\dfrac{1}{x-2}\right)^{x-2}$.

10.8 Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x)^{\frac{2}{x-\frac{\pi}{2}}}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot 2x)^{\sin x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$, (d) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

10.9 Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji:

(a) $f(x)=x^3-6x^2-15x+2$, (b) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$, (c) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

10.10 Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji:

(a) $f(x)=(x^2-1)e^x$, (b) $f(x)=\sqrt{8x^2-x^4}$, (c) $f(x)=e^{\frac{2x}{1-x^2}}$.

10.11 Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{\ln x}$, (b) $f(x)=x^2\ln x$, (c) $f(x)=e^{-x}x^2$, (d) $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

10.12 Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x) = x^3 - 3x$, (b) $f(x) = x + 1 - e^x$, (c) $f(x) = \sin x - \ln \sin x$, (d) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$,

(e) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$.

10.13 Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

(a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ w przedziale $[-2, 2]$, (b) $f(x) = \arctan x - \dfrac{1}{2} \ln x$ w przedziale $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$,

(c) $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ w przedziale $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

10.14 Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji w podanym przedziale:

(a) $f(x) = x - 2 \ln x$ w przedziale $[1, e]$, (b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ w przedziale $\left[\dfrac{1}{100}, 100\right]$,

(c) $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ w przedziale $[0, 4]$.

10.15 Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia dla następujących funkcji:

(a) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$, (b) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 64x - 11$, (c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$,

(d) $f(x) = x^4 + 4^x$, (e) $f(x) = x \cos(\ln x)$.

10.16 Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia dla następujących funkcji:

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$, (b) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2 + 2x + 4}$, (c) $f(x) = 1 - \ln(x^2 - 4)$,

(d) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^3}$.

Analiza matematyczna

11. Zastosowania pochodnych III

11.1 Wyznaczyć asymptoty dla wykresów następujących funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x + 3}{x - 3}$, (b) $f(x) = x + \dfrac{\sin x}{x}$, (c) $f(x) = \dfrac{x^5}{x^4 - 1}$, (d) $f(x) = e^{1/x} - x$,

(e) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$.

11.2 Wyznaczyć asymptoty dla wykresów następujących funkcji:

(a) $f(x) = xe^{-x}$, (b) $f(x) = \dfrac{x^3}{2 - x^2}$, (c) $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$, (d) $f(x) = \dfrac{x^3}{3(x^2 - 4)}$.

11.3 Zbadaj przebieg zmienności funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{ax}{x + b}$, (b) $f(x) = e^{-x^2}$, (c) $f(x) = x^2 e^{1/x}$, (d) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

11.4 Zbadaj przebieg zmienności funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \arctan x$, (b) $f(x) = (x-1)\ln x$, (c) $f(x) = x^3 e^x$, (d) $f(x) = 2\ln x - \ln^2 x$,

(e) $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$.

11.5 Korzystając z twierdzenia Lagrange'a oblicz przybliżoną wartość:

(a) $\ln \dfrac{201}{200}$, (b) $e^{-0{,}07}$, (c) $\cos 119°$, (d) $\sin 3{,}2$, (e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7{,}7997}}$.

11.6 Korzystając z twierdzenia Lagrange'a oblicz przybliżoną wartość:

(a) $\tan 44°$, (b) $\sqrt[5]{33}$, (c) $10^{0{,}001}$ (*Wskazówka:* $\ln 10 \approx 2{,}30$).

11.7 Korzystając z twierdzenia Lagrange'a udowodnij następujące nierówności:

(a) $3y^2(x-y) < x^3 - y^3 < 3x^2(x-y)$ dla $x > y > 0$,

(b) $e^x > ex$ dla $x > 1$,

(c) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

11.8 Korzystając z twierdzenia Lagrange'a udowodnij następujące nierówności:

(a) $\dfrac{x-y}{1+x^2} \leq \arctan x - \arctan y \leq \dfrac{x-y}{1+y^2}$ dla $x > y > 0$,

(b) $x - y < x^2 \ln x - y^2 \ln y < 3e(x-y)$ dla $1 \leq y < x \leq e$,

(c) $|x^2 \arctan x - y^2 \arctan y| \leq \dfrac{1+\pi}{2}|x-y|$ dla dowolnych $x, y \in [0,1]$,

(d) $\dfrac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ dla $x > 0$.

11.9 Wyznacz pierwszych n składników rozwinięcia Taylora dla funkcji f względem punktu x_0, gdy:

(a) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $n = 4$;

(b) $f(x) = e^{-3x}$, $x_0 = 1$, $n = 4$;

(c) $f(x) = \arctan(x^2)$, $x_0 = 0$, $n = 3$.

11.10 Wyznacz pierwszych n składników rozwinięcia Taylora dla funkcji f względem punktu x_0, gdy:

(a) $f(x) = x \ln x$, $x_0 = 1$, $n = 3$;

(b) $f(x) = \cos^2 2x$, $x_0 = 0$, $n = 5$;

(c) $f(x) = x \tan^2 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$, $n = 3$.

11.11 Korzystając z obliczeń wykonanych w zadaniu 10.9 oblicz przybliżone wartości

(a) $\sin 47^\circ$, (b) $e^{-2{,}94}$, (c) $\arctan 0{,}121$.

Oszacuj błędy otrzymanych przybliżeń.

11.12 Dobierając odpowiednią funkcję f i wyznaczając 4 pierwsze wyrazy jej rozwinięcia Taylora wyznacz przybliżone wartości i oszacuj błędy otrzymanych przybliżeń:

(a) $\cos 0{,}5$, (b) $2^{-3{,}95}$, (c) $\log_2 3{,}98$.

11.13 (*Dla chętnych*) Wykazać, że wielomian

$$w(x) = 2x^5 - \frac{130}{3}x^3 + 360x + C,$$

gdzie C jest dowolną stałą, nie może mieć dwóch różnych pierwiastków w przedziale $(-2, 2)$, ani czterech różnych pierwiastków w przedziale $(-3, 3)$.

Analiza matematyczna

12. Szeregi. Szereg Taylora funkcji.

12.1 Obliczyć z definicji sumy następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{19}{20}\right)^n$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-0{,}001)^{n+1}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

12.2 Obliczyć z definicji sumy następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

12.3 Stosując kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

12.4 Stosując kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2e^n}$.

12.5 Korzystając z kryterium Cauchy'ego rozstrzygnąć, które z poniższych szeregów są zbieżne:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(2n+\frac{1}{n}\right)^n}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

12.6 Korzystając z kryterium Cauchy'ego rozstrzygnąć, które z poniższych szeregów są zbieżne:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\cdot 2^n$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$.

12.7 Stosując kryterium porównawcze zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n-1}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+n+1}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2n^2-1}}$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$.

12.8 Stosując kryterium porównawcze zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+1}}}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\sin\frac{1}{n}}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n}{2n^3-2n+1}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}$; (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n(n+1)(n+2)(n+3)}}$.

12.9 Zbadać zbieżność następujących szregów naprzemiennych:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin^2 n}{n}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

12.10 Zbadać zbieżność następujących szregów naprzemiennych:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+(-1)^n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2}$.

12.11 Rozstrzygnąć, które z podanych szeregów są zbieżne warunkowo, a które bezwzględnie:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n^2]{n}}$.

12.12 Rozstrzygnąć, które z podanych szeregów są zbieżne warunkowo, a które bezwzględnie:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{100^n}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+(-1)^n)^p}$.

12.13 Znaleźć promienie zbieżności i przedziały zbieżności następujących szeregów potęgowych:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(x-\frac{1}{2}\right)^n}{n+1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}x^{2n}}{n4^n}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}(x-3)^n$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n (x-e)^n$.

12.14 Znaleźć promienie zbieżności i przedziały zbieżności następujących szeregów potęgowych:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{3n-1}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)3^n(x+2)^{n-1}$, (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (2+(-1)^n)^n x^n$,

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n(x-1)^{n^2}$, (e) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2^n)\left(x+\frac{2}{3}\right)^n$, (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(n+2)!}{(2n)!}(x-2)^n$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$.

12.15 Rozwinąć funkcję f w szereg Taylora wokół punktu x_0, gdy:

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$, (b) $f(x) = e^{2x}$, $x_0 = 1$, (c) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi$,

(d) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, (e) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$.

12.16 Rozwinąć funkcję f w szereg Taylora wokół punktu x_0, gdy:

(a) $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x}$, $x_0 = -1$, (b) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$, $x_0 = 2$, (c) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$,

(d) $f(x) = \sqrt{x^3}$, $x_0 = 1$, (e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$.

12.17 Rozwinąć w szereg Maclaurina następujące funkcje:

(a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, (b) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, (c) $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$, (d) $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$,

(e) $f(x) = xe^x$, (f) $f(x) = \frac{3x+1}{1-x}$, (g) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

12.18 Rozwinąć w szereg Maclaurina następujące funkcje:

(a) $f(x) = x\sin(x^2)$, (b) $f(x) = e^{-x^2}$, (c) $f(x) = \cos 4x$,

(d) $f(x) = \cos^2 x$ *Wsk.:* $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$,

(e) $f(x) = \dfrac{4x+6}{x-2}$ *Wsk.:* Rozwinąć najpierw funkcję $\dfrac{1}{x-2}$,

(f) $f(x) = \dfrac{x-3}{2x^2-6x+4}$ *Wsk.:* Wyznaczyć A, B, a, b takie, że $f(x) = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b}$.

Analiza matematyczna

13. Całka nieoznaczona

13.1 Oblicz następujące całki nieoznaczone używając podstawowych wzorych na całki z funkcji elementarnych:

(a) $\int \sqrt{x}dx$, (b) $\int \sqrt[5]{x^7}dx$, (c) $\int \frac{4}{x^3}\,dx$, (d) $\int \frac{(x^2-1)^3}{x}dx$, (e) $\int (3+2\sqrt[4]{x})^3 dx$,

(f) $\int 2\cdot 10^x dx$, (g) $\int \frac{15^{x+1}}{5^{10}}\,dx$, (h) $\int 3^{x+3}5^{x-5}dx$, (i) $\int \frac{4}{1+x^2}\,dx$, (j) $\int \frac{x^2dx}{1+x^2}$,

(k) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,dx$, (l) $\int \tan^2 x dx$, (m) $\int \cosh x dx$, (n) $\int \cosh^2 x dx$.

13.2 Oblicz następujące całki nieoznaczone:

(a) $\int 3{,}4x^{-0{,}17}dx$, (b) $\int \frac{20\,dx}{\sqrt{x}}$, (c) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^3+x^2}{x^3}dx$, (d) $\int \frac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x}-1}\,dx$,

(e) $\int \frac{x-2\sqrt[3]{x}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}\,dx$, (f) $\int e^{-3x}dx$, (g) $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$, (h) $\int (\sin x+\cos x)^2 dx$,

(i) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, (j) $\int \frac{1-x^2-\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\,dx$, (k) $\int \frac{1}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\,dx$,

(l) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$, (m) $\int \frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x}\,dx$.

13.3 Korzystając z poprzednich zadań i stosując wzór $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)$, gdzie F jest pierwotną funkcji f oblicz następujące całki:

(a) $\int \sin 4x\,dx$, (b) $\int \tan^2 7x\,dx$, (c) $\int \sinh\frac{2}{3}x\,dx$, (d) $\int \cos\frac{2x}{5}\,dx$, (e) $\int \cosh^2\frac{x}{9}\,dx$,

(f) $\int 4^{4x}\,dx$, (g) $\int e^{-3{,}2x}\,dx$, (h) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$, (i) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$, (j) $\int \frac{1}{1+5x^2}\,dx$,

(k) $\int \frac{1}{2+x^2}\,dx$, (l) $\int \frac{1}{2+5x^2}\,dx$, (m) $\int \frac{1}{\cos^2 8x}\,dx$, (n) $\int \frac{5}{\sin^2\frac{2}{9}x}\,dx$.

13.5 Oblicz następujące całki metodą podstawiania:

(a) $\int (2x+8)^6\,dx$, (b) $\int \frac{1}{\sqrt{3x-7}}\,dx$, (c) $\int e^{7-2x}\,dx$, (d) $\int \frac{1}{\sin^2\left(1-\frac{1}{2}x\right)}\,dx$,

(e) $\int x^2e^{x^3}\,dx$, (f) $\int x\sqrt{x^2+4}\,dx$, (g) $\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$, (h) $\int x^7\sqrt[5]{x^8-5}\,dx$,

(i) $\int \tan x dx$, (j) $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$, (k) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$, (l) $\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}dx$, (m) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$,

(n) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$, (o) $\int \frac{x^4}{1+x^{10}}\,dx$, (p) $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

13.6 Oblicz następujące całki metodą podstawiania:

(a) $\int x^4\sqrt{2+x^5}dx$, (b) $\int x\sin x^2 dx$, (c) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$, (d) $\int \frac{\arcsin^{17} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$,

(e) $\int \frac{\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}\,dx$, (f) $\int \frac{dx}{\tan^3 x\cos^2 x}$, (g) $\int \frac{\cos x\,dx}{1+4\sin^2 x}$, (h) $\int \frac{2^x}{1+4^x}\,dx$,

(i) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-3e^{2x}}}\,dx$, (j) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$, (k) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, (l) $\int \frac{2^x}{\sqrt[5]{2^x-100}}\,dx$,

(m) $\int \frac{\tan x\,dx}{(1+\tan^4 x)\cos^2 x}$, (n) $\int \frac{2x+5}{x^2+5x-9}\,dx$, (o) $\int \frac{dx}{x\ln x}$, (p) $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3+x^2+x+99}\,dx$,

(q) $\int \frac{e^x\,dx}{4+3e^x}$, (r) $\int \frac{dx}{x(3\ln x+5)}$, (s) $\int \frac{\cot x\,dx}{\ln(\sin x)}$.

13.7 Oblicz następujące całki metodą całkowania przez części:

(a) $\int x\sin x dx$, (b) $\int xe^{2x}dx$, (c) $\int x^2\cos x dx$, (d) $\int \ln x dx$, (e) $\int x^3\ln^2 x dx$,

(f) $\int \sin^2 x dx$, (g) $\int e^x\cos x dx$, (h) $\int \arctan x\,dx$, (i) $\int x\arctan x\,dx$, (j) $\int \arcsin x\,dx$,

(k) $\int \sin(\ln x)\,dx$, (l) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$, (m) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

13.8 Oblicz następujące całki metodą całkowania przez części:

(a) $\int x^3\,3^x\,dx$, (b) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$, (c) $\int \sqrt[5]{x^2}\log_2^3 x\,dx$, (d) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, (e) $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$,

(f) $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\,dx$, (g) $\int \sin 3x\cos 5x\,dx$, (h) $\int \cos\sqrt{x}\,dx$, (i) $\int \frac{x\cos x\,dx}{\sin^3 x}$,

(j) $\int x\tan^2 x\,dx$, (k) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$, (l) $\int e^{-3x}\sin 5x\,dx$.

13.9 Oblicz następujące całki z funkcji wymiernych:

(a) $\int \frac{1}{4-x^2}\,dx$, (b) $\int \frac{1}{x^2-x+\frac{1}{4}}\,dx$, (c) $\int \frac{1}{x^2-10x+26}\,dx$, (d) $\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx$,

(e) $\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx$, (f) $\int \frac{x-7}{x^2+x-2}dx$, (g) $\int \frac{2x-1}{x^2-x+10}dx$,

(h) $\int \frac{5x^2-3}{(x-2)(3x^2+2x-1)}\,dx$, (i) $\int \frac{x^2}{(x-2)^3(x+1)}\,dx$, (j) $\int \frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)}\,dx$.

13.10 Oblicz następujące całki z funkcji wymiernych:

(a) $\int \frac{x+5}{x^2+10x+25}\,dx$, (b) $\int \frac{1}{x^2+10x+25}\,dx$, (c) $\int \frac{x+3}{x^2+x+1}\,dx$,

(d) $\int \frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5}\,dx$, (e) $\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$, (f) $\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$,

(g) $\int \frac{1}{x^4+x^2-2}\,dx$, (h) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$, (i) $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$.

13.11 Oblicz całki z funkcji trygonometrycznych[1]:

(a) $\int \sin^3 x\,dx$, (b) $\int \cos^4 x\,dx$, (c) $\int \cos^4 x \sin^3 x\,dx$, (d) $\int \frac{dx}{\sin x}$, (e) $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$,

(f) $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx$, (g) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx$, (h) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$

13.12 Oblicz całki z funkcji trygonometrycznych:

(a) $\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$, (b) $\int \frac{1}{\cos^4 x \sin x}\,dx$, (c) $\int \frac{1}{\sin^2 x+\tan^2 x}\,dx$, (d) $\int \frac{1}{5-3\cos x}\,dx$,

(e) $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx$, (f) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$, (g) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$, (h) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx$.

13.13 Stosując podstawienie Eulera[2] lub inne metody obliczyć całki:

(a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$, (b) $\int \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$, (c) $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$.

13.14 Stosując podstawienie Eulera lub inne metody obliczyć całki:

(a) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\,dx$, (b) $\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}\,dx$, (c) $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}\,dx$.

---

[1] W przypadku braku lepszego pomysłu można stosować tzw. **podstawienie uniwersalne**. Stosuje się je do całek postaci

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx,$$

gdzie $R(u,v)$ jest wyrażeniem wymiernym zmiennych u i v. Ma ono postać

$$t = \tan\frac{x}{2} \qquad (x = 2\arctan t)$$

Wtedy

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

[2] **Podstawienia Eulera** dotyczą całek postaci

$$\int F\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx,$$

gdzie $F(x,z)$ jest wyrażeniem wymiernym zmiennych x i z.

(1) *Pierwsze podstawienie Eulera* (gdy $a>0$):

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}x+y \qquad \left(x=\frac{y^2-c}{b+2\sqrt{a}y}\right)$$

$$\frac{2dy}{b+2\sqrt{a}y} = \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

(2) *Drugie podstawienie Eulera* (gdy $c>0$):

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c}+xy \qquad \left(x=\frac{b-2\sqrt{c}y}{y^2-a}\right)$$

$$dx = \frac{2\sqrt{c}(a-y^2)+2y(2\sqrt{c}y-b)}{(a-y^2)^2}\,dy$$

(3) *Trzecie podstawienie Eulera* (gdy trójmian ax^2+bx+c ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste α,β):

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)y \qquad \left(x=\frac{a\beta-\alpha y^2}{a-y^2}\right)$$

$$dx = \frac{2ya(\beta-\alpha)}{(y^2-a)^2}\,dy$$

Analiza matematyczna

14. Całka oznaczona

14.1 Oblicz całki oznaczone (w przypadku całek niewłaściwych zbadać, czy są zbieżne):

(a) $\int_1^2 xe^{-x}dx$, (b) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$, (c) $\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx$, (d) $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$, (e) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}dx$,

(f) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$, (g) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx$.

14.2 Oblicz całki oznaczone (w przypadku całek niewłaściwych zbadać, czy są zbieżne):

(a) $\int_0^{\pi/2} x\sin x dx$, (b) $\int_0^{+\infty} xe^{-2x}dx$, (c) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$, (d) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x dx$, (e) $\int_0^{\pi/2} \tan x dx$.

14.3 Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi o podanych równaniach:

(a) $y = -x^2 + x + 6$, $y = 0$,

(b) $y = x^3$, $x = y^3$,

(c) $y = \sqrt{3}\cos x$, $y = \sin x$, gdzie $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

14.4 Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi o podanych równaniach:

(a) $y = x^2 - 6x + 7$, $y = 3 - x$,

(b) $xy^2 = 1$, $xy^2 = 4$, $y = 1$, $y = 2$,

(c) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$.

14.5 Obliczyć długości podanych krzywych:

(a) $y = \ln x$, gdzie $x \in \left[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right]$,

(b) $y = \ln(\cos x)$, gdzie $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$,

(c) $y = \sqrt{x}$, gdzie $x \in [0, 1]$.

14.6 Obliczyć długości podanych krzywych:

(a) $y = \frac{1}{2}\left(x^2 - \ln x\right)$, gdzie $x \in [1, 2]$,

(b) $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$, gdzie $x \in [0, 1]$.

14.7 Obliczyć objętości brył powstałych z obrotu podanych figur wokół wskazanych osi:

(a) $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \frac{1}{1+x^2}$, wokół osi OX,

(b) $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le \sqrt{x}\,e^{-x}$, wokół osi OX,

(c) $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x^2$, wokół osi OY.

14.8 Obliczyć objętości brył powstałych z obrotu podanych figur wokół wskazanych osi:

(a) $1 \leq x \leq e, \quad \ln x \leq y \leq \ln x^2, \quad$ względem osi OX,

(b) figura ograniczona krzywymi: $y^2 = 2px, \;\; y = 0, \;\; x = 0, \;\; x = x_0, \quad$ względem osi OY.

14.9 Oblicz pola powierzchni powstałych przez obrót dookoła osi OX krzywych o następujących równaniach:

(a) $y^2 = 4ax, \quad$ gdzie $0 \leq x \leq 3a$,

(b) $x^2 + (y - b)^2 = a^2, \quad (a < b)$,

(c) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

14.10 Wyznaczyć objętość oraz pole powierzchni podanych figur:

(a) kuli o promieniu R,

(b) walca o wysokości h i promieniu podstawy R,

(c) stożka o wysokości h i promieniu R,

(d) obrotowego stożka ściętego o promieniach podstaw r_1 oraz r_2 i wysokości h.

14.11 * Zastosowanie całek w fizyce:

(a) Jaką pracę należy wykonać, aby ciało o masie m podnieść z powierzchni Ziemi na wysokość h?

(b) Obliczyć moment bezwładności prostokąta o bokach a i b względem boku a, przyjmując stałą gęstość powierzchniową ρ.

(c) Obliczyć moment statyczny łuku paraboli $y = \sqrt{2px}$, gdzie $0 \leq x \leq 2$, względem osi OX.

(d) Wyznaczyć środek ciężkości stożka obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h.

(e) Ciało wykonuje drgania wzdłuż osi OX z szybkością $v(t) = v_0 \cos \omega_0 t$, gdzie v_0 i ω_0 są stałymi. Znaleźć położenie ciała w chwili t_2, jeżeli w chwili t_1 znajdowało sie ono w punkcie x_1.

Analiza matematyczna

15. Funkcje wielu zmiennych

15.1 Które z następujących podzbiorów płaszczyzny są otwarte, a które domknięte?

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R} : 0 < x^2 + y^2 < 3\}$

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R} : 2 < x^2 + (y-1)^2 < 3\}$

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R} : 2 \leq (x-1)^2 + y^2 < 3\}$

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R} : 2 \leq x^2 + (y+1)^2 \leq 3\}$

(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R} : xy > 0\}$

(f) $\left\{\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

(g) $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{n+1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{(0,0), (1,1)\}$

(h) $\{(x,y) \in \mathbb{R} : |x| + |y| < 2\}$

(i) $\{(x,y) \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 2 \ \vee \ 0 < y \leq 2\}$

15.3 Wyznacz dziedzinę funkcji dwóch zmiennych $f(x,y)$ i określ, czy jest zbiór ograniczony, otwarty i domknięty, gdy

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (b) $f(x,y) = \sqrt{xy} + \arccos(4x^2 + 4y^2)$

(c) $f(x,y) = (x+y)e^{x-y}$ (d) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ (e) $f(x,y) = \sqrt{e^{y-2} - e^x} + \dfrac{\ln(xy)}{\arcsin x}$

(f) $f(x,y) = \sqrt{x-y} - \sqrt{x+y}$ (g) $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln|xy|}$ (h) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+x-2} - \ln y^2$

(i) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{3}} + \arccos|x-y|$

15.4 Wyznacz dziedzinę funkcji dwóch zmiennych $f(x,y)$, gdy

(a) $f(x,y) = \ln(5 - x^2 - y^2)$ (b) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x^2+y^2-2}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln(xy)}$ (e) $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln(xy^2)}$ (f) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

(g) $f(x,y) = \dfrac{1}{y^2 - x}$ (h) $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ (i) $f(x,y) = \sqrt{2x - x\ln y} + \dfrac{\arcsin(y-2x)}{x^4+y^2}$

(j) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2+y^2+2x} - 1}$ (k) $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{\sqrt{x^2+e^x}}{\ln(y-x)}$

15.5 Zbadaj, czy następujące ciągi są zbieżne i (jeśli to możliwe) wyznacz ich granice:

(a) $a_n = \left((-1)^n, \dfrac{1}{n}\right)$ (b) $a_n = \left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}, \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{3n}\right)$

(c) $a_n = \left(\dfrac{\sin n}{n}, \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ (d) $a_n = \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}, \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\right)$

(e) $a_n = \left(\sqrt[n]{1 + 2^n + (1{,}5)^n},\ \pi \right)$ (f) $a_n = \left(n \ln \left(1 + \frac{4}{n+1} \right),\ n \sin \frac{1}{2n} \right)$

15.7 Zbadaj, czy istnieją następujące granice:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0} \frac{xy}{|x|+|y|}$

15.9 Oblicz następujące granice funkcji dwóch zmiennych w punkcie:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+2y)$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(2xe^{3x-2y} + \cos \frac{1-x}{1+y} \right)$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \ln \left(1 + \sqrt{x^2+y^2} \right)$ (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{9+x^2+y^2}-3}{x^2+y^2}$ (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

15.11 Zbadaj ciągłość funkcji:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{2-\sqrt{x^2+y^2+4}} & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{|x|+|y|} & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Analiza matematyczna

16. Pochodne funkcji wielu zmiennych

16.1 Obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$, jeśli funkcja f dana jest wzorem:

(a) $f(x,y) = x^4y - 2x^2y^3 + x^3 - 2y + 1$, (b) $f(x,y) = \sqrt{x^3 - 2y^2}$, (c) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$,

(d) $f(x,y) = \frac{xy - x^2}{xy + y^2}$, (e) $f(x,y) = xe^{2x^2y}$, (f) $f(x,y) = (x+y)\ln(x-y)$.

16.2 Obliczyć pochodne cząstkowe dla następujących funkcji:

(a) $f(x,y) = \sqrt{\frac{2x^3y - 4x\sqrt{y}}{3x^4y\sqrt[3]{y^2}}}$, (b) $f(x,y) = \frac{\arcsin(x-y)}{\arccos(x+y)}$, (c) $f(x,y) = x^y$.

(d) $f(x,y) = x^2 \sin\left(2x\sqrt{y}\right)$, (e) $f(x,y) = \sin^2(xe^y - y\ln x)$.

16.3 Niech $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

(a) Obliczyć $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b) Wykazać, że jeśli $\vec{v_1} = (1,1)$ i $\vec{v_2} = (1,-1)$ to pochodne kierunkowe $\frac{\partial f}{\partial \vec{v_1}}(0,0)$ i $\frac{\partial f}{\partial \vec{v_2}}(0,0)$ nie istnieją.

(c) Wywnioskować z powyższego, że f nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

16.4 Niech $f(x,y) = \sqrt{|2x^2 - 3xy - 2y^2|}$.

(a) Obliczyć pochodne kierunkowe $\frac{\partial f}{\partial \vec{v_1}}(0,0)$ i $\frac{\partial f}{\partial \vec{v_2}}(0,0)$ dla wektorów $\vec{v_1} = (2,1)$ i $\vec{v_2} = (1,-2)$.

(b) Uzasadnić, że dla funkcji f nie istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Wywnioskować, że f nie jest różniczkowalna w $(0,0)$.

16.5 Wyznaczyć gradient ∇f dla funkcji:

(a) $f(x,y) = x^2\sqrt{y} - 3x^{1/4}y^{-3/4} + 2x^{0,7}y^{-2,1}$, (b) $f(x,y,z) = xyz$,

(c) $f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, (d) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = e^{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}}$,

(e) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \ln(x_1x_2\ldots x_n)$.

16.6 Wyznaczyć gradient ∇f dla funkcji:

(a) $f(x,y) = 5x^7y^{-3} - 3x^{-2/3}y^4$, (b) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2$,

(c) $f(x,y,z) = \cos(xyz)$,

(d) $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1$,

(e) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_n$.

16.7 Wyznaczyć następujące pochodne kierunkowe:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,2)$, gdy $f(x,y) = 2x^y - \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $\vec{v} = (1,-2)$;

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,3)$, gdy $f(x,y) = \dfrac{2x}{\sqrt{xy}} - \ln(x+y)$, $\vec{v} = (-1,1)$;

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1,1)$ gdy $f(x,y,z) = x^y + y^z + z^x$, $\vec{v} = (1,2,3)$;

(d) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y,z)$ gdy $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $\vec{v} = (s,t,u)$;

(e) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1,\ldots,1)$ gdy $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = e^{x_1x_2\ldots x_n}$, $\vec{v} = (t_1,t_2,\ldots,t_n)$.

16.9 Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, jeśli funkcja f dana jest wzorem:

(a) $f(x,y) = e^{x^2y}$, (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$, (c) $f(x,y) = \sin(xy)$.

16.10 Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe rzędu drugiego dla następujących funkcji:

(a) $f(x,y) = \dfrac{2x^2y - y^3}{xy^4 + x^2y^2}$, (b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (c) $f(x,y) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$.

16.11 Sprawdzić, czy dla funkcji $f(x,y) = y(x^2-y^2)$ zachodzi równość $y^2\dfrac{\partial f}{\partial x} + xy\dfrac{\partial f}{\partial y} = xf$ oraz czy $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1,0) = 2$.

16.12 Sprawdzić, czy dla funkcji f zachodzi podana równość:

(a) $f(x,y) = \ln\left(x^2+xy+y^2\right)$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2$,

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$,

(c) $f(x,y) = \ln(x-y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

16.13 Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$, (b) $f(x,y) = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$,

(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, (d) $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$.

16.14 Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x,y) = x^2y^3(18 - 3x - 4y)$, (b) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$,

(c) $f(x,y) = 1 - (x-2)^{4/5} - y^{4/5}$, (d) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 - 216x$.